GEOMETRÍA NO EUCLIDIANA EN LA ENSEÑANZA BASICA: GEOMETRÍA DE LA ESFERA

Nélida Pérez y Raquel Cognigni
U. Nacional de San Luis e Instituto San Agustín, San Luis, Argentina
nperez@unsl.edu.ar

Resumen

Con el convencimiento de que la Enseñanza General Básica debe ofrecer a los educandos la oportunidad de descubrir ideas geométricas a través de actividades de manipulación de objetos cotidianos, y de que es posible llevar contenidos no convencionales a las aulas. Encontramos en las geometrías no-euclidianas, materia prima para alcanzar el objetivo. Trabajamos con la "Geometría de Riemann" cuyo modelo es un objeto muy familiar: la esfera, y no es difícil imaginar un mundo de dos dimensiones sobre su superficie; mostramos que el ejemplo más clásico de una geometría sin paralelas se obtiene observando la tierra. Nuestra metodología estuvo orientada al sujeto que aprende, la basamos en la motivación, ya que predispone al alumno al aprendizaje e induce al esfuerzo intelectual. Nos concentramos especialmente en una selección de contenidos, que favorecieran la comprensión, la observación, la experimentación, el descubrimiento de regularidades, la formulación de hipótesis y conjeturas y la comprobación de las mismas. Como conclusión destacamos que las actividades desarrolladas, investigar y comparar la geometría Euclidiana con una no Euclidiana condujeron a la comprensión de lo que es un sistema axiomático. En este reporte exhibimos algunas conclusiones y describimos la experiencia realizada con alumnos de 8º año de Enseñanza General Básica (12-13 años de edad) tomando como punto de partida la investigación realizada con los mismos alumnos en el año 2000.

Introducción

Si queremos pensar para nuestras aulas una Geometría con un enfoque diferente a la propuesta por Euclides, debemos remontarnos al Siglo XIX, donde comienza la historia del cambio, con el advenimiento de las geometrías no-euclidianas. En 1854, George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), con motivo de su admisión como profesor de la Universidad de Gotinga, presentó una disertación titulada "Sobre las Hipótesis en que se apoyan los Fundamentos de la Geometría". Entre otros temas, analizó el postulado dos y cinco de Euclides, una de sus conclusiones fue que el postulado cinco era independiente y se podía reemplazar por *"Todo par de rectas se corta" (*no existen las paralelas*)*. Esta modificación del postulado cinco condujo a lo que actualmente llamamos geometría elíptica o geometría riemanniana.

Encontramos apropiado para lograr nuestros objetivos hacer geometría sobre la esfera, contando con las ventajas del modelo simple, poder mostrar un mundo sin rectas paralelas observando nuestro planeta y posibilidad de emplear variados materiales que permiten la experimentación.

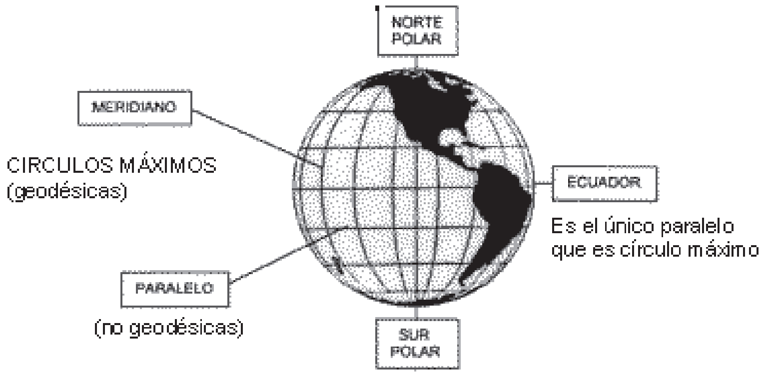
Objetivos

Realizar experiencias sensibles, visuales y táctiles que constituirán, la base de abstracciones posteriores y son claves para el desarrollo del pensamiento geométrico.
Mostrar que intuitivamente se puede acceder a contenidos que tradicionalmente se piensan sólo para niveles superiores.
Desarrollar actividades que acerquen a la comprensión de lo que es un sistema axiomático.

Consolidar lo aprendido de geometría de la esfera, mejorando las conclusiones que se tenían e incursionar en el trazado de figuras sobre la esfera y cálculo de áreas.

Antecedentes

El grupo de estudiantes era básicamente el mismo con el que iniciamos nuestra experiencia con "geometría riemanniana" en el año 2000. Las conclusiones y conocimiento de aquel primer trabajo fueron nuestro punto de partida.



Ya habían descubierto que la distancia menor entre dos puntos A y B, sigue el arco de círculo máximo que pasa por esos dos puntos; "el círculo máximo de una esfera es la recta en nuestro nuevo plano: la superficie esférica".

Conocían el significado del término geodésica: distancia más corta entre dos puntos.

Habían analizado propiedades y postulados de la geometría euclidiana y controlado su validez considerando la superficie de una esfera.

Para situarnos, enunciamos someramente conclusiones que se obtuvieron en aquella oportunidad (alumnos de 6º año, 2do.ciclo de EGB, edades 10-11 años) y presentamos el cuadro comparativo estableciendo diferencias y similitudes entre lo que llamaron plano viejo (plano euclidiano) y plano nuevo (superficie de la esfera).

1. *La longitud de una circunferencia dibujada sobre una superficie esférica oscila entre 2d (2 veces el diámetro) y πd (π por diámetro).*
2. *La suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico es mayor que 180º y no tiene el mismo valor para todos.*
3. *Se pueden encontrar triángulos con sus tres ángulos rectos.*
4. *No existen los rectángulos sobre la superficie esférica.*
5. *Para que dos triángulos sean semejantes deben ser iguales.*

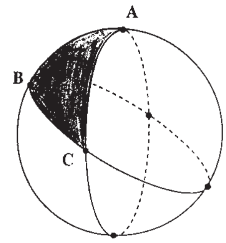
PLANO VIEJO (Plano euclidiano)	**PLANO NUEVO (Superficie de la esfera)**
Dos puntos determinan una recta a la que pertenecen.	Dos puntos cualesquiera determinan una circunferencia máxima a la que pertenecen. Siempre que los puntos no sean antipodales.
El mínimo camino entre dos puntos es el segmento de recta que ellos determinan.	El mínimo camino entre dos puntos es el arco de circunferencia máxima (< que una semicircunferencia)
Una recta es infinita.	Si no se designa ningún punto, el recorrido sobre una circunferencia máxima, puede prolongarse indefinidamente
Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una paralela a ella.	Por un punto exterior a una circunferencia máxima NO pasa ninguna circunferencia máxima paralela a ella. Pasa otra circunferencia máxima que siempre corta a la dada.
Tres puntos que no pertenecen a la misma	Tres puntos determinan un triángulo esférico.

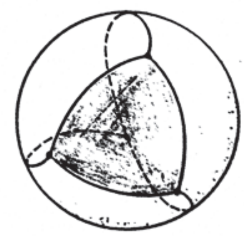
recta determinan un triángulo.	

Materiales empleados: Papeles, cartulinas, hilos, globo terráqueo, esferas de telgopor o de corcho, pelotas, esferas transparentes, trozos de tela, cinta engomada, tijeras, cuchilla para cortar, marcadores, papel de calcar, regla, transportador, compás.

Desarrollo de la experiencia

La experiencia se realizó en uno de los Talleres de Matemáticas que se ofrecen en el Instituto San Agustín de la ciudad de San Luis, durante el primer cuatrimestre del 2002 con alumnos de 8º Año, (Tercer ciclo de EGB 12-13 años de edad).





Teníamos en claro que la observación libre debe ir acompañada de las observaciones provocadas, por lo cual las orientábamos hacia aspectos que no siendo obvios o aparentes podían generar gran interés y provocar la discusión y elaboración de conjeturas. Las observaciones fueron acciones personales realizadas por cada alumno (comparación, medición, manipulación, etc.) para lo cual se usaba material variado, de modo que cada alumno pudiera tener una interiorización propia del problema y obtener una conclusión, que siempre era debatida en una puesta en común.

A efectos de esta presentación exponemos seis temas:

Tema 1: Triángulo.

Usando marcadores, los alumnos dibujaron triángulos sobre las esferas que disponían. Se generó una rica discusión entre ellos, ya que algunos trazaron efectivamente triángulos esféricos, cuyos lados eran trozos de alguna circunferencia máxima y otros que, si bien a simple vista parecía que habían dibujado un triángulo, afinando la observación no lo era, ya que sus lados no eran rectos (no eran parte de una geodésica), esta práctica también sirvió para reafirmar cuáles eran las rectas en el plano que trabajábamos.

Luego pudieron expresar el concepto de triángulo esférico, diciendo: “Para dibujar un triángulo se deben trazar tres puntos A,B,C y las rectas AC, BC y AB, recordando que AC, BC y AB son trozos de circunferencias máximas”.

Llegado a este punto, planteamos las siguientes preguntas:

¿Hay que imponer alguna condición a los puntos A, B y C para que determinen un triángulo sobre la esfera? ¿Es posible que dos puntos, A y B sean antipodales?.

Siguieron trabajando experimentalmente y vieron que se debe pedir que los tres puntos A, B y C no deben estar sobre la misma recta (misma geodésica) y además dos de ellos no pueden ser antipodales.

Así enriquecieron la conclusión anterior y quedó: *Tres puntos que no pertenezcan a la misma circunferencia máxima determinan un triángulo esférico, siempre que dos de ellos no sean antipodales.*

Tema 2: Suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Confiando en el procedimiento que resultó más exitoso para medir ángulos:

Calcar el ángulo a medir sobre la esfera en una hoja de papel muy cerca de su vértice y luego prolongar sus lados (considerar la tangente) para medirlo en el plano, habían obtenido que:

La suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico es mayor que 180º.

Se planteó mejorar la observación: “mayor que 180º”. Estaba latente la pregunta: ¿Puede llegar a valores grandes, como por ejemplo 800º?

Volvieron a experimentar, nuevamente dibujaron triángulos con dos ángulos rectos. Bastaba situar dos puntos A y B sobre el Ecuador y el otro punto, C en uno de los polos. Redescubrieron el otro caso notable: trazaron por los polos dos rectas (circunferencias máximas) perpendiculares y las cortaron con una recta a la altura del Ecuador terrestre, obtuvieron ocho triángulos con sus tres ángulos rectos.

Es decir que eligiendo el segmento AB como un cuarto del Ecuador terrestre y el punto C en uno de los polos obtenían un triángulo equilátero con tres ángulos rectos.

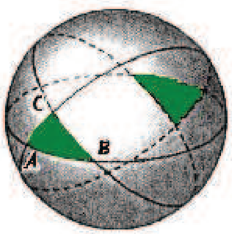
Así pudieron concluir que sobre la superficie de la esfera se pueden trazar triángulos con sus tres ángulos rectos, (tri-rectángulos), para estos la suma de sus ángulos interiores es 270º. Continuaron dibujando gran cantidad de triángulos cóncavos y convexos (buscando posiciones límites), hasta obtener la conclusión:

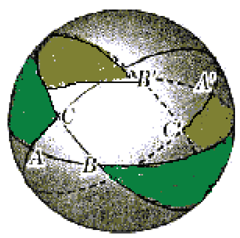
La suma de los ángulos interiores de un triángulo, ya sea cóncavo o convexo, varía entre 180º y 540º.

El máximo valor para triángulos convexos se obtiene cuando cada ángulo se aproxima 180º, por lo cual la suma se acerca a 180º x 3= 540º. Para el caso de los triángulos cóncavos, el máximo valor se obtiene cuando el ángulo cóncavo se aproxima a 360º y los otros dos se hacen casi 90º. Luego: 360º + 90º + 90º = 540º.

El mínimo cercano a 180º se logra con triángulos de pequeñas dimensiones, ya tenían claro que en porciones pequeñas, la superficie de la esfera se comporta como una parte del plano.

Tema 3: Figuras formadas por tres circunferencias máximas.





Aprovechando las tres circunferencias máximas que trazaban para marcar un triángulo, se pidió que observaran si encontraban alguna otra propiedad o figura que quedara formada al trazar esas geodésicas. Vieron que todas las figuras que se forman son triángulos. Los pintaron de distintos colores y pudieron comprobar que se formaban ocho triángulos, llegando a conjeturar además que: “los triángulos opuestos son iguales”.

Para verificar esta hipótesis utilizaron una esfera transparente, y confirmaron que:

Siempre quedan formados 8 triángulos.

Cada triángulo es opuesto a un triángulo que es su reflejo a través del centro de la esfera

Tema 4: Figuras de menos de tres lados.

Con facilidad pintaron sobre la superficie esférica figuras de dos lados rectos.

Una gran diferencia con la geometría en el plano, es que dos rectas no pueden encerrar una superficie, pero sobre la esfera, dos círculos máximos forman una figura de dos lados que encierra un área. Se llama biángulo, también se emplea el nombre de huso, cuña esférica o luna para designar esta figura. Los alumnos la descubrieron experimentando con los materiales y sin haber hecho una hipótesis previa.

Además llegaron a concluir que existen figuras de un solo lado recto. El único lado recto es una circunferencia máxima, la figura es una semiesfera, o un hemisferio para usar el nombre dado cuando se estudia geografía. Dos hemisferios cubren la tierra.
Concluyeron que: hay "polígonos" de uno y dos lados.

Tema 5: Polígonos regulares
Surgió la cuestión de cómo dibujar polígonos regulares sobre la esfera, o sea polígonos que tuvieran la propiedad de lados de igual medida y ángulos iguales.
¿Cómo dibujar un cuadrado?
Para trazar un cuadrado se hicieron muchos experimentos. Teniendo siempre en mente que querían lograr igualdad de ángulos, después de numerosos intentos obtuvieron una manera práctica: trazaron dos círculos máximos intersecados a 90º (equivalente a 4 meridianos). Desde el punto de corte, "N", marcaron cuatro puntos, A, B, C y D uno sobre cada meridiano de modo que NA, NB, NC y ND tuvieran la misma longitud, a continuación unieron con rectas (círculos máximos) los puntos A, B, C y D, la figura tiene cuatro ángulos iguales y lados de igual longitud, puede obtenerse un cuadrado cóncavo o uno convexo, según como se tracen los lados.
Para dibujar un hexágono se trazaron 6 meridianos desde el polo N, con separación de 60º, y procedieron como para el cuadrado.
¿Cuál era la medida de los ángulos interiores de estas figuras?
Tanto para el cuadrado como para el hexágono observaron que el ángulo interior de mayor medida lo conseguían cuándo los vértices están muy cerca del ecuador geográfico, (en el límite los ángulos interiores son de 180º y el polígono resulta un hemisferio) y el ángulo de menor medida se consigue acercando los vértices al polo, siempre en un plano paralelo al ecuador. Así comprobaron que
Para el cuadrado sobre la esfera el ángulo interior ← varía entre 90º y 180º, es decir
90º < ← < 180º, y para el hexágono la variación es: 120º < ← < 180º. Por lo tanto se concluyó que: *El valor de la suma de los ángulos interiores de cuadrado trazado sobre una esfera oscila entre 360º y 720º.*
Tema 6: Cálculo de áreas en la superficie esférica.
Los primeros intentos para calcular el área de un triángulo cualquiera se hizo por aproximación, sirvió para interiorizarse con el concepto de área.
Luego se decidió utilizar la fórmula de área de la esfera $A=4\pi.r^2$ y a partir de ella intentar conclusiones para otras figuras sobre la esfera.
La más simple, el área de un hemisferio: $2\pi.r^2$ (mitad del área de la esfera).
Sabían que toda esfera queda cubierta con 8 triángulos que tienen sus tres ángulos rectos. Por lo cual el área de uno de estos triángulos es la octava parte del área de la esfera, es decir Area del tri-rectángulo = $\frac{1}{2}\pi.r^2$
Consideraron otro caso particular: la esfera se puede cubrir con doce triángulos isósceles cuyos ángulos de la base miden 90º y el del vértice 60º. (Trazar tres rectas por el polo a 60º y cortarlas con el ecuador). Cada triángulo es la doceava parte de la esfera, luego su área es

$$\frac{4\pi r^2}{12}=\frac{\pi}{3}r^2.$$

A efectos de continuar con la experimentación se introdujo una nueva definición: *"el exceso de un triángulo esférico es igual a la suma de los ángulos interiores del triángulo menos 180*" o usando radianes: ($\alpha + \beta + \gamma - \pi$)

Y a continuación se enunció el siguiente Lema:

El área de un triángulo esférico es igual al producto de r^2 por el exceso del triángulo. Es decir: Área del triángulo con ángulos interiores (α, β, γ) = r^2 ($\alpha + \beta + \gamma - \pi$).

Aplicaron la nueva fórmula para calcular áreas de tri-rectángulos y de los triángulos isósceles que conocían y verificaron/compararon los resultados que tenían.

La esfera está dividida en dos lunas (cada una es un hemisferio), dividiendo con un meridiano el hemisferio a 90º, obtuvieron dos lunas, el área de cada una es πR^2, (mitad del hemisferio) continuando con este proceso vieron que podían obtener áreas de otras lunas. Se intentó la generalización para obtener una fórmula.

¿Qué ocurre si dividimos un hemisferio en n lunas iguales? ¿Cuál es el ángulo de cada luna? Claramente el ángulo de cada luna es π/n, por lo que el área de cada una de estas lunas es $2\pi R^2/n$.

Dado que la manipulación algebraica de los alumnos no estaba madura, no se pudo continuar el análisis para obtener la fórmula general del área de una luna o cuña esférica cuyo ángulo fuera cualquiera. Pensamos continuar en esta dirección, emplear álgebra para encontrar relaciones, hacer uso de la proporcionalidad y dar justificación intuitiva-algebraica de varias fórmulas.

Conclusiones de la investigación

Los alumnos participantes se sintieron actores y no espectadores en el proceso de construcción de los nuevos conocimientos. Pudieron formular, controlar y modificar hipótesis, enriqueciendo cada vez más el proceso de aprendizaje.

La curiosidad se vio estimulada a cada momento, ya que fueron generadores de constantes preguntas.

Se mantuvo un clima afectivo que permitió la participación individual y la imprescindible discusión en grupo.

Se logró aumentar las habilidades de visualización, clave para el desarrollo del pensamiento geométrico.

Las discusiones y el ir y venir sobre conceptos geométricos permitió consolidarlos.

La Geometría aporta temas donde es factible desarrollar investigaciones que aseguren la participación de los escolares.

Las actividades de investigar y comparar la geometría Euclidiana con una no Euclidiana. condujeron a la comprensión de lo que es un sistema axiomático.

Otros resultados

A los participantes, el tema les resultó agradable e interesante, por lo cual decidieron comunicar su vivencia. La investigación con sus conclusiones fue presentada a la Feria Provincial de Ciencia por tres de las alumnas que asistieron al taller, con el título de: "El plano curvo". Obtuvo premio en su nivel y categoría en la Provincia y consiguió el puntaje para en el certamen Nacional que se realizó en Ushuaia (Arg) en Noviembre del 2002, donde obtuvo el primer lugar en su categoría.

Bibliografía

Alsina, C.; Fortuny, J. y Pérez, R. *¿Por qué Geometría? Propuesta Didácticas para la ESO*. Ed. Síntesis.
Boyer Carl. *Historia de la Matemática*. Editorial Alianza Universidad Textos.

Colera, J.- Guzman, M. *Matemáticas 1, 2 Y 3*. Editorial Anaya.
Steen L. A. (1999) *Las Matemáticas en la vida cotidiana*. *Capítulo: Nuevas Geometría para un nuevo Universo*. Editorial Addison y Wesley.
Filloy Yagúe, E. *Didáctica e Historia de La Geometría Euclidiana*. Grupo Editorial Iberomérica.
Guasco, M.J. y Crespo, C. *Geometría: Su enseñanza*. Editorial Pro Ciencia. Conicet.
Kasner y Newman. *Matemáticas e Imaginación*. Editorial Librería Hachette S. A.
Guzman, Colera y Salvador. *Matemáticas 1,2 y 3*. Editorial Anaya.
Oserman, R. *La poesía del Universo*. Editorial Drakontos.
Santaló, L. *Geometrías no euclidianas*. Cuadernos OEA.
Santaló, L. *La geometría en la formación de profesores*. Editorial, Red Olímpica.
Singer D.A. *Geometry: plane and fancy*. Editorial Springer.