UNA CLASE EN EL LABORATORIO DE MATEMÁTICA COMO OBJETO DE INVESTIGACIÓN

Mercedes Anido de López y Ana María Simoniello de Álvarez
Universidad Nacional de Rosario y Universidad Tecnológica Nacional - Argentina
amsimoni@fce.unl.edu.ar

Resumen

El trabajo refiere a experiencias realizadas en el aula con alumnos universitarios de primer año de estudios de una carrera de Ingeniería de la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional durante el desarrollo de una Unidad didáctica de Matemática. Uno de los objetivos que nos planteamos consiste en analizar las respuestas de los alumnos cuando, a través de la estrategia pedagógica especialmente diseñada, se le proporciona la oportunidad de construir sus propias ideas para lograr la comprensión de ciertos conceptos. Un aspecto del diseño es la inclusión de la herramienta computacional DERIVE como herramienta cognitiva que permite colaborar con el alumno en la exploración, organización y representación del conocimiento matemático y como un valioso instrumento para el aprendizaje de Geometría. La experiencia consistió en la observación y descripción de las selecciones de los alumnos ante situaciones concretas planteadas en el proceso de construcción del conocimiento.

Introducción. Fases de la investigación.

Se busca transferir, con las limitaciones que Artigue (1995) señala, los "análisis preliminares" y la confrontación entre los análisis "a priori" y "a posteriori ", de una Ingeniería Didáctica diseñada para el "Taller de Prácticas" de Álgebra y Geometría Analítica en 1er. año de las carreras de Ingeniería-2do. Cuatrimestre - Facultad Regional Santa Fe-Universidad Tecnológica Nacional. Esta experiencia forma parte de un conjunto de Microingenierías Didácticas desarrolladas en el marco de los Proyectos de Investigación institucionalizados en la Universidad Nacional de Rosario: "La Enseñanza de la Matemática con Herramientas Computacionales " y "La Ingeniería Didáctica en el Diseño y Seguimiento de Unidades Curriculares". Uno de los objetivos es "integrar y complementar "los resultados de distintos análisis, según la concepción de Brousseau (1988) , sobre el rol de las llamadas herramientas CAS (SCILAB, MAPLE, MATEMÁTICA, DERIVE, SAS) como parte del "medio", en la generación de "situaciones didácticas".

Desarrollo de la experiencia

Modalidad de trabajo: se trata de un taller de prácticas de Matemática que complementa la actividad habitual de las clases de teoría y problemas. Para esta experiencia se acordó destinar 4 (cuatro) horas en el laboratorio de computación.
Tiempo: 1 (una) observación semanal de 2 hs. durante dos semanas.
Tamaño de la población a observar: 10(diez) alumnos, en registro narrativo, 2(dos) en interacción con el docente y el ordenador.
Modalidad: observación participante por parte de la profesora de Matemática a cargo.
Instrumento de recolección y registro de la información: notas de campo, registro anecdótico, grabación magnetofónica.
Criterios orientadores de la observación: se busca detectar situaciones adidácticas de acción, de formulación o de validación. Se espera registrar la exploración del conocimiento del alumno a través de sus acciones, conjeturas, anticipaciones, verificaciones, dudas.
Relaciones de los alumnos con los contenidos y con el medio: el trabajo del alumno con los datos e hipótesis; función de los obstáculos didácticos; forma de apropiación de los saberes;

interacciones frente al ordenador: docente, alumno, ordenador; alumno, alumno, ordenador; lugar asignado a la computadora en las situaciones de aprendizaje.

Los análisis previos

Ubicación curricular: para el alumno de primer año de Ingeniería resulta generalmente difícil la comprensión de las relaciones recíprocas entre una ecuación con dos variables y el conjunto de puntos del espacio de dos dimensiones que la representan geométricamente. En particular, la interpretación geométrica de los coeficientes y sus relaciones.

Conocimientos previos: la obtención de propiedades a partir de la ecuación de una curva implica un fluido manejo por el alumno de ciertos conceptos geométricos, del álgebra y de la geometría analítica que significan competencias previas o adquiridas en etapas anteriores al estudio del tema.

Análisis epistemológico: nos adherimos a Polya (1981) cuando afirma que: " La obra matemática se nos presenta, una vez terminada, como puramente demostrativa, consistente en pruebas solamente. No obstante, esta ciencia se asemeja en su desarrollo al de cualquier otro conocimiento humano. Hay que intuir un teorema matemático antes de probarlo, así como la idea de la prueba antes de llevar a cabo los detalles. Hay que combinar observaciones, seguir analogías y probar una y otra vez. El resultado de la labor demostrativa del matemático es el razonamiento demostrativo, la prueba; pero ésta a su vez, es construida mediante el razonamiento plausible, mediante la intuición. Si el aprendizaje de las matemáticas refleja en algún grado la invención de esta ciencia, debe hacer en él un lugar para la intuición, para la inferencia plausible".

Concepción didáctica: la metodología se basa en la postura epistemológica y el marco teórico que sustenta la Ingeniería Didáctica, en cuanto a no separar el conocimiento matemático de su propio proceso de estudio, y deriva en la participación activa del estudiante como hacedor de un aprendizaje que se trata de facilitar con el uso “adecuado“ de la herramienta informática..

Selecciones y conjeturas del profesor, “a priori”

Selecciones conceptuales: consideramos que la conceptualización de una cónica como lugar geométrico definido por una condición referida a elementos geométricos dados y la relación entre esos elementos y los coeficientes de la ecuación canónica que se obtiene, es enriquecedora desde el punto de vista geométrico ó analítico geométrico. Por esto las herramientas conceptuales en general están referidas a la relación entre una función de una variable, que esté explícita, o bien implícita en una ecuación, ó expresada en forma paramétrica, y el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación en el correspondiente sistema de referencia. Así se ven involucrados: el concepto de función implícita en una ecuación, el de ecuaciones algebraicas equivalentes, la representación de puntos y rectas en un sistema de referencia.

Selección de la herramienta informática: *e*legimos para este trabajo el Programa DERIVE en su versión for Windows que posee amplias posibilidades operativas, utiliza un lenguaje simbólico “ natural ” (como el que se utiliza en el aula de Matemática), ofrece la visualización permanente del trabajo del usuario, opera con expresiones y relaciones aritméticas, algebraicas y trascendentes, con ecuaciones, sistemas de ecuaciones, aproximación de funciones; permite crear, programar funciones u operadores que interesen al usuario. Además ha sido incorporado a calculadoras programables a las que los alumnos tienen mayor acceso.

Selecciones metodológicas: Las actividades se derivan de las propuestas del docente a partir de un problema inicial disparador. Se sigue en forma natural un proceso de inducción, dejando lugar a la posibilidad de situaciones problemáticas y preguntas imprevistas de los alumnos.
Selecciones de problemas locales:

Presentación del Problema A

Dadas las ecuaciones de segundo grado en dos variables:

a) $x^2 + y^2 = 5x$ d) $15\,y = -\,x^2 + 8\,x + 44$

b) $(x - 15)^2 = 16\,(y - 3)$ e) $x^2 - 10\,x + y^2 + 60\,y + 825 = 0$

c) $y^2 - 40\,y = 10\,x + 30$ f) $(x - 13)^2 + (y + 5)^2 = 35$

A.1 Obtenga sus gráficas cartesianas en la pantalla 2D y exprese qué curva representa cada una de ellas.

A.2 A partir de la visualización de las gráficas exprese características principales que las distinguen y destacan, en cuanto a su posición y extensión en el plano.

Conjeturas del Profesor

En cuanto a la utilización de DERIVE: los alumnos no reciben preparación previa sobre el uso del computador ni del programa DERIVE para realizar los cálculos y resolver ecuaciones; se espera, dado la experiencia con otros grupos, que serán capaces de aplicar los comandos necesarios del Programa sobre la base de una tabla de consignas preparada por el Profesor para apoyar las consultas al respecto. El Profesor prestará apoyo ante situaciones que puedan surgir al respecto, y que espera desaparezcan a medida que se familiaricen con la lógica del programa. Se espera que el alumno reconozca las ecuaciones de circunferencias, dado su estudio previo; distinga las ecuaciones de parábolas, las relaciones con su forma geométrica y con otros conceptos adquiridos en Álgebra y en Análisis Matemático, y sea capaz de reconocer y estimar algunas características principales como los rangos de variación de sus variables, valores máximos ó mínimos, mayor o menor dilatación o abertura, eje de simetría, intersecciones con los ejes coordenados. Se supone que los alumnos propondrán como problema: cambiar las escalas en los ejes del sistema coordenado , para favorecer la visualización de las gráficas.

Presentación del Problema B

Considere la ecuación de la parábola d) del Problema A, y su gráfica.

B.1 A partir de la visualización de la gráfica estime las coordenadas de su vértice y de las intersecciones con los ejes coordenados, si existen; conjeture sobre la existencia de eje de simetría; estime los rangos de variación de las variables de la ecuación; estime las coordenadas de dos puntos que pertenezcan a la curva y de otros dos que no le pertenezcan.

B.2 Realice con DERIVE los cálculos necesarios para confirmar ó desechar sus conjeturas.

B.3 Reitere el problema con la ecuación b) del Problema A.

Conjeturas del Profesor

Con respecto a B.1:

- se espera que el alumno haga las estimaciones y conjeturas a través de los datos sobre coordenadas que le ofrece la pantalla gráfica 2D de DERIVE, según sitúen adecuadamente

el cursor móvil, y que propongan el trazado del eje de simetría para favorecer su conjetura al respecto.
En cuanto a B.2 y B.3:

- se espera que el alumno utilice los conocimientos sobre polinomios, sus raíces reales ó complejas, establezca y resuelva en forma adecuada las ecuaciones correspondientes para calcular las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados;
- que el alumno realice los cálculos necesarios para determinar coordenadas de puntos de la curva; seleccione adecuadas estrategias para controlar la simetría respecto del eje estimado y concluya que es un eje paralelo al eje de ordenadas. Con respecto a la determinación del vértice de la parábola es de esperar que algunos relacionen el cálculo de su ordenada con la determinación de máximo, ó mínimo de la función cuadrática, estudiado en Análisis Matemático; es posible que otros, una vez aceptado el eje de simetría, encuentren el vértice como solución del sistema mixto de ecuaciones de curva y recta, ó de abscisa igual a la semisuma de abscisas de puntos simétricos con respecto al eje.

Presentación del Problema C:

C.1 Dados la ecuación de la parábola $y = \frac{1}{4}x^2$, el punto (0, 1) y la recta d: y + 1=0, obtenga sus gráficas en el mismo sistema coordenado

C.2 Estime en la gráfica las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría de la parábola, y las coordenadas de otros tres puntos de la parábola.

C.3 Estime las distancias respectivas de cada uno de esos puntos al punto y recta dados. Elabore conclusiones y analice la posibilidad de validación de sus conjeturas.

C.4 Considere la parábola de ecuación $y = -4x^2$, el punto $(0, -\frac{1}{16})$ y la recta d: $y - \frac{1}{16} = 0$.

Reitere, con estos datos, lo consignado en C.1, C.2 y C.3.

C.5 Realice los cálculos necesarios para confirmar ó rechazar sus conjeturas, y dar conclusiones.

Conjeturas del Profesor

Con respecto a las consignas C.1 y C.2 se esperan situaciones similares a las planteadas en el Problema B.
En relación con C.3 se espera que el alumno utilice correctamente los conocimientos de cálculo de distancia entre puntos, y entre punto y recta.
Es posible que algunos alumnos expresen alguna observación sobre la relación entre el coeficiente del término cuadrático en la ecuación de la parábola y la concavidad de la gráfica, dado que se hace evidente en las ecuaciones del problema, y además pueden asociarlo a conocimientos previos sobre la función cuadrática. Asimismo pueden observar la relación entre la dilatación de la parábola y el valor absoluto de aquel coeficiente.
Se supone que pueden surgir cuestionamientos del alumno acerca de: si la relación entre las distancias calculadas se mantienen para todos los puntos de la parábola y/o, si eso ocurre con todas las parábolas. En tal caso se habrá logrado el propósito de revalorizar el concepto de lugar geométrico y quedará abierta la propuesta de definir la parábola como el lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen las condiciones analizadas.
En definitiva, consideramos que subyacen problemas abiertos como:

- Obtener la ecuación de la parábola cuyo eje de simetría es el eje de ordenadas y vértice, el origen, como lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto y de una recta , fijos.
- Ecuación de la parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje de ordenadas. Traslación de ejes para relacionar con la ecuación canónica anterior.
- Relaciones entre la concavidad de la parábola y su dilatación o abertura, según el coeficiente a , de la ecuación $y = a\,x^2$.
- Establecer analogías con respecto a parábolas cuyos ejes de simetría son paralelos al eje de abscisas.
- Demostrar que dados tres puntos no alineados sólo existe una parábola que los contiene.

El análisis "a posteriori "

Con respecto al Problema A, la tarea de incorporar a la pantalla de Álgebra las ecuaciones dadas fue algo lenta en todos los grupos dado que siendo la primera experiencia en el uso de DERIVE, debían familiarizarse con la introducción de exponentes, en especial, pero en general con el uso del teclado; para algunos también era la primera vez en el uso de un teclado alfanumérico; cometieron errores como omisiones de paréntesis y exponentes; se observó complementación de las tareas entre los dos compañeros de cada grupo, uno de ellos dictaba las expresiones y controlaba, mientras el otro escribía; no se observaron dificultades en el uso de DERIVE para obtener las gráficas de las funciones y tal lo conjeturado todos solicitaron ayuda para modificar las escalas de modo que las gráficas estuvieran dentro del rango visible en la pantalla. No tuvieron dificultades en el reconocimiento de las ecuaciones de circunferencias y de la parábola cuya ecuación estaba casi explícitamente dada.; les causó sorpresa el hecho que las otras dos ecuaciones también representaran parábolas y algunos buscaron la forma de ver si se podía explicitar la función cuadrática, como una situación adidáctica.; en cuanto a las características de las parábolas, que debían observar por comparación y distinción con las gráficas de circunferencias, coincidieron en términos como curva abierta, extensión infinita a partir de un valor fijo, y un alumno expresó que la gráfica c) no correspondía a una función; esto dio lugar a la discusión y para corroborar sus dichos luego de la intervención de la profesora, mostró que, despejando la variable y obtenía dos funciones cuyas gráficas respectivas son las ramas superior e inferior de la parábola de eje de simetría horizontal.

En cuanto al Problema B se observó que aprovecharon el cursor móvil sobre la curva para estimar las coordenadas del vértice y de las intersecciones con los ejes coordenados, con la aproximación que ofrecen los datos de la pantalla; reconocieron la existencia del eje de simetría; dado que la gráfica intercepta al eje x en dos puntos, en tres de los grupos avanzaron obteniendo la ecuación utilizando la semisuma de abscisas de aquéllos; los otros dos grupos optaron por suponer que la abscisa del vértice les permitía dar esa ecuación; luego obtuvieron su gráfica y encontraron puntos equidistantes del mismo; discutieron sobre la validación de estas suposiciones; dos alumnos de distintos grupos opinaron que si todos llegaban a la misma conclusión parecía que no necesitaban validación. Fue este un momento muy oportuno para la reflexión sobre la validez o verificación de propiedades, en general, y no sólo por situaciones particulares. En el caso de calcular coordenadas de puntos de la parábola plantearon y resolvieron las ecuaciones correspondientes. Les produjo entusiasmo el hecho de no necesitar más que la aplicación del Comando Solve de DERIVE para obtener las soluciones correspondientes. Se turnaron en hacer los cálculos a través del computador, mientras el otro compañero trataba de avanzar con cálculos en el papel, usando la calculadora; se registró que uno de ellos manifestó no agradarle que algunas respuestas fueran números irracionales, "porque eso le complicaba todo". Resultó interesante que un alumno propusiera verificar las soluciones de las ecuaciones, en estos casos. Se observó en casi todos los grupos que los alumnos trataban de plasmar en el papel un bosquejo de lo que veían en la pantalla, pareciendo que, así como con rapidez obtenían la gráfica, asimismo podían perderla y temían no recuperarla. En el caso de considerar la ecuación b) observaron que las raíces del polinomio debían ser complejas no reales y sólo uno intentó calcularlas para usarlas en la conjetura sobre la ecuación del eje de simetría y en la abscisa del vértice. El mismo alumno obtuvo más puntos de iguales ordenadas para asegurar mejor su apreciación. A partir de la discusión, otros optaron por una estrategia similar. Ninguno abordó la búsqueda de la solución del sistema mixto para validar esta conjetura y tres alumnos optaron por encontrar el mínimo de la función con método del Análisis Matemático. Hasta aquí transcurrieron las dos primeras horas.

En el Problema C, resolvieron más rápidamente y con más seguridad lo consignado en C.1 y en C.2. En cuanto a la consigna C.3 fue cumplida por casi todos, dado que algunos no lograron estimar las distancias de los puntos que habían elegido, a la recta y punto fijo dados; resolvieron hacerlo con cálculos. En tres grupos trabajaron con lentitud debido a que cometieron errores en el uso de fórmulas para el cálculo de distancias. Con la intervención de la profesora detectaron sus errores y siguieron. Se observó error en el uso de signos, de valor absoluto, de inclusión de paréntesis, en general, errores similares a los que generalmente cometen al operar a lápiz y papel. Un aporte muy interesante fue el de un alumno que planteó si sería válido analizar si para todos los puntos de la parábola se cumplía la relación entre las distancias calculadas, proponiendo considerar un punto cualquiera (x, y) de la parábola; debido a esto, otro se preguntaba si lo mismo podía ocurrir con todas las parábolas; luego de la discusión quedó la propuesta de confirmar o desechar esa nueva conjetura; cinco alumnos tuvieron dificultad para comprender que su compañero proponía que el punto de la parábola que debían considerar, para asegurar la pertenencia, es $(x, 1/4\ x^2)$. Pero esta situación adidáctica permitió lo esperado, es decir, reconocer que la parábola es el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la determinada condición.; se aprovechó para plantear la ecuación del lugar geométrico y finalizó el tiempo asignado; así quedó el problema abierto para completar el estudio, lo que se hizo en la clase habitual.

Confrontación de los análisis a priori y a posteriori: En los tres problemas planteados se confirmaron en gran medida las conjeturas del profesor.

Una evaluación del avance

- La propuesta de trabajo que implica experimentar, explorar, investigar, coloca al alumno en una situación favorable hacia la adquisición de conocimientos
- El rol del docente se muestra en estas instancias como el de orientador, acompañante, moderador, principalmente en las situaciones adidácticas ya que es el momento de mayor discusión y debe en tal caso colaborar con interrogatorio adecuado y adaptado al cuestionamiento del alumno para encaminar y guiar la nueva problemática hacia el desarrollo de nuevas estrategias y la reorganización de ideas y conocimientos.
- La formación de pequeños grupos frente al computador favorece la creación de un ambiente propicio para el aprendizaje significativo, que contempla los ritmos de cada

alumno favoreciendo la realización de las tareas propuestas y creando actitudes de compromiso por el logro de los objetivos.

Bibliografía

Anido, M; Có, P.; del Sastre, M.; Medina, L.; Panella, E.(2000).Una Ingeniería didáctica diseñada alrededor del concepto de cónicas y Superficies. *Publicación del IX EMCI, Encuentro de docentes de Matemática en carreras de Ingeniería*. Concepción del Uruguay. Argentina.

Anido, M.& Rubio Scola, H. (1999). Un Ejemplo de Aprendizaje en el Sentido de Polya. *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa ,3,* México.

Anido, M.& Simoniello, A.M. (1997). El Taller de docentes como estrategia de abordaje de un problema: la integración curricular del área Matemática de una Facultad de Ciencias Económicas. *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp 332-336. México.

Artigue, M.; Douday, R.; Moreno, I.; Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática,* pp34-56. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau,G. (1988). *Los diferentes roles del maestro*. U.Q.A.M. Buenos Aires. Argentina.

Chevallard, Y.; Bosch M.; Gascón, J. (1997). Estudiar Matemática. ICE-Horsori, pp213-225; 277-290.

Jonassen, D.H. (1995). Computers as in Cognitive Tools: Learning with Tecnology. Not from Technology. *Journal of Computing in Hhiger Education, 6 (2),* pp 40-73.

Polya, G. (1981) Matemática y Razonamiento Plausible. Ed. Tecnos: Madrid.