

## UN PROBLEMA MOTIVADOR PARA UN TRABAJO INTERDISCIPLINARIO EN MATEMÁTICA Y FÍSICA

Lina Oviedo, Ana Kanashiro, Gloria Alzugaray, Adriana Frausin  
UNL, UTN, Argentina  
[loviedo@fiquis.unl.edu.ar](mailto:loviedo@fiquis.unl.edu.ar); [akanashi@fiquis.unl.edu.ar](mailto:akanashi@fiquis.unl.edu.ar)

### Resumen

El trabajo interdisciplinario, cuando es posible, juega un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias en los tres niveles de la educación argentina. En la actualidad se ha revalorizado la planificación de las tareas de investigación y resolución de problemas (Gil,D.,et al., 1991), de modo que cuando se planifica una unidad didáctica se deben integrar los conocimientos científicos, didácticos y la experiencia práctica, y se deben tomar en cuenta la estructura cognitiva y las concepciones de los alumnos a quienes va dirigida.

Esta propuesta es un trabajo interdisciplinario entre la Matemática y la Física, que surge teniendo en cuenta dichas tendencias. Además no debe olvidarse que en un principio la Física se mostraba indistinguible de la Matemática y que los mayores avances matemáticos surgieron a partir de problemas relacionados con la Física.

La propuesta se enmarca en un proyecto de investigación que tiene como objetivos:

- Adoptar estrategias que permiten evaluar las actividades que los alumnos hacen en clase de Física, cuando resuelven problemas utilizando la herramienta matemática.
- Ver que uso hacen de la Matemática y de la Física los estudiantes de Ingeniería, cuando resuelven problemas de la Mecánica, contando con el apoyo de la herramienta informática.

El objetivo particular de este trabajo es:

- Obtener la expresión de la ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea a partir de un problema físico sencillo que involucra el movimiento oscilatorio.

### Fundamentos de la propuesta

Dentro de la perspectiva actual y puesto que la ciencia en sí puede entenderse como búsqueda de soluciones a los problemas que se nos plantean, se considera que la Resolución de Problemas constituye y desempeña un papel fundamental en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias, dirigido a producir aprendizaje significativo (Ausubel, et al., 1991) y promover un cambio en la manera de trabajo, considerando a la resolución de problemas como una actividad de apoyo y consolidación para el aprendizaje de los contenidos conceptuales. Actualmente, aunque se reconoce el papel fundamental de la elaboración puramente teórica de la matemática, el principal esfuerzo se desplaza hacia la aplicación de los métodos matemáticos para la solución de los problemas de las ciencias naturales y la tecnología. La propuesta es trabajar simultáneamente en Matemática y Física un mismo problema; esto es, a partir de una situación problemática física concreta se modela la situación matemática para estudiar el tema: Ecuaciones Diferenciales Lineales (E. D. L.) de segundo orden no homogénea y, a medida que vayan apareciendo nuevas nociones en Física ampliar el modelo matemático. Por otro lado sabemos que los alumnos no tienen los mismos objetivos que los docentes, ellos sienten que los temas desarrollados en el contexto académico no les resuelven los problemas en las asignaturas específicas de su carrera, por lo tanto, el compromiso del profesor es encontrar una afinidad entre lo que interesa al estudiante y el tema objeto de estudio para lograr un aprendizaje significativo.

## Introducción

En el presente trabajo se plantea un modelo físico concreto, que el alumno trabajará en el laboratorio de física y posteriormente con los resultados del mismo debe desarrollar el correspondiente modelo matemático en la clase de matemática.

El modelado constituye una cuestión fundamental en la física, el mismo entendido como el establecimiento de relaciones semánticas entre la teoría, los objetos y los fenómenos, es una herramienta básica en la explicación científica y es una cuestión fundamental en la resolución de problemas.

La matemática tiene un alto valor formativo porque desarrolla las capacidades de razonamiento lógico, simbolización, abstracción, rigor y precisión que caracterizan al pensamiento formal, además de permitir la codificación de la información.

Todo aprendizaje se transforma en significativo cuando no es arbitrario ni confuso sino que es pertinente y relacionado y cuando se logra que el alumno esté motivado para aprender, de manera que lo que aprende se transforma en funcional, es decir “le sirva para”.

La construcción de un concepto matemático no sólo debe permitirle arribar a una definición del mismo, sino también reconocer los tipos de problemas que dicho concepto le permite resolver, es decir buscar las limitaciones y alcance del mismo como modelo. En la práctica diaria esto, generalmente, no ocurre así, nuestros alumnos creen que resolver un problema es hacer las cuentas desconociendo que es gracias a la existencia de un modelo matemático adecuado que se puede resolver el problema mediante la cuenta.

El docente debe ayudar al estudiante a descubrir que la matemática dispone de los recursos necesarios para enfrentar un fenómeno o situación proveniente de cualquier campo del conocimiento, es decir permite construir un modelo matemático y para llevarlo a cabo debe realizarse una simplificación de la realidad y si bien la descripción del fenómeno es aproximada gracias a la utilización del aparato matemático, se puede describir y predecir un conjunto de hechos e incluso resultados de experiencias no realizada.

La enseñanza de la matemática debe proporcionar instrumentos para enfrentar fuera del aula a situaciones de resolución de problemas que pocas veces se presentarán en forma matemática, aunque para su resolución pueda ser conveniente poner en juego estrategias similares a las que se ponen en juego en las clases de matemática.

La matemática debe ser un conjunto de instrumentos que proporcionan un modo de enfrentarse a las situaciones desconocidas, un medio para comunicar y comunicarse con los demás y también, como no, una vía para disfrutar, ya sea con el proceso de resolución o con la obtención de soluciones, con la optimización de los procedimientos, con la visión o el manejo de formas geométricas o de cualquier otro modo. Efectivizar cualquiera de estas finalidades exige que los estudiantes adopten una disposición relativamente favorable, razón por la cual es tarea del docente hacerle comprender al alumno que la matemática no es algo abstracto que solo sirve para la escuela, sino que en el mundo en que vivimos siempre o casi siempre necesitamos de la misma.

Al describir un fenómeno en términos de un modelo matemático se pueden inferir conclusiones lógicas sobre el modelo que predice el comportamiento futuro del fenómeno y de ahí conjeturar los cambios que se pueden producir o las regularidades que se van a mantener.

## Metodología

La aplicación de una metodología que contribuya a que el pensamiento lateral se convierta en un hábito provocará que, tanto en la resolución de problemas ya sea de lápiz y papel como en el trabajo de experimentación en clase, confluyan varios elementos que son significativos para el aprendizaje de los conceptos involucrados en el tema oscilaciones. Por ejemplo la generación de procesos y procedimientos que determinen las cantidades, en la medición de las variables involucradas, así como el establecimiento de diferenciaciones y de las hipótesis necesarias para determinar las variables y la manera en la que intervienen en los fenómenos presentados al alumno, es insustituible la interacción con la experiencia, quien en distinto grado, aporta a una construcción cognoscitiva como el establecimiento de relaciones funcionales y causales, procesos de clasificación, de significación simbólica, de comparación con concepciones previas, etc.

## Desarrollo de la Propuesta

### Instancia I

Los objetivos de esta etapa son:

- \* Estudiar el comportamiento de los resortes sometidos a la acción de distintos cuerpos.
- \* Encontrar la relación existente entre la fuerza actuante y la elongación del mismo.

Desarrollo: se disponen de distintos resortes y distintas masas conocidas. La actividad consiste en colgar las masas de los distintos resortes y medir los estiramientos con las regla graduadas de los mismos, pudiéndose adicionar más de una masa por resorte.

Se les pedirá que con los datos obtenidos realicen:

- a- las gráficas de fuerza vs elongación
- b- la construcción de un dinamómetro

- Cuestiones a desarrollar por el docente:

1. Destacar la importancia, para la Mecánica, de las interacciones elásticas fundamentales.
2. Describir el movimiento oscilatorio armónico y su aplicación en el fenómeno de resonancia.
3. A través de preguntas poner en evidencia lo que el alumno “conoce” y lo que “desconoce” parcial o totalmente e introducir el concepto físico de vibraciones mecánicas.

- Cuestiones a desarrollar por el alumno:

1. Los alumnos deberán obtener conclusiones acerca del comportamiento de un resorte sometido a la acción de distintos pesos, acorde a lo obtenido experimentalmente.

### Instancia II

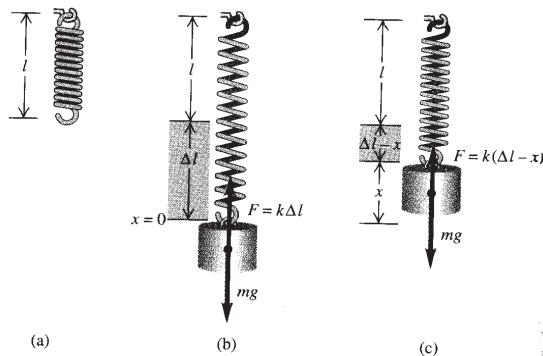
Los objetivos de esta etapa son:

- \* Comprender el fenómeno del movimiento oscilatorio armónico.
- \* Aprender a controlar variables.
- \* Realizar razonamientos de conservación.
- \* Determinar qué magnitudes físicas están involucradas en el problema.
- \* Encontrar la ley del movimiento.

### Modelo físico

La física, por la propia estructura del cuerpo de conocimientos que abarca, así como por la lógica de tratamiento de esos conocimientos, requiere para su comprensión y aprendizaje, trabajar con modelos y aplicar razonamiento hipotético deductivo.

El sistema físico adoptado será un resorte de longitud  $l$ , con una masa  $m$  ubicada en el extremo inferior se producirá un estiramiento  $\Delta l$  (fig b). Debido a este efecto la fuerza vertical  $k \Delta l$  iguala a la fuerza peso  $mg$



Sea  $x = 0$  la posición de equilibrio, con la dirección  $+x$  hacia arriba. Cuando el cuerpo está una distancia  $x$  por encima de su posición de equilibrio (fig. c) la extensión del resorte es  $\Delta l - x$ .

En el sistema masa-resorte pueden actuar fuerzas tales como:

- la de gravedad  $\mathbf{W}$
- la fuerza del resorte  $\mathbf{F}$  que actúa de manera tal de restaurar la posición del resorte y que supondremos obedece a la ley de Hooke
- el efecto de las fuerzas del fluido en el que está sumergido llamadas de amortiguación,  $\mathbf{F}_a$
- fuerzas periódicas en  $t$ ,  $\mathbf{F}(t)$  causadas por ejemplo, por el soporte que sujeta al resorte.

Las consignas a trabajar por los estudiantes se pueden sintetizar en:

- Comparar los resultados con los obtenidos analíticamente, analizando posibles discrepancias con el modelo teórico.
- Para cada, oscilador encontrar una ley del movimiento.

### Modelo matemático

Los conocimientos previos que los estudiantes deben tener para plantear el modelo son Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de segundo orden homogéneas, y Segunda Ley de Newton.

De acuerdo a la 2da. Ley de Newton fig. (c) se cumple para el sistema masa-resorte:

$$m\ddot{x} = W + F + F_a + F(t) \quad (1)$$

Donde

$\ddot{x}$  es la aceleración.

$W = -m \cdot g$ ,  $g$  constante gravitatoria

$F = k(\Delta l - x)$   $k$  positivo

$F_a = -\gamma \dot{x}$   $\gamma$  constante de amortiguación

Sustituyendo en (1)

$$m\ddot{x} = -mg + k(\Delta l - x(t)) - \gamma \dot{x}(t) + F(t)$$

$$m\ddot{x} = -mg + k(\Delta l) - kx(t) - \gamma \dot{x}(t) + F(t) \quad (2)$$

Por otro lado en la posición de equilibrio fig.(b)

$$W = m \cdot g = k \Delta l \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) se obtiene

$$m \cdot \ddot{x} + \gamma \dot{x} + kx = F(t)$$

que es una ecuación lineal de 2do. orden no homogénea.

### Instancia III

En esta instancia se enfrenta al alumno con situaciones que deberá resolver: Se le proponen distintas situaciones debiendo encontrar la ecuación correspondiente.

### Actividades para el alumno

1. Si  $\gamma=0$  y  $F(t)=0$  el movimiento se llama oscilatorio sin amortiguación y al valor  $\omega_0^2 = k/m$  se lo llama frecuencia angular natural. Se pide encontrar  $x(t)$ .
2. Si  $F(t)=0$  el movimiento se llama oscilatorio amortiguado siendo  $\omega' = (k/m - \gamma^2/4m^2)^{1/2}$  la frecuencia angular de la oscilación. Analizar los distintos casos que surgen a partir de los valores de la ecuación característica mediante gráficas  $x(t)$  vs.  $t$ , utilizando un software matemático y obtener conclusiones.
3. Si, por ejemplo,  $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$  el movimiento se llama oscilatorio forzado,  $F(t)$  recibe el nombre de fuerza impulsora. Nos proponemos analizar el comportamiento del sistema frente a esta nueva perturbación.

La actividad planteada es un problema motivador para introducir el tema E. D. L. de segundo orden, no homogénea. Los ítems 1 y 2 pueden ser resueltos sin dificultad, en cambio para resolver el ítem 3 se necesitan de nuevos conocimientos, los que deben ser desarrollados en la clase de Matemática.

Se puede seguir ampliando el modelo, a partir de lo trabajado hasta el momento introduciendo las nociones de resonancia y caos para el caso de osciladores no armónicos, como por ejemplo un péndulo magnético bajo la acción de tres imanes.

### Conclusiones

Las actividades propuestas permitirán a los estudiantes observar e investigar fenómenos reales con el objetivo de posibilitar aprendizajes significativos (Ausubel, op. cit), por eso es importante una planificación adecuada de las mismas acorde al contenido de las ciencias que se pretende enseñar y una buena selección de técnicas de procedimientos que los alumnos sean capaces de utilizar.

Tanto el planteamiento del problema como la solución aportada por los estudiantes estarán vinculadas con las intenciones didácticas de este trabajo, que corroboran la

urgente necesidad de brindar una enseñanza de las ciencias enfocada con profundidad y seriedad y que se pueden sintetizarse en:

- las ciencias pueden ayudar a los estudiantes a pensar de manera lógica sobre los hechos cotidianos y a resolver problemas prácticos sencillos.
- las ciencias y sus aplicaciones a la tecnología, son actividades socialmente útiles que esperamos se hagan familiares a los estudiantes y pueden mejorar la calidad de vida de las personas.

Las variables más importantes que se espera evidencien los estudiantes y que influyan en los resultados de la resolución de las situaciones problemáticas presentadas serán:

- a- la disponibilidad de conceptos y principios en la estructura cognoscitiva, pertinentes para los problemas particulares que se van presentando, y que se desarrollen interactivamente con los estudiantes.
- b- las características cognitivas y de personalidad como la agudeza, la capacidad de integración, el estilo cognitivo, la sensibilidad al problema, etc., que serán trabajados por los docentes.

La modelización de ciertas situaciones problemáticas son importantes para ver como los alumnos hacen uso de la herramienta matemática ante problemas físicos concretos.

No debe esperarse que el estudiante elabore conceptos y relaciones entre ellos por la sola realización de una actividad experimental o de lápiz y papel. El docente debe favorecer el cuestionamiento, facilitar la discusión y el trabajo en grupos, llegando a una construcción compartida del conocimiento.

Además de estos aspectos constructivos del aprendizaje de los conceptos científicos se encuentran implícitos los aspectos normativos que están principalmente en función de la coherencia en las descripciones y explicaciones. Para la actividad cognoscitiva no son suficientes los hábitos ni la experiencia adquirida en la resolución de problemas. Se requiere la habilidad de observar sistemáticamente, clasificar los objetos y sus propiedades, formular y contraponer los conocimientos, construir las conclusiones y comprobarlas, utilizar los conocimientos de unos objetos para el estudio de otros, etc.

## Bibliografía

- Ausubel, D., Novak, J y Hanesian, H. (1991) *Psicología Educativa, un punto de vista cognitivo*. 5ta. Reimpresión, Trillas. México.
- Bosch, M., Gascón, J. (1994) *La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas*. Enseñanza de las Ciencias- Volumen 12 (3), 314-332. Barcelona. España.
- Boyce- Di Prima- Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. Limusa S.A.-México.
- Chevallard, Y., Bosch, M, Gascón, J. (1997) *Estudiar Matemáticas- El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Ice Horsori- Universitat de Barcelona- España.
- Gil, D., Carrascosa, J., Furió, C y Martínez-Torregrosa, J. (1991) *La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria*. Barcelona:ICE, Universidad de Barcelona.
- Giussani, L. (1986). *Educación es un riesgo*. Ediciones Encuentro. Madrid. España.
- Harlen, W. (1985) *Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*. Morata S.A. Madrid.
- Pozo, J.I (1998) *Aprender y Enseñar Ciencia* Ediciones Morata. Madrid España.
- Sears- Zemansky- 1996- Física Universitaria- Pearson Educación- México.
- Simmons- 1991- Ecuaciones Diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas- Mc Graw- Hill, Inc.- España.