

COMPRESIÓN DE LA APLICACIÓN DEL ÁLGEBRA DE MATRICES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ECONÓMICOS

Nelly Elizabeth González de Hernández
Universidad Central de Venezuela. Caracas, Venezuela
gonzalne@yahoo.com

Resumen

Si consideramos que el trabajo de un docente exige una preparación para cada clase, desarrollada bajo la premisa ¿entenderá el alumno si explico de esta manera...? esta experiencia significa para él, una investigación sobre la cual regresará tantas veces como oportunidades tenga para presentar nuevamente el tema.

En nuestra búsqueda del día a día nos hemos planteado una preocupación muy específica al pretender enseñar *Operaciones Algebraicas con Matrices*, donde los estudiantes rápidamente captan la secuencia lógica para realizar operaciones, pero en la que demuestran que prefieren los procesos repetitivos y cuando se les pide analizar la información, se confunden y ofrecen opiniones equivocadas.

El punto que nos ocupa en este trabajo es el título señalado anteriormente, *Operaciones Algebraicas con Matrices*, el cual forma parte del Tema I de la materia Matemática III en la carrera de Administración y Contaduría de la Universidad Central de Venezuela. Por la naturaleza de la formación que damos a nuestros estudiantes, la aplicación práctica de esta Unidad está dirigida a la resolución de problemas de índole económica estudiados en este nivel de la carrera, que suele ser el tercer semestre, de los diez que deben aprobar.

En este trabajo se explican algunas estrategias puestas en práctica con significativo éxito, después de una revisión del material bibliográfico recomendado hasta el momento y, posteriormente a ensayar las técnicas o métodos encontrados en dicho material y revisadas —en algunos casos modificadas— por nuestra experiencia.

Para realizar esta investigación se organizaron sesiones de trabajo teórico-práctico durante el primer y segundo semestre lectivo 2002. De cada sección (el promedio semestral es de 10 secciones, con 50 estudiantes cada una) se escogieron al azar 5 estudiantes, y se procedió a aplicar las estrategias de enseñanza que hemos diseñado para esta oportunidad.

Los resultados se han comunicado a los profesores que dictan la materia, con la finalidad de continuar mejorando las propuestas que son fruto de este estudio, así como esperamos tener la oportunidad de compartir esta experiencia con nuestros colegas latinoamericanos.

Introducción

El motivo que nos mueve a realizar la investigación en esta oportunidad, es la intención de averiguar si el uso de los conocimientos teóricos, adquiridos durante la explicación de cómo realizar operaciones de multiplicación de matrices, son eficientemente interpretados por los estudiantes, igualmente, si la aplicación de este conocimiento obedece a la comprensión total de la información que se desea transmitir en clase y no es una repetición automática de otras experiencias realizadas en el aula.

Considerando que no sólo es la actuación del profesor la que define cuáles son los métodos de trabajo que utilizará el alumno, sino que los textos recomendados dirigen con especial acentuación la forma cómo se enfrenta la resolución de problemas, hemos realizado una minuciosa búsqueda en los libros que se especializan en el tema de la matemática para economistas y administradores y de éstos, hemos hecho especial revisión en los que son más populares, por su aparición insistente en los programas de estudio de nuestras universidades

Objetivos de la investigación

Establecer estrategias de enseñanza que permitan realizar el proceso en el aula de una manera más eficiente.

Revisar los métodos de trabajo de los docentes de Matemática III en el campo del álgebra matricial

Revisar la bibliografía dirigida a las Escuelas de Administración y Contaduría sobre el tema de matrices y sus aplicaciones económicas

En las actividades de aula, los estudiantes enfrentan distintas estrategias de enseñanza que difieren en el grado de complejidad y en el volumen de la información contenida. Los alumnos se aproximan a ellas utilizando su capacidad e inteligencia en muchos casos, no para aprender sino para descubrir un patrón donde los datos son sustituidos y la solución aparece, no importa como. La anterior afirmación es una situación que con frecuencia se discute en reuniones docentes, donde se plantean que, en algunas oportunidades, los profesores en su esfuerzo de simplificar su explicación, presentan en detalle los pasos a seguir para resolver un ejercicio, sin dejar un esfuerzo de imaginación, abstracción y análisis al educando. Acostumbramos a los jóvenes a repetir sin convicción, a reproducir sin criticar, a calcar sin discernimiento. Como bien lo dice el refrán, de buenas intenciones...

Interesa comprobar con cuál experiencia se obtiene mejores resultados, revisando cuándo el conocimiento activo y la posibilidad de seleccionar y usar de manera flexibles estrategias para resolver problemas, favorecen un mejor aprendizaje.

Metodología utilizada

La ingeniería didáctica ha sido utilizada cumpliendo con los siguientes pasos: diseño de la actividad de aprendizaje, aplicación de la actividad, evaluación de resultados.

Diseño de la Actividad

Primer paso:

Definición teórica de la operación *multiplicación de matrices*.

Segundo paso:

Explicamos la operación: Dadas dos matrices $A_{m \times p}$ y $B_{p \times n}$ se define la multiplicación de $A \times B$ como una matriz $C_{m \times n}$ donde $c_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj}$.

Tercer paso:

Realizamos algunos ejercicios para comprobar cuando el producto de matrices es posible y verificamos que el producto de matrices no es conmutativo. Un modelo de estos ejercicios puede ser:

$$\text{Sea } A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } B_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular:

$$A \times B$$

$B \times A$

Las repuestas a estos ejercicios es:

Ejercicio 1: $A_{2 \times 3} \times B_{3 \times 4} = C_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 22 & -3 & 0 & 14 \\ 16 & 10 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

Ejercicio 2: $B_{3 \times 4} \times A_{2 \times 3}$ Esta multiplicación no se puede realizar porque el número de columnas de la matriz B es diferente al número de filas de la matriz A .

Otro tipo de ejercicios consistirían en proponer la multiplicación de dos matrices de la

forma siguiente: Sea $P_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $Q_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Calcular:

$P \times Q$

$Q \times P$

Los resultados serían:

Ejercicio 3: $P_{2 \times 2} \times Q_{2 \times 2} = R_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 19 & 32 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 4: $Q_{2 \times 2} \times P_{2 \times 2} = M_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 15 & 24 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$.

Observamos que en ambos casos es posible realizar el producto de matrices pero que

$\begin{bmatrix} 19 & 32 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 15 & 24 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$, es decir, $P \times Q \neq Q \times P$, en este caso.

Cuarto paso:

Una vez que los alumnos manejan con destreza las operaciones algebraicas con matrices, proponemos un problema como el siguiente:

Una empresa elabora 3 artículos (A, B, C) los cuales necesitan de 3 componentes (x, y, z) como materia prima en las proporciones siguientes: el producto A requiere 1 unidad de x , 4 de y y 2 de z . El producto B requiere 2 unidades de z y 5 unidad de x . El producto C necesita 3, 2, 6 unidades de y, z y x , respectivamente. Conocemos que la programación de la producción para las próximas 3 semanas es la siguiente: del producto A se fabricará 10, 20, 15 unidades, del producto B se fabricará 25 unidades en la semana 2 y 10 unidades en la semana 1, del producto C se elaborará 20 unidades en la semana 3. Determine la cantidad de materia prima que se requiere para elaborar cada producto durante las próximas 3 semanas.

Quinto paso:

A todos los grupos se les explicó de igual manera el como realizar operaciones de multiplicación de matrices pero al proponer la aplicación práctica se hizo la siguiente diferenciación. Al primer grupo (primer semestre 2002) se le explicó que al multiplicar los elementos que conforman las matrices, deberíamos revisar que las unidades que se operaban fuesen consistentes, esto es, si organizamos nuestros datos de la siguiente manera:

Componentes	Productos		
	A	B	C
X	1	5	6
Y	4	0	3
Z	2	2	2

Semana	Producto		
	A	B	C
1	10	10	0
2	20	25	0
3	15	0	20

Vamos a establecer que la matriz $E_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ y $G_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 20 & 25 & 0 \\ 15 & 0 & 20 \end{bmatrix}$

Y proponemos realizar la siguiente multiplicación $E_{3 \times 3} \times G_{3 \times 3}$

Verificamos que algebraicamente la operación se puede realizar porque el número de columnas de la matriz E es igual al número de filas de la matriz G y procedemos

$$E \times G = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 20 & 25 & 0 \\ 15 & 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \times 10) + (5 \times 20) + (6 \times 15) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Revisemos la operación que estamos efectuando:

$$1 \frac{\text{unidad } x}{\text{Producto } A} 10 \frac{\text{Producto } A}{\text{Semana } 1} + 5 \frac{\text{unidad } x}{\text{Producto } B} 20 \frac{\text{Producto } A}{\text{Semana } 2} + 6 \frac{\text{unidad } x}{\text{Producto } C} 15 \frac{\text{Producto } A}{\text{Semana } 3}$$

Estamos multiplicando necesidades de materia prima de un producto por las cantidades a elaborar de otro producto, es inconsistente.

Planteamos ahora la operación de la siguiente manera:

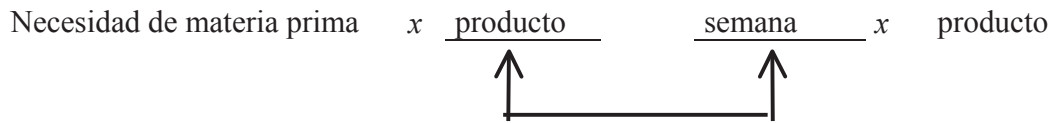
$$E \times G' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 10 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \times 10) + (5 \times 10) + (6 \times 0) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Revisemos la consistencia de las unidades:

$$1 \frac{\text{unidad } x}{\text{Producto } A} (10 \frac{\text{Producto } A}{\text{Semana } 1}) + 5 \frac{\text{unidad } x}{\text{Producto } B} (10 \frac{\text{Producto } B}{\text{Semana } 1}) + 6 \frac{\text{unidad } x}{\text{Producto } C} (0 \frac{\text{Producto } C}{\text{Semana } 1})$$

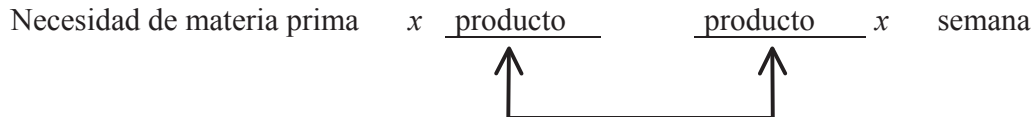
Este primer elemento nos indica la cantidad de materia prima x que debemos tener en existencia para fabricar los productos A, B y C durante la semana 1. Y así, sucesivamente, verificamos la consistencia de la operación que realizamos.

Un segundo grupo de estudiantes (del segundo semestre lectivo 2002) recibió igual información, pero se propone que, a semejanza de la descripción del orden de una matriz, debemos especificar el contenido de la información de la fila y la columna de cada matriz, de esta manera en el primer planteamiento $E \times G$, tendremos:



Al revisar que en la información contenida en la columna de la primera matriz, no coincide su descripción con el contenido del dato que está en la fila de la segunda matriz reconoceremos que el resultado de la multiplicación no es consistente

En el segundo planteamiento $E \times G'$, encontramos:



Observamos que la información contenida en la columnas de E y en las filas de G' es igual, en consecuencia el resultado será lógico y la matriz resultante contendrá en sus filas la información *necesidad de materia prima* y en sus columnas la información *semana*.

Observaciones al docente: notemos que a propósito hemos suministrado los datos del problema textualmente y en algunos casos desordenados, obligándolos a organizar sus datos en una tabla de doble entrada.

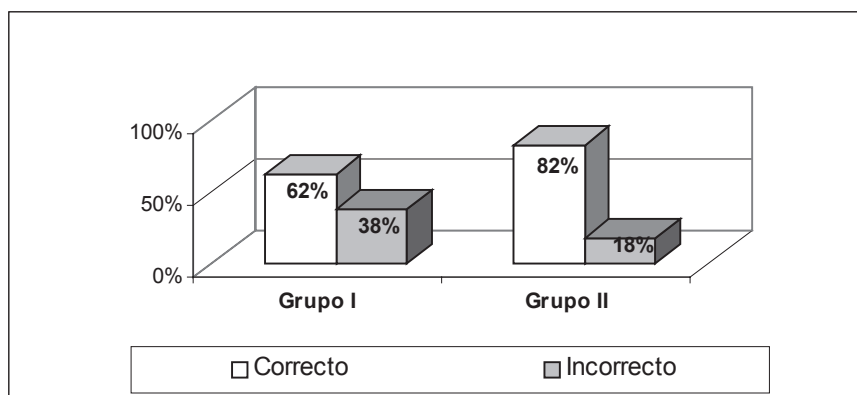
Aplicación de la actividad:

Se seleccionaron al azar 5 estudiantes de cada sección, para un total de 50 alumnos en cada grupo El primer grupo estuvo constituido por alumnos de matemática III del primer semestre lectivo del año 2002 y el segundo por los estudiantes del segundo semestre electivo.

Resultados de la experiencia.

El grupo de estudiantes invitados a escuchar las explicaciones que aquí hemos expuesto se mostraron interesados en participar en la experiencia, de allí que quizás el empeño en escuchar las clases estuvo estimulado por considerarse un grupo especial.

Nuestro interés en los resultados tenía dos propósitos. Por una parte, evaluar si el ejercicio resuelto indicaba los resultados correctos y por otra parte, revisar si la conclusión fue ejecutada correctamente porque efectivamente comprendió el análisis que tenía que hacer a las unidades que estaba multiplicando y no por casualidad. Los resultados son:



Lo llamativo es que, aparentemente, obtendríamos mejores resultados si utilizamos la estrategia que hemos empleado con el grupo II, sin embargo al interrogarlos sobre la interpretación del proceso, del 62% de estudiantes que resolvieron correctamente el ejercicio en el grupo I un 80% sabía con claridad porque había planteado las operaciones en la secuencia que lo hizo, vs. un 50% del grupo II, que lo hizo gracias al mecanismo aprendido y repetido.

Conclusión

Con este sencillo experimento lo que hemos querido demostrar, sin menospreciar el método que utilizamos para enseñar, es que no siempre la simplificación extrema nos lleva a cumplir completamente con nuestros objetivos lectivos. En muchas oportunidades es preferible dejar que el estudiante se detenga antes de emprender un proceso, de manera que analice, piense cuidadosa y analíticamente y responda con propiedad. La revisión permanente de nuestros métodos de enseñanza debe ser una rutina más en nuestro trabajo, la crítica constructiva nos ayudará a descubrir que procesos aparentemente exitosos, esconden debilidades que podemos, sencilla y afortunadamente, corregir.

En cuanto a los materiales de apoyo dirigidos a estas carreras, lamentablemente caen también en un facilismo que no nos ayuda en este proceso de evitar las “recetas”. Revisamos 15 textos citados con mayor insistencia en las bibliografías de las carreras de Economía y Administración de nuestras principales universidades y un 80% de estos libros incluye en sus ejemplos, ejercicios sencillos donde, sin explicar por qué, se resuelven sin mayor análisis, de manera que en los problemas propuestos se repita el mismo esquema.

Bibliografía

- Arends, R. (1994) *Learnig to teach*. Nueva York. Editorial Mc Graw Hill
Barriga, F. (1997). *Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo*. México. Editorial Mc Graw Hill
Cooper, J. (2000) *Estrategias de enseñanza*. México. Editorial Limusa
Sarabia, B. (1992). *El aprendizaje y la evaluación de las actitudes*. Madrid. Editorial Santillana
Woolfolk, A. (1990). *Psicología educativa*. México Editorial Prentice
Wittrock, M. (1989) *La investigación en la enseñanza España*. Editorial Piados