Ecuaciones diferenciales con aplicaciones

Víctor Martínez Luaces
Facultad de Química. DEQUIFIM. Universidad de la República. Montevideo. Uruguay
victor@bilbo.edu.uy victor@eiffel.fing.edu.uy

Resumen
El presente trabajo tiene relación directa con el curso corto denominado "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones", que fuera dictado en la XV RELME. Se comienza por exponer el fundamento teórico de dicho curso, así como las ideas que estuvieron presentes en el diseño y puesta a punto del mismo. A modo de ejemplo, se presentan algunos de los problemas tratados y su modelación matemática. Por otra parte, se comentan las dificultades inherentes a la resolución de dichos problemas, tanto para los docentes que asistieron al minicurso, como para los alumnos de las carreras de Ingeniería Química y de Ingeniería de Alimentos de la Universidad de la República en Montevideo, Uruguay. Basándose en los resultados anteriores, se plantean algunas conclusiones para cursos de Matemática en los que el modelado juega un rol fundamental.

Introducción

Si comenzamos por un estudio desde una perspectiva histórica, resulta que la enseñanza de la Matemática como asignatura de servicio (o simplemente la Matemática para no matemáticos), ha sido tema de interés y de preocupación desde hace muchos años. Por ejemplo, el famoso matemático francés Joseph Fourier escribió una carta con sus ideas sobre como debía enseñarse la Matemática a los ingenieros (Langinis, 1981). Muchos años más tarde, en 1911, la ICMI[1] decidió organizar un congreso internacional sobre el tema, que finalmente tuvo lugar al año siguiente. Más recientemente, ICMI resolvió crear un grupo de estudio, al más alto nivel internacional, dedicado especialmente a la Matemática como asignatura de servicio. De este emprendimiento surgieron varios trabajos, en particular se podría destacar la publicación realizada por la propia ICMI en L´Enseignement Mathematique (ICMI, 1986).
El tema ha sido tratado reiteradamente en eventos internacionales, como la VIII ICME[2], realizada en Sevilla en 1996 (Muller et al., 1996) o el Study Group on the teaching and learning of Mathematics at university level, que tuvo lugar en Singapur en 1998 (Bourguignon et al., 1999).
Uno de los puntos fundamentales en este tipo de cursos es el tema de la motivación. En efecto, a un estudiante de Química, de Economía o de Ingeniería, no lo motiva demasiado un teorema de existencia y unicidad, o ver que sucede si se debilita tal o cual hipótesis en un teorema intrincado, etc., sino que la motivación surge de ejemplos y aplicaciones que tengan que ver con la carrera que dicho estudiante eligió.
Así por ejemplo, en un trabajo realizado con un grupo de expertos, casi todos los entrevistados destacaron el papel insustituible que tiene la resolución de problemas de la vida real en la formación de este tipo de estudiantes (Martínez Luaces, V. y Casella, S., 1996). Como contraparte, desde el punto de vista de los alumnos, se llegó a conclusiones esencialmente similares. Efectivamente, el análisis de las evaluaciones docentes, en que los alumnos expresan sus opiniones de manera anónima sobre los profesores, los cursos, las evaluaciones, etc., permitió constatar que existe una muy alta correlación entre la motivación y la presentación por parte del docente de ejemplos que relacionen la

[1] International Comitee in Mathematical Instruction
[2] International Congress in Mathematical Education

Matemática con otras asignaturas de la carrera y con los problemas de la vida real y profesional (Martínez Luaces, V., 1998).
En este contexto, las Ecuaciones Diferenciales, tanto si son Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.) o Ecuaciones en Derivadas Parciales (E.D.P.), juegan un papel fundamental ya que son uno de los tópicos de mayor aplicación en el modelado de problemas reales en las más diversas disciplinas. En particular, esto es lo que sucede en Ingeniería Química, Ingeniería de Alimentos y en Ingeniería Ambiental, que son las tres ramas en que se desarrolló el trabajo que dio origen a este minicurso. En efecto, el mismo recoge problemas que han sido planteados a los estudiantes de las facultades de Química y de Ingeniería y que fueron agrupados en Problemas de Aplicaciones de E.D.O. (Martínez Luaces, V., 2000a) y Problemas de Aplicaciones de E.D.P. (Martínez Luaces, V., 2000b). Algunos de esos problemas fueron y son utilizados regularmente en cursos de grado, mientras que otros por su mayor dificultad o especificidad, se plantean en los postgrados.

Desarrollo

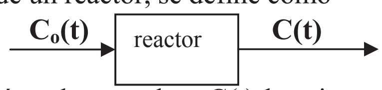
Los problemas de Cinética Química (reacción unimolecular de primer orden, mutarrotación de la Glucosa, reacción en dos etapas con una especie intermedia, etc.) resultan, luego de ser modelados adecuadamente, un excelente medio para presentar distintos tipos de E.D.O. (y sistemas de E.D.O.), lineales y no lineales. También permiten tratar problemas de tipo cualitativo, es decir, estabilidad de soluciones, diagramas de fases, etc.
En tal sentido, es interesante observar la correlación que existe entre ciertas cuestiones químicas y las preguntas que se pueden formular vinculadas con la estabilidad. De igual modo se pueden sacar conclusiones químicas y matemáticas, que plantean importantes relaciones entre ellas (Martínez Luaces, 1997).
Otro tipo de problemas que tienen menos pre-requisitos no matemáticos y que conducen a situaciones similares, con idéntica resolución, son los problemas de mezclas y tanques. Veremos luego, en la próxima sección un ejemplo de este tipo de problema.
Tanto los problemas de Cinética Química como los de mezclas, en versiones sencillas (bastante más simplificadas que las que tratadas en este curso), aparecen incluso en textos de Matemática. En efecto, hay problemas sencillos de Cinética Química en textos clásicos (Courant y John, 1978) y más frecuentemente en otros más modernos (Martín, 1984). También suelen aparecer algunos problemas de mezclas y tanques en ciertos textos de uso bastante difundido (Zill, 1997).
Otro posible enfoque, consiste en utilizar la Transformada de Laplace para resolver E.D.O. o sistemas de E.D.O. Como caso particular, si se utiliza esta herramienta en problemas de mezclas con tanques, se llega al concepto fundamental de Función de Transferencia. De este modo se ingresa, casi sin pre-requisitos, a otro tipo de problemas fundamentales en ciertas ramas de la Ingeniería, como lo son los problemas de Diseño de Reactores. Luego veremos esto en detalle con algunos ejemplos concretos.
También en este contexto es posible formular problemas que lleven a la utilización de un tipo especial de operación: la Convolución. Más aún, es posible darle al mismo un contexto aplicado y motivador.
A diferencia de los problemas del módulo anterior (i.e., los de Cinética Química o los de Mezclas), estos no se encuentran en textos de Matemática, sino en textos de Ingeniería Química (Westerterp et al., 1984) o en recopilaciones específicas como la mencionada en la introducción (Martínez Luaces, 2000a).

Pasando ahora a las E.D.P., es bastante conocido el problema de la conducción del calor en una barra finita y su resolución por Separación de Variables y Series de Fourier.
Como método alternativo para este tipo de problemas, se puede utilizar la Transformada de Laplace en la variable "*t*".
A partir de la experiencia llevada a cabo en el curso corto, se pueden utilizar ambos métodos para resolver problemas de Transferencia de Masa, Propagación de Ondas, etc. Algunos de estos problemas son relativamente clásicos y aparecen en textos de Ecuaciones Diferenciales (Zill, 1997) o de Transformada de Laplace (Doestch, 1974). Otros en cambio, son específicos de Ingeniería Química o de Ingeniería de Alimentos y aparecen en publicaciones científicas (Martínez Luaces et al., 2000), o en el trabajos como el ya mencionado en la introducción (Martínez Luaces, 2000b).

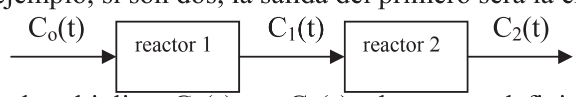
Algunos problemas concretos y sus dificultades

Como ya se mencionó la Transformada de Laplace se utiliza en el Diseño de Reactores. En efecto, la Función de Transferencia de un reactor, se define como

$$\mathbf{G(s)} = \frac{L\{\mathbf{C(t)}\}}{\boldsymbol{L}\{C_o(t)\}} \qquad (1)$$



siendo $C_o(t)$ el perfil de concentración a la entrada y C(t) lo mismo para la salida. Dichas concentraciones de la solución con que se trabaja, dependerán del tiempo t.
Uno de los problemas examinados en el curso consistió en conectar varios reactores en serie. Por ejemplo, si son dos, la salida del primero será la entrada del segundo:



por lo que, al multiplicar $G_1(s)$ por $G_2(s)$ tal como se definieron en la fórmula **(1)** (es decir, las funciones de transferencia de ambos reactores), el término $\boldsymbol{L}\{C_1(t)\}$ se cancela y resulta que:

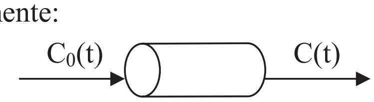
$$G(s) = G_1(s) \,.\, G_2(s) \qquad \mathbf{(2)}$$

La segunda parte del problema planteado consistió en generalizar para n reactores en serie. Los participantes del curso pudieron llegar con relativa facilidad (una vez entendido el razonamiento anterior) a que la función de transferencia de todo el sistema es igual al producto de todas las $G_i(s)$ $(i = 1, 2, ..., n)$.
Por otra parte, como se mencionó en una breve explicativa, se pueden considerar distintos tipos de reactores ideales, como el Reactor Tubular Flujo Pistón (RTFP) en el que la salida C(t) es como la entrada con un cierto retardo τ, es decir, $C(t) = C_0(t - \tau)$, entonces transformando se tiene:

$$G(s) = \frac{\boldsymbol{L}\{C_0(t-\tau)\}}{\boldsymbol{L}\{C_0(t)\}} = \frac{e^{-\tau s}\,\boldsymbol{L}\{C_0(t)\}}{\boldsymbol{L}\{C_0(t)\}} = e^{-\tau s} \quad \Longrightarrow \quad G(s) = e^{-\tau s}$$

Esquemáticamente:

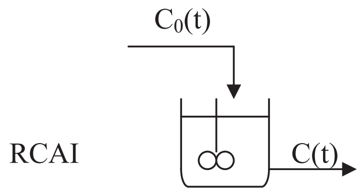
RTFP



$$G(s) = e^{-\tau s} \qquad \mathbf{(3)}$$

Otro ejemplo más complejo es el del Reactor Continuo Agitado Ideal (RCAI), en el cual el perfil de salida C(t) se obtiene de una ecuación diferencial que surge de un balance de masa. Este es un típico ejemplo de mezclas y tanques, que no ofreció demasiadas dificultades a los participantes. Se obtiene en este caso:

$$V\frac{dC}{dt} = \phi C_0 - \phi C \qquad \textbf{(4)}$$



V = volumen del reactor
ϕ = flujo volumétrico de entrada y de salida del reactor

Transformando la ecuación resulta:

$$V\left(s\,\mathcal{L}\{C\} - C(0)\right) = \phi\,\mathcal{L}\{C_0\} - \phi\,\mathcal{L}\{C\}$$

Si la concentración inicial es cero (o sea si solo hay agua en el reactor al comenzar su funcionamiento), entonces resulta:

$$s\,V\,\mathcal{L}\{C\} + \phi\,\mathcal{L}\{C\} = \phi\,\mathcal{L}\{C_0\}$$

de donde:

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{C(t)\}}{\mathcal{L}\{C_o(t)\}} = \frac{\phi}{\phi + sV} = \frac{1}{1 + \tau s} \qquad \textbf{(5)}$$

Donde $\tau = V / \phi$ es el tiempo de residencia del reactor. La interpretación de τ (que es V / ϕ) como un tiempo, resultó más fácil de ver, utilizando magnitudes físicas concretas de volumen y de caudal, observando entonces que el resultado de este cociente daba en segundos o alguna otra unidad de tiempo.

Es posible además plantear problemas interesantes vinculados a otras áreas de la Matemática. Por ejemplo, n reactores de tipo RCAI, en serie, dan por una generalización de la fórmula **(2)** y utilizando la fórmula **(5)**, lo siguiente:

$$G(s) = \prod_{i=1}^{n} G_i(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\tau_i s} \qquad \textbf{(6)}$$

Si todos los reactores son iguales y el tiempo total de residencia es τ, entonces $\tau = n\tau_i$ y resulta que la fórmula **(6)** se puede poner como:

$$G(s) = \frac{1}{\left[1 + \frac{\tau}{n} s\right]^n} \qquad \textbf{(7)}$$

Si se hace tender n a $+\infty$, para los profesores de Matemáticas fue fácil ver que:

$$\lim_{n \to \infty} G(s) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left[1 + \frac{\tau}{n} s\right]^n} = e^{-\tau s} \qquad \textbf{(8)}$$

Sin embargo, no fue fácil para los profesores interpretar químicamente este resultado, observando que el límite coincide con el resultado de la fórmula **(3)**.

Para un estudiante típico de Ingeniería Química sucede exactamente al revés. Una vez aprobado el curso de cálculo en el cual trabaja con límites como el de la fórmula **(8)**,

rápidamente se olvida de las técnicas y artificios que permiten resolver ese tipo de ejercicios. En cambio, para dicho estudiante, comprender que una batería de reactores agitados en serie, cuyo número tiende a infinito y sus tiempos de residencia tienden a cero, como en la fórmula **(7)**, se comporta como el reactor tubular de la fórmula **(8)**, es casi evidente. Esto se comprobó reiteradamente, en varios años, tanto en cursos de grado, como en el posgrado, en los que se planteó este problema.
Esto último es una constante en los cursos de Matemática como asignatura de servicio. Aquello que los alumnos no aplican en otras materias lo olvidan rápidamente. Por el contrario, aquello que aplican, lo recuerdan y los motiva en su aprendizaje. Por otra parte, les produce satisfacción el poder lograr "interpretaciones químicas", de cosas que consideran "meros resultados matemáticos" y así lo hacen saber cuando se les consulta al respecto (Martínez Luaces, 2001).

Conclusiones

Las E.D.O., las E.D.P. y la Transformada de Laplace tienen un papel fundamental en la modelación y resolución de problemas de Física, Química, Ingeniería, etc. y con muy pocos pre-requisitos es posible introducir a los alumnos de los cursos básicos en este tipo de problemas, lo que permite dar a los mismos un enfoque más aplicado y motivador (Martínez Luaces et al., 2000).
De hecho, las dos publicaciones ya mencionadas (Martínez Luaces, 2000a y Martínez Luaces, 2000b), son utilizadas como fuente de problemas para los cursos teórico-prácticos de Ecuaciones Diferenciales, para Ingeniería Química y para Ingeniería de Alimentos, con excelentes resultados (Martínez Luaces et al., 2000).
Dado que en el curso corto se introdujeron algunos problemas sencillos de modelado y la importancia que este tiene para los ingenieros y en general, para todos los que aplican la Matemática, es importante también hacer algún comentario al respecto.
Concretamente, para tener una idea de su significación, bastaría citar las palabras del actual Presidente del Comité Interamericano de Educación Matemática, Dr. Carlos Vasco, que en la conferencia de clausura del décimo Congreso Inter Americano de Educación Matemática (X CIAEM) dijo: *"...Por eso, una de las más importantes tareas de la Matemática del siglo XXI va a ser estar a la caza de situaciones reales en las cuales se empiece a notar un esquema que se repite y tratar de encontrarle el modelo matemático más ajustado..."* (Vasco Uribe, 1999). Como se puede ver, el modelado no sólo es y será importante para los ingenieros, o los economistas, sino incluso para los propios matemáticos, de los cuales los matemáticos educativos no pueden ser la excepción.
Otro tema profundamente vinculado con el modelado y la resolución de problemas es la recuperación de escenarios. Cabe mencionar en tal sentido, que una de las conclusiones que surgieron del Panel sobre la Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior, realizado en Chile, en el marco de la V Reunión de Didáctica de Matemática del Cono Sur (Martínez Luaces, V., et al., 2000), es que resulta difícil que los estudiantes puedan reconstruir con éxito las definiciones, propiedades y teoremas vinculados a un concepto matemático si no se hace un esfuerzo por recuperar los escenarios en que ese concepto fue creado.
A modo de ejemplo, las E.D.O., las Series de Fourier, la definición de Estabilidad y casi todos los conceptos involucrados en este mini curso, tuvieron su origen en el modelado y resolución de problemas no matemáticos.
El hecho de que hoy en día, estos y otros temas sean parte central de nuestros cursos y programas, no se debe a su belleza matemática, sino al éxito que tuvieron esos modelos.

Modelar problemas de la vida real no debe ser entonces una simple actividad complementaria o un módulo de trabajo opcional. Por el contrario, debemos tomar esta actividad como una obligación con nuestros alumnos y con la propia historia de nuestra disciplina.

Referencias bibliográficas

Bourguignon, J-P et al. (in press). "Report of the Working Group A2: Mathematics and Other Subjects", *ICMI Study Group on the Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. Singapore: ICMI

Courant R. y John F. (1978). *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, México: Ed. Limusa.

Doestch, G. (1974). *Introduction to the theory and application of the Laplace Transformation*, Basilea: Springer-Verlag.

ICMI (1986). "Mathematics as a service subject", *L'Enseignement Mathématique,* **32**, pp. 159-172.

Langinis, J. (1981). "Une lettre inédite de Fourier sur l' enseignement destiné aux ingénieurs en 1797", *Rev Histoire Sci. Appl.,* **34**, **3 – 4**, pp. 193 – 207.

Martin, R.H. (1984). *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*. New Jersey: Mc. Graw-Hill.

Martínez Luaces, V. et al. (2000). "Innovaciones en la enseñanza de Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería Química e Ingeniería de Alimentos". *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, **13**, pp. 555-559.

Martínez Luaces, V. y Casella, S. (1996). "La educación matemática en las diferentes ramas de la Ingeniería en el Uruguay hoy", *Memorias del II Taller sobre la enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*, La Habana: ISPJAE.

Martínez Luaces, V. (1997). "Las Ecuaciones Diferenciales y su Estudio Cualitativo", *Educación en Física*, **3.2**, pp. 32 - 35.

Martínez Luaces, V. (1998). "Matemática como asignatura de servicio: algunas conclusiones basadas en una evaluación docente" *Números, Revista Española de Didáctica de Matemáticas* **36**, pp. 65-67

Martínez Luaces, V. (2000a). *Aplicaciones de E.D.O*. Montevideo: Ed. AEQ.

Martínez Luaces, V. (2000b). *Aplicaciones de E.D.P.* Montevideo: Ed. AEQ.

Martínez Luaces, V. (2001). "Enseñanza de matemáticas en carreras químicas desde un enfoque aplicado y motivador", *Números. Revista española de Didáctica de las Matemáticas.* **45**, pp. 43-52.

Martínez Luaces, V., Díaz Moreno, L. y Suárez, M. (2000). "Informe del Panel y del Grupo de Trabajo sobre Enseñanza de Matemática en la Educación Superior", *V Congreso de Didáctica de Matemática del Cono Sur*, Santiago de Chile, Chile.

Muller, E. et al. (1996). "Mathematics as a service subject", *Reporte del grupo de trabajo Nº 17 en ICME - 8.* Sevilla. España.

Vasco Uribe, C. (1999). "Las Matemáticas Escolares en el año 2010" *Conferencia en X CIAEM, en Boletín especial de SEMUR*, **1**.

Westerterp, K.R. et al. (1984). *Chemical Reactor Design and Operation*, New York: John Wiley & sons.

Zill, D. (1997). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*, México: International Thomson Editores.