GENERACIÓN DE MODELOS DE ENSEÑANZA–APRENDIZAJE EN ÁLGEBRA LINEAL

Eduardo Miranda Montoya
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente (ITESO): México
emiranda@iteso.mx

Resumen

Dos de las dificultades más importantes y frecuentes que encontramos en el aprendizaje del álgebra lineal, tenemos la conceptualización y la formalización. Los contenidos de la materia son, en gran medida, formulados a partir de la definición de vectores, espacios vectoriales, bases, transformaciones lineales, etc. En los primeros capítulos de un curso de álgebra lineal, es frecuente acudir a la visualización geométrica en R^2 y R^3 como ayuda pedagógica para ilustrar las representaciones vectoriales y sus operaciones. Pero esto no siempre es así, la noción "visual" de otros conceptos, su enseñanza parte solamente de la definición formal la cual frecuentemente carece de alguna "justificación plausible" del porqué es así. Ejemplos de ellos son las definiciones de espacios vectoriales o de espacios con producto interno. Algunas investigaciones en torno a las dificultades en el aprendizaje del álgebra lineal comienzan con la descripción de tres tipos de lenguaje (geométrico, aritmético y algebraico) que se maneja en el álgebra lineal. En estas investigaciones, las dificultades en el aprendizaje tienen entre otros orígenes, la falta de articulación entre estos lenguajes.

Introducción. Problemas asociados con la enseñanza del Álgebra Lineal

Entre las dificultades más importantes y frecuentes (más no las únicas) que encontramos en el aprendizaje del álgebra lineal, son la conceptualización y la formalización, puesto que los contenidos de la materia son, en gran medida, formulados a partir de la conceptualización de entes tales como vectores, espacios vectoriales, bases, transformaciones lineales. Uno de los conceptos importantes de un curso de álgebra lineal, en Ingeniería, es la noción de un vector junto con la de espacio vectorial. Tanto en la práctica cotidiana de un profesor como en los libros de texto, con frecuencia se motiva la enseñanza de estos conceptos a partir de ilustraciones geométricas en R^2 y de R^3 de las representaciones vectoriales y sus operaciones. Pero esta manera de ilustrar un concepto no siempre es posible, por ejemplo en el caso de los espacios vectoriales, la representación geométrica no es muy plausible (Sierpinska, 1996), en estos casos la noción "visual" de ese concepto está ausente, ya que su enseñanza parte solamente de la definición formal. Esta falta de conceptualización en el álgebra lineal puede ser motivo de que un estudiante tenga dificultades para "traducir correctamente" los enunciados, es frecuente observar que muchos estudiantes no logran entender qué es lo que se pide en un problema de álgebra lineal (Sierpinska, 1996). Un ejemplo de esto es lo siguiente:

En el semestre Ene–May de 2002, a un grupo de 23 alumnos de Ingeniería del ITESO, se le pide lo siguiente -después de que se les enseñó lo que es un vector en R^2 o en R^3, las operaciones de suma, resta y multiplicación por escalar- *¿Es posible encontrar los valores de x & w de manera que se cumpla la igualdad* $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$, *donde* $\mathbf{u} = (-2, x)$, $\mathbf{v} = (w, 3)$ *y* $\mathbf{w} = (-1, 4)$*?*

Después de la lectura del problema (en unos 4 minutos) solo dos estudiantes escriben la solución correcta del problema en su cuaderno y los demás comentan que no saben qué es lo que se quiere encontrar. Al cabo de unos minutos, se les da la sugerencia de

sustituir **u, v y w** como (-2, x) + (w, 3) = (-1, 4), para después sumar y obtener (-2 + w, x + 3) = (-1,4)
Uno de los alumnos pregunta en voz alta: "*¿Hay que igualar las componentes de cada vector?*"
Otros preguntan: "*¿Cuáles componentes*?"

Lenguajes y representaciones en el álgebra lineal

Entre las dificultades que un estudiante enfrenta para aprender conceptos del álgebra lineal están la variedad de lenguajes y representaciones semióticas con los que se estudian sus objetos. Hillel (1994) distingue tres tipos básicos de lenguajes usados en el álgebra lineal que son: *lenguaje abstracto* (correspondiente a la teoría general abstracta del álgebra lineal, *el lenguaje algebraico* de R^n y el *lenguaje geométrico* de R^2 y R^3. Para Sierpinska (1996) en el álgebra lineal hay tres tipos de lenguaje: *Lenguaje geométrico*: el que se usa para ilustrar las representaciones y propiedades de los vectores en R^2 y R^3; *Lenguaje aritmético*: usado para describir las operaciones entre matrices, soluciones de ecuaciones, etc. y *Lenguaje algebraico*: usado para formalizar y simbolizar entes como espacios vectoriales y transformaciones lineales. La autora reporta que algunas de las dificultades en el aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal tienen que ver con la falta de una práctica instruccional que articule estos lenguajes. La desarticulación puede deberse a los contenidos propician la coexistencia de esos lenguajes como modos de pensamiento que algunas veces son intercambiables pero que nos son equivalentes.

Esto es, a modo de ejemplo, la visualización geométrica puede ayudar a un estudiante a interpretar un problema usando el lenguaje geométrico, sin que eso implique que pueda pasar del lenguaje geométrico al lenguaje algebraico para resolver completamente un problema. Un ejemplo de esos, lo encontramos en la solución del siguiente problema (aplicado en un examen del mismo grupo referido anteriormente):

"Determine si el conjunto $M = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ es o no subespacio vectorial de R^2 Haga un dibujo del conjunto M que le ayude a obtener la respuesta"

En las respuestas del grupo se encontró que 17 de los 23 estudiantes si graficaron el círculo correspondiente. Y de esos 17 alumnos, 11 escribieron respuestas similares a la siguiente:

"*Como el origen (0,0) está dentro del círculo, entonces M si es subespacio vectorial*"

Cuatro, de ellos, se aprendieron de memoria las propiedades que debe satisfacer un subespacio vectorial y escribieron algo similar a lo siguiente: " *si $U = (x,y)$ y $V = (z, w)$ entonces $U + V = (x+z, y+w)$; y si k es un escalar $kU = (kx, ky)$, por lo tanto si es un subespacio vectorial*"

Uno de los estudiantes restantes escribió: "*Si $U = x^2 + y^2 \leq 1$ y $V = x^2 + y^2 \leq 1$ entonces $U + V = 2x^2 + 2y^2$, entonces M si es subespacio vectorial*"

Y el último escribió: "*Si $U = (1,0)$ y $V = (0,1)$ entonces $U + V = (1,1)$ y $1^2 + 1^2$ no es ≤ 1 por tanto U + V no pertenece a M, entonces M no es subespacio vectorial*"

Como se puede apreciar, en todas las respuestas, excepto, quizá la última (ya que puede suceder que esta persona tuviera la gráfica en su mente y de ahí dedujera su respuesta), que el lenguaje geométrico y el algebraico están desarticulados en la mente de los entrevistados.

La propuesta didáctica

En la actualidad, algunas de las propuestas didácticas en la enseñanza del álgebra lineal sugieren la implementación de experiencias o prácticas pedagógicas en las que el aprendizaje se da en forma dialéctica empezando por las experiencias geométricas para después seguir con el lenguaje aritmético y llegar al lenguaje algebraico, todo esto en forma articulada. Podemos ver este tipo de acercamientos didácticos en los trabajos de Rogalski (1996), quien centra su estudio en la articulación de las representaciones cartesianas y las representaciones paramétricas de subespacios vectoriales o también, Sierpinska (1999), en cuyo trabajo se explora al enseñanza del álgebra lineal mediante el diseño de situaciones de enseñanza en un ambiente de geometría dinámica usado Cabri con la finalidad de representar vectores en R^2 y sus transformaciones

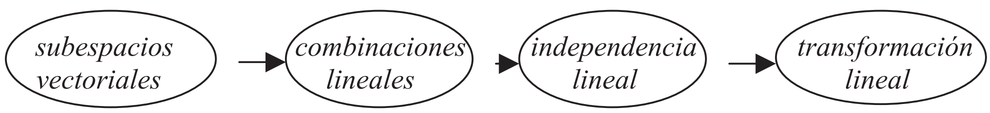
En este trabajo, se propone obtener algunos modelos de enseñanza - aprendizaje del álgebra lineal siguiendo las tres fases siguientes: (a) La adquisición de conceptos por medio de modelos geométricos de espacios y subespacios vectoriales: (b) La redefinición de esos modelos vistos en R, R^2 y R^3 al espacio R^n y (c) La generalización a espacios vectoriales más abstractos. Para llevar a cabo las tres fases, requerimos primero de hacer un análisis de cada uno de los temas en cuanto al diseño de experiencias de enseñanza – aprendizaje. En cada una de estas etapas, usamos partes de la metodología propuesta por el Dr. Ed Dubinsky (Asiala et al**:** 1996) para obtener una descomposición genética de algún tema matemático a enseñar.

Exploración de algunos conceptos del Álgebra Lineal (Transformaciones lineales)

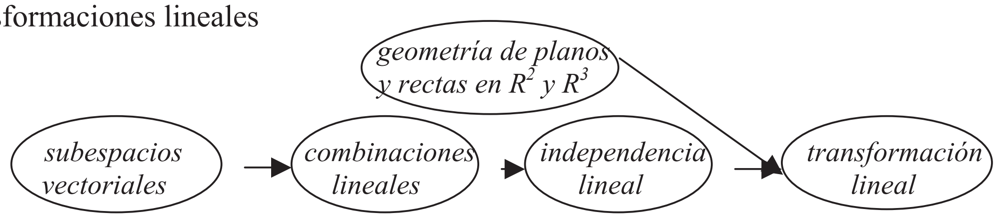
Un ejemplo donde aparecen imbricados los tres lenguajes del álgebra lineal, descritos al principio de este trabajo, son las transformaciones lineales. Para este concepto se han estado reuniendo datos empíricos, desde el semestre Ene– May de 2002, para determinar un modelo de enseñanza que nos lleve a un diseño de instrucción adecuado en el curso de Álgebra lineal para Ingenieria del ITESO.

Se ha elegido de inicio este concepto debido a que posee una gran riqueza de contenidos, en los que se pueden articular los lenguajes geométrico, algebraico y aritmético. En ese semestre se realizó una entrevista a cada uno de cinco estudiantes elegidos al azar de un grupo donde normalmente había personas de varias carreras. Esto se hizo después de que en su grupo habían visto la definición de transformación lineal así como algunos argumentos geométricos que muestran la acciones de las transformaciones lineales sobre figuras geométricas.

La clase sobre transformaciones lineales se diseño mediante un análisis preliminar del concepto determinado por las creencias del profesor (y de los textos) acerca de las conceptos matemáticos que un estudiante debe dominar previamente de modo que pueda llegar a entender el concepto de transformaciones lineales revela un esquema de enseñanza siguiendo el siguiente camino



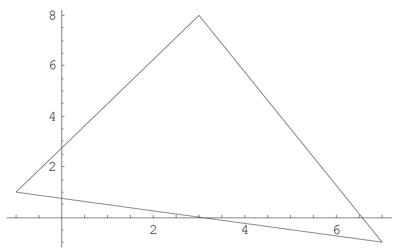
A este camino se le añadió el tema de geometría de rectas y planos en R^2 y R^3, como un concepto que el estudiante debe recuperar para visualizar las acciones de las transformaciones lineales

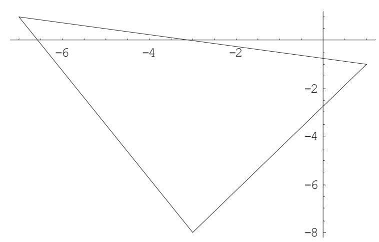


Para ilustrar y manipular el poder geométrico de las transformaciones lineales se presentó el siguiente extracto de una práctica computacional, diseñado con la finalidad de que un estudiante manipule y ejercite acciones sobre fórmulas de transformaciones lineales sencillas

Consideremos un triángulo con vértices en los puntos (1,1), (7,-1), (3,8). Al tiempo supongamos transformaciones definidas por T: R^2 -> R^2: T(x,y)= (2x,3y);T(x,y)= (-x,-y) y T(x,y)= (-y,-x) ¿Cuál es el efecto de estas transformaciones sobre el triángulo anterior?

Este problema se debería contestar primero con cálculos manuales para después "enseñarle a la computadora" cómo debería hacer los cálculos. Este planteamiento, se respondió con la ejecución del un código correspondiente en Mathematica.





La visualización de estas figuras condujo a respuestas por parte de los estudiantes referentes al efecto de las transformaciones dadas como las siguientes: "*el triángulo giró en forma simétrica sobre el eje de las x*"
O bien: "*la figura giró* 270^0"
Del mismo modo, la visualización indujo respuestas para las otras transformaciones como: "*la transformación T(x,y) = (2x, 3y) hace crecer los lados horizontales el doble y el triple para los lados verticales*"
Algunos estudiantes intuyeron que si la transformación tuviera coeficientes como ½ o 1/3 entonces los lados se reducirían a la mitad o a la tercera parte.
Por lo que toca a la parte aritmético – analítica del concepto, se formularon los problemas:

1. *Dada la transformación $T:R^2 \rightarrow R^2$ definida como T(x-y, x+y) calcula: T(1,2), T(-1,2), T(3,2) , T(-2,2)*
2. *Demuestra que la transformación anterior es lineal*

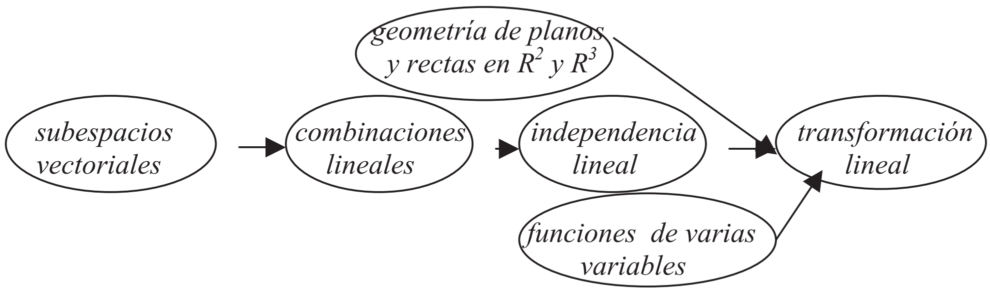
Los resultados entregados, denotan un cierto dominio de la sustitución de valores numéricos en una transformación, lo cual se refleja también en la escritura del código

de Mathematica mostrado a los estudiantes. Pero se encontró que esto no fue suficiente para llegar a formalizar una prueba de la linealidad de una transformación. En sus escritos había respuestas como las siguientes:
a) *T(u+ v) = u-v + u + v = 2u*
b) *T(u + v) = (u-v,u+v)*
c) *T(cu) = cu-cu = 0*
d) *T(cu) = (cu-v, cu + v)*
Y en cuatro (de los cinco entrevistados) se concluían cosas, como las siguientes:
a) *Como T(x,y) = (x-y, x+y), T transforma rectas en rectas, por lo que T si es transformación lineal*
b) *Si aplicáramos la transformación a una recta se transformaría en otra recta, por lo que si es transformación lineal.*
Lo anterior refleja, otra vez, la desconexión entre la parte geométrica y la parte analítica del concepto. En la entrevista, se determinó que uno de los problemas asociados a la demostración reside en que en realidad se debe considerar a un vector y a la expresión de T como funciones de varias variables
El problema es que el estudiante sabe que para demostrar la relación T(u + v) = T(u) + T(v) tiene que sustituir variables en la expresión dada para T, pero lo hace como si fuera una sola variable, lo cual vemos en el siguiente extracto: (E es el entrevistador y A es el alumno)

E: *A ver, si la transformación es T(x, y) = (x-y, x+y) ¿cómo es que determinas que T(u+ v) = u-v + u + v = 2u?*
A: *Bueno tengo que demostrar que T(u+v) = T(u) + T(v), entonces sustituyo u y v en vez de x & y como si fuera una función y me queda T(u+ v) = u-v + u + v = 2u*
E: *Pero ¿eso es T(u) + T(v)?*
A: *Si porque T(u) = u – y + u + y = u y también T(v) = v –y + v + y = v*
E: *Pero entonces te resultaría que T(u) + T(v) = u + v y antes dijiste que T(u+v) = 2u*
A: *Si...pero... si es transformación lineal pues en las gráficas se ve que se transforman rectas en rectas*
E: *Si lo visualizas así pues si es cierto, pero hay que demostrarlo analíticamente*
A: *¿Qué no es como lo hice?*
E: *No*
A: *Entonces no entiendo, porque hay que sustituir en la fórmula de T a u y v y....*
E: *A ver hazlo*
A: *T(u + v) = (u-v.......no se... me sale lo mismo*

Otro de los estudiantes entrevistados hizo respuestas similares, y los otros tres no respondieron al problema, pues mencionaron que no tenían idea de cómo hacerlo.
Lo anterior nos hace ver que a pesar de que las personas entrevistadas pueden hacer sustituciones numéricas en la expresión algebraica de T, pero estas personas no han podido hacerse a la idea de que los vectores u y v deben ser vistos como funciones de dos variables que deben ser sustituidos en la expresión de T y manejar esta como una función de varias variables.

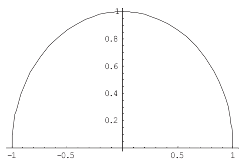
Estos datos nos sugieren modificar el modelo de enseñanza adoptado inicialmente para añadirle un concepto matemático más (necesario para aprender transformaciones lineales), la de función de varias variables. En donde se debería ver a estas funciones al menos al nivel de descripción de éstas y la sustitución de variables, para evaluar puntos o para "mirar" cómo se transforma una figura bajo una función de varias variables.



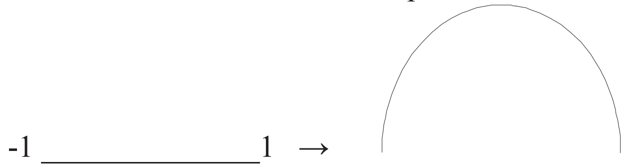
En el semestre Ago–Dic de 2002 se implementaron estas mismas prácticas computacionales y con lo sugerido por los resultados anteriores, se añadió (en forma experimental) a la clase de transformaciones lineales, un apartado para describir funciones de varias variables y algunas formas de graficar puntos o regiones solo en forma operativa

Del mismo modo se buscó introducir el concepto de transformación desde las funciones de una variable, donde se puede considerar que un segmento de recta (que será el dominio de la función) es transformado, por la acción de la función en otros objeto geométrico.

Así, por ejemplo: la función f: [-1,1] →[0, 1] dada por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ tiene como gráfica a:



Esta misma función podemos considerarla como la transformación del segmento [-1, 1] en el arco de circunferencia referido, lo cual se podría visualizar como:



Desde este punto de partida, se esperaba que ya no fuera extraño, para un estudiante, presentar objetos en dos o tres dimensiones y mirar como se transforman bajo una función de varias variables en dos planos o espacios tridimensionales.

Cuando, en el transcurso del semestre, se llegó al tema de trasformaciones lineales, se aplicaron las mismas prácticas computacionales, comentadas más los puntos adicionados al programa de estudio.

En esta ocasión, se eligieron al azar 10 exámenes, sin importar la calificación obtenida. De estos exámenes, uno de los problemas a evaluar es precisamente la verificación de las propiedades de una transformación dada. La transformación del examen se definió como sigue:

Demuestra que $T: R^3 \rightarrow R^3$*, definida como* $T(x,y,z) = (3x+2y + 4z, 2x + 2z, 9x + 2y + 3z)$ *es una transformación lineal*

De los 10 exámenes elegidos, 7 obtuvieron resultados correctos, 3 ni siquiera hicieron anotación alguna. Se entrevistó solamente a los estudiantes que no respondieron ese problema, pero el denominador común es que no habían asistido a clases, ni habían hecho las tareas, por lo que su respuesta común es que no tenían ni idea de cómo hacer la demostración. Con los otros estudiantes no hubo oportunidad de hablar con ellos, debido a problemas de tiempo. De cualquier manera, los resultados obtenidos dan pie a sugerir una implementación de esta práctica educativa a más grupos, esperando obtener resultados similares con la mayoría de estudiantes. Pudiera ser que en el modelo de enseñanza hubiera variaciones de acuerdo a cada grupo en particular, pero lo que importaría a largo plazo es obtener un modelo cuyas componentes permanezcan invariantes a lo largo del tiempo, de modo que el modelo de enseñanza de las transformaciones lineales llegue a estabilizarse y ser la guía general par a el diseño de prácticas educativas.

A modo de conclusión

Habrá, desde luego, más experimentaciones, pero sobre todo la búsqueda de más modelos de enseñanza. En especial, el próximo a estudiar será uno correspondiente al tema de subespacios vectoriales, donde las demostraciones, al parecer también tienen que ver con el conflicto del manejo de funciones de varias variables.

Bibliografía

Asiala M, Devries, Brown A, Dubinsky E, Mathews D, Thomas K. (1996) A framework for research and development in undergraduate mathematics education, *Research in Collegiate Mathematics Education II*, pág. 1-32

Hillel J, Sierpinska A. (1994) On One Persistent Mistake in Linear Algebra, in The Proceedings PME 18, Universidad de Lisboa, Portugal, pág: 65–72.

Rogalski M. (1996) Teaching Linear Algebra: Role and Nature of Knowledge in Logic and Set Theory which Deal with Some Linear Problems, *Proceedings PME 20*, Universidad de Valencia España, Vol. 4, 211–218.

Sierpinska A, Trgalova J., Hillel J., Dreyfus T., (1999) Teaching and Learning Linear Algebra with Cabri. Research Forum paper, *Proceedings del PME 23*, Haifa University, Israel, Vol 1, 119–134.

Sierpinska A. (1996) Problems related to the design of the teaching and learning process in linear álgebra, *Research Conference in Collegiate Mathematics Education*, Central Michigan University.