

EL CÁLCULO DE LA INTEGRAL INDEFINIDA Y LA EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

Olga Lidia Pérez González
Universidad de Camagüey, Cuba
olgapg@inf.redu.edu.cu, olguitapg@yahoo.com

Resumen

Tradicionalmente el cálculo de la integral indefinida constituye unos de los contenidos en el que los estudiantes presentan muchas dificultades, algunas de ellas están dadas pues el enfoque dado en las clases para calcular integrales hacen pensar en aprenderse “muchos” métodos sin existir un hilo conductor entre ellos, por otro lado los maestros por lo general llegan evalúan si sabe o no calcular estas integrales y en este sentido en la enseñanza de esta temática no se logra la unidad entre la lógica de la ciencia, la lógica de la asimilación y la lógica del contenido. El objetivo de este trabajo es discutir una propuesta didáctica para la enseñanza del cálculo de la integral indefinida, donde se asumen como referentes teóricos, el propiciar el desarrollo del pensamiento lógico de los alumnos, considerando como habilidades generalizadoras a lograr en esta unidad a la identificación del modelo del integrando y la clasificación de las técnicas para reexpresar el integrando y los métodos de integración, además se asume que la evaluación del aprendizaje, en la unidad de integrales indefinidas, no debe estar dirigida a valorar si el alumno domina cada método en específico, sino el proceso general para integrar, evaluando si se hacen diferencias entre las diferentes técnicas de reexpresión del integrando y las posibles formas de integrar, donde se debe insistir en las generalidades de las diferentes formas de integrar. En la primera sesión de trabajo se presentará una caracterización de los enfoques tradicionales de la integral indefinida en la literatura especializada y de las principales dificultades en la evaluación del aprendizaje de la Integral Indefinida. Se hará la propuesta del proceso general de Integración. En la segunda sesión de trabajo se presentará una propuesta didáctica para la enseñanza de la Integral Indefinida basada en el proceso general de integración, así como el sistema de tareas y las habilidades esenciales en la integral indefinida. En la tercera sesión de trabajo se presentará una propuesta didáctica sobre la evaluación del aprendizaje en la integral indefinida con un enfoque constructivista. Experiencias de su aplicación en la educación superior cubana.

Introducción

Tradicionalmente el cálculo integral constituye unos de los contenidos en los que los estudiantes presentan más dificultades para su aprendizaje y corresponde al maestro trabajar didácticamente dicho curso. En este trabajo se propone un nuevo enfoque en el contenido para la enseñanza del cálculo de la integral indefinida el que conduce a desarrollar una enseñanza más efectiva. Esta propuesta permite establecer estrategias didácticas que propician una mayor motivación y aprovechamiento de los alumnos, integrando elementos teóricos, disciplinarios metodológicos y técnicos en la enseñanza de esta ciencia, además brinda las herramientas necesarias para el diseño de estrategias y proyectos didácticos que posibiliten en el alumno el aprendizaje conceptual y significativo.

Desarrollo

Cuando el maestro tiene que enseñar a sus alumnos cómo calcular una integral indefinida se encuentra ante el dilema de que en los textos de matemáticas esta temática se expone desde diferentes puntos de vistas, no en su concepto ni en su interpretación geométrica ni en sus propiedades pero si se dan varios enfoques en los métodos analíticos que se proponen para su cálculo. Por ejemplo, hay autores que consideran a la sustitución y/o cambio de variables como un método de integración cuando este caso es realmente una de las técnicas que se utilizan para reexpresar el integrando a una función elemental de la cual se puede hallar su

primitiva, otro ejemplo es considerar la descomposición de funciones racionales en funciones racionales simples como un método de integración pues este es un caso similar al anterior. Es obvio que el maestro debe enseñar al alumno todas las variantes que se le pueden presentar teniendo en cuenta que uno de los objetivos educativos del cálculo integral es: que los alumnos desarrollen hábitos de proceder reflexivamente, de evaluar los resultados de su trabajo y utilización de diversa literatura, además de, contribuir a la capacidad de razonamiento, de pensar lógicamente y contribuir a la formación computacional de los estudiantes. Además se debe buscar una estrategia didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de manera tal que la evaluación del aprendizaje de los alumnos pueda deslindar las dificultades esenciales de este contenido, pues tradicionalmente estas dificultades están fundamentalmente en las técnicas para reexpresar el modelo del integrando y no en la aplicación de los diferentes métodos.

Inicialmente consideramos necesario que el maestro tenga presente que las habilidades esenciales que debe desarrollar en los estudiantes son las de *identificación* y la de *clasificación*, la de identificación dirigida a que el alumno ante una integral indefinida identifique cual es el modelo que tiene el integrando, para esto se le debe orientar al alumno que el integrando puede estar dado por una función del tipo: Elemental, $F(g(x))g(x)$, Racional, u.dv o con primitivas no elementales. Por tanto, al inicio de la unidad las tareas no deben estar dirigidas a calcular integrales, por el contrario el maestro debe dirigir la atención del alumno a que identifiquen el modelo del integrando, considerando que ya ha trabajado con las integrales inmediatas obteniéndolas como proceso de antiderivación. La habilidad de clasificación estará dirigida a que una vez identificado el integrando, clasifiquen que técnicas puede utilizar para reexpresar el mismo, las cuales pueden ser:

- Aplicar las propiedades de las integrales.
- Desarrollar y simplificar algebraicamente el integrando, utilizando:
 - Completamiento de cuadrados
 - Simplificación de fracciones
 - Descomponer fracciones racionales en fracciones simples.
 - Multiplicar y dividir por el conjugado pitagórico.
- Completamiento del diferencial.
- Sustitución y/o cambio de variables.

Luego los métodos de integración se pueden agrupar realmente en cuatro, ellos son: *uso de colección de integrales inmediatas*, *uso de las integrales inmediatas generalizadas*, *método de integración por partes* y *uso de las tablas de integrales*.

En consecuencia con lo anterior, se propone para la estructuración del contenido, trabajar con la base orientadora de las acciones (BOA) para el proceso general de integración, la cual se define como el conjunto de condiciones en las que realmente se apoya el alumno para ejecutar las acciones. Esta BOA contiene 4 pasos: Identificar las características del modelo del integrando, Reexpresión del integrando, Simplificar y por último Calcular la integral. Esta BOA se utiliza como orientación, para el cálculo, permitiéndole al alumno identificar el modelo del integrando, y clasificando de esta forma la vía a seguir para resolverla.

Para el cálculo de primitivas en las integrales indefinidas se propone un proceso general (Ver Anexo), esto permite que la evaluación no esté dirigida a valorar si se domina cada método en específico, sino el proceso general para integrar. Para lograr esto la unidad se diseñó utilizando el proceso general de integración, entonces, la evaluación estará dirigida a valorar si se hacen diferencias entre las diferentes técnicas de reexpresión del integrando y las posibles formas de integrar, donde se debe insistir en las generalidades de las diferentes formas de integrar. Por ejemplo, una de las técnicas de reexpresión del integrando es el cambio de variables. Aquí se debe valorar las operaciones que incluye esta acción, que son:

- Definir que sustitución se hará.
- Calcular el diferencial de la variable a sustituir, y por último,
- Sustituir la variable y el diferencial en la integral.

Y todo lo que queda por hacer para resolver dicha integral corresponde al 4to.paso del proceso general de integración y donde la solución general debe corresponderse con la variable inicial que se da, cuestión ésta que no está contenida en los pasos del método, sino en la autovaloración que el estudiante hace de la respuesta obtenida según el problema planteado.

De especial importancia consideramos, en esta propuesta didáctica, a la utilización del proceso general de integración propuesto anteriormente, ya que éste permite darle un enfoque sistémico a la unidad y es más fácil para el aprendizaje y la evaluación, pues el enfoque dado por muchos autores para calcular integrales hacen pensar en aprenderse “muchos” métodos sin existir un hilo conductor entre ellos y en este sentido se propone buscar la *unidad entre la lógica de la ciencia, de la asimilación y del contenido*. Se propone utilizar una tarjeta de estudio donde se refleje el proceso general de integración, orientando la evaluación del aprendizaje a que el estudiante valore el proceso general y que valoren el tratamiento que le dan otros autores, clasificando varios métodos. A partir de esto los estudiantes pueden hacer un trabajo de búsqueda donde tengan que valorar esta situación. El sistema de tarea que sugiere es el siguiente:

- Dada un grupo de integrales indefinidas:
Identificar el modelo del integrando, Identifique en cuál de ellas se puede reexpresar el integrando, aplicando las propiedades de la integral indefinida, Calcule, si utiliza las tablas de integrales especifique que fórmula utilizó.
- Dada un grupo de integrales indefinidas:
Identificar el modelo del integrando, Identifique en cuál de ellas se puede reexpresar el integrando utilizando completamiento de cuadrados, simplificación de fracciones, multiplicando y dividiendo por el conjugado pitagórico o descomponiendo fracciones racionales en fracciones simples, Calcule cada caso y si utiliza las tablas de integrales especifique que fórmula utilizó.
- Dada un grupo de integrales indefinidas.
Identifique las que tengan en el modelo del integrando una función de la forma $F(g(x))g'(x)$, Identifique, quién es $f(x)$ y quién $g(x)$, clasifique, la fórmula de las tablas de integrales inmediatas con la que se puede resolver, calcule.

Dada un grupo de integrales indefinidas.

Identifique las que tengan en el modelo del integrando una función de la forma $u \cdot dv$, Identifique, quién es u y quién es dv , Aplique la fórmula de integración por partes, Calcule, si utiliza las tablas de integrales especifique que fórmula utilizó.

Dada un grupo de integrales indefinidas, Identifique las que tengan en el modelo del integrando una función racional, Identifique si la fracción racional es propia o impropia, Descomponga la fracción racional en fracciones simples, Calcule la integral, si utiliza las tablas de integrales especifique que fórmula utilizó.

Dada un grupo de integrales indefinidas:

Identifique, en cuáles de ellas, es necesario hacer sustitución y/o cambio de variables, Qué sustitución o cambio de variables usted haría, Calcule la integral, si utiliza las tablas de integrales especifique que fórmula utilizó. .

Dada un grupo de integrales indefinidas:

Identifique, en cuáles de ellas, es necesario completar el diferencial para obtener una integral inmediata generalizada, Complete el diferencial, Calcule, si utiliza las tablas de integrales especifique que fórmula utilizó.

Dada un grupo de integrales indefinidas:

Identifique el modelo del integrando, Reexpresé el integrando, Integre, si utiliza las tablas de integrales especifique que fórmula utilizó.

Tareas con las características anteriores pero exigiendo la justificación de las acciones realizadas.

Dada un grupo de integrales indefinidas, Calcúlelas.

Las demás tareas estarán referidas a la resolución de problemas sobre diversas aplicaciones de la integral indefinida.

Observe como el sistema de tareas anterior va orientando el alumno tanto a las técnicas de reexpresar al integrando como a los métodos de integración. Con el mismo, es posible dirigir la evaluación, en las primeras clases prácticas y autoperación, a valorar el desarrollo práctico de cada una de las operaciones que involucran el proceso general de integración, donde el estudiante se enfrenta a este grupo de tareas con una tarjeta de estudio en la cual aparecen todos los elementos esenciales del proceso de integración y los modelos de las acciones a ejecutar, lo que permite valorar si se asimila la BOA dada a un nivel reproductivo. Posteriormente, la actividad se basa en un sistema de tareas con estas mismas características, pero dirigido fundamentalmente a ejercitar el razonamiento teórico, de forma que la acción se transforma de la lógica de la acción a la lógica del concepto, donde el estudiante pueda justificar lo que hizo y porqué lo hizo.

En algunas de estas tareas se orienta cada operación a desarrollar, y se pide en cada una de ellas las integrales que no se corresponden a las que se orientan resolver y darles solución, explicando el procedimiento seguido en cada caso. Otras están dirigidas directamente al cálculo de integrales, sin especificar en su enunciado las posibles acciones a realizar para su resolución. Obsérvese que en las tareas anteriormente descritas se destacan las acciones esenciales a desarrollar: identificación y clasificación. Por tanto, en el proceso de asimilación de este contenido, es importante valorar si el estudiante identifica el modelo del integrando y si clasifica la(s) técnica(s) para reexpresar el integrando, así como la fórmula para resolver la integral.

En este tema, por ser un tema básico fundamental dentro del cálculo integral y de la disciplina matemática, la evaluación parcial debe estar dirigida a las acciones esenciales: Identificación y clasificación y a la asimilación del proceso general de integración.

Conclusiones

Esta propuesta didáctica propicia que el estudiante sepa diferenciar entre las técnicas para reexpresar el integrando y el proceso de integrar, además, permite al profesor incidir realmente en los métodos de integración y poder valorar si los errores de sus estudiantes están precisamente en dichas técnicas y no en los métodos de integración. Se insiste en que se le debe orientar a los estudiantes, en las últimas clases de la unidad, que se haga un análisis comparativo y crítico del enfoque que dan varios autores clásicos a la integral indefinida y que ellos vean que realmente es lo mismo, sólo que muchos de ellos desglosan las técnicas de reexpresar el integrando como métodos, por ejemplo muchos autores llaman *método de sustitución* y *método de descomposición de fracciones racionales en fracciones simples*, cuando realmente estas son técnicas como se relaciona en el trabajo.

Bibliografía

- Blanco, R. (1997). La determinación de la Efectividad del uso de los ciclos temáticos. Cuba. Centro de Ediciones Electrónicas del MES.
- Pérez, O. L. (2000). La evaluación del aprendizaje como elemento del sistema de dirección del proceso de enseñanza aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas para ciencia técnicas. Universidad de Camagüey. Cuba. Tesis de Doctorado.
- Talízina N., F. (1992). La formación de la actividad cognoscitiva de los estudiantes. México. Ángeles.
- National council Teachers of Mathematics (NCTM) (1995). Assesment standards for school Mathematics.
- Blanco, R. (1997). Subsistema didáctico con carácter sistémico para la enseñanza de las matemáticas en Ciencias Técnicas fundamentado en la Teoría del conocimiento y la Teoría de la asimilación. Taller de doctorado. IV Conferencia Ciencias de la Educación. Universidad de Camagüey.
- Calderón, R. (1994). Perfeccionamiento de la enseñanza del cálculo integral en Ingeniería Mecánica. Informe de investigación. ISPJAE. Ciudad Habana.