# La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la Variable Compleja

Ricardo Cantoral Uriza
Cinvestav. IPN. México
rcantor@mail.cinvestav.mx

Este artículo reporta una investigación relativa al tratamiento de la contradicción en matemáticas, particularmente referida al origen del análisis complejo. Después de un trabajo de orden teórico se implementó con un grupo de estudiantes de una institución de educación superior mexicana, una experiencia didáctica controlada; dicho estudio fue llevado a cabo siguiendo una aproximación teórica que actualmente denominamos, *aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa*. Se basa en un marco teórico que permite tratar con los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple al incorporar el estudio de las interacciones entre epistemológica del conocimiento, la dimensión socio cultural del saber, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 1998; Cordero, 2001). El término *socioepistemología*, pretende plantear una distinción de origen con las aproximaciones epistemológicas tradicionales, pues mientras que éstas asumen al conocimiento como el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana; la socioepistemología en cambio, se plantea el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socio culturales particulares. El conocimiento en este caso, se asume como el fruto de la interacción entre epistemología y factores sociales.

Nuestro tratamiento experimental se apoyó en el diseño de una ingeniería didáctica robusta en el sentido de Artigue (1992), cuyo análisis preliminar fue enriquecido al incorporar a las dimensiones tradicionales: didáctica, epistemológica y cognitiva, una más que permite una visión transversal que atraviesa a estas tres dimensiones anteriormente citadas y que provee a la explicación teórica de un visión que consideramos novedosa, nos referimos a la dimensión socio cultural. En el acercamiento didáctico experimental que hemos propuesto para conducir este estudio, tomamos en cuenta de manera destacada, el papel que los recursos cognitivos y las circunstancias epistemológicas, al seno del entorno social particular que motivó la construcción de la noción de variable compleja, al tratar con la extensión de los logaritmos a los números negativos.

Al momento del debate epistolar entre Leibniz y Bernoulli, los logaritmos poseían una definición satisfactoria para los números positivos y las reglas de su operación habían sido adecuadamente desarrolladas. Empero, la concepción de número negativo, como se señala en (Glaeser, 1981), restaba aún incompleta. Por ejemplo, mientras que Leibniz, para invalidar la existencia de los números negativos argumenta: “si existiera $\log(-1)$ sería igual a la mitad de $\log(\sqrt{-1})$ una conclusión que considero absurda”. Bernoulli por su parte al buscar responder al argumento de Leibniz ofrece una extensión por simetría: “como $dx/x=-dx/-x$ entonces integrando se tiene que $\log(x)=\log(-x)$”. Dicho argumento pretende que la extensión de los logaritmos a los números negativos, no precise de los números complejos. Aunque en ambas propuestas, se trata de mantener a los procedimientos matemáticos aceptados, en un dominio que brinde una certidumbre en los procedimientos, en este sentido, se prefirió tratar con números reales antes que explorar la extensión a los complejos.

Por otra parte, del debate entre Euler y Bernoulli destacamos la serie de contradicciones que ella puso al descubierto, el corpus matemático aceptado en el momento habría de extenderse y configurar de nueva cuenta, su idea de lo que significa la noción de función, al aceptar incluso a las funciones multivaluadas. Mientras Euler apuntaba hacia el surgimiento de un aparato teórico novedoso que incluía la extensión de la noción de igualdad usual del álgebra a la igualdad entre conjuntos, cuando trató el tema de las constantes de integración y de las infinitas soluciones de una ecuación algebraica de grado infinito. Bernoulli por su parte sostiene, como en la primera etapa de la controversia que sostuvo con Leibniz, la necesidad de conservar el cuerpo teórico clásico, según el cual, son los números y las variables reales el sustento de toda extensión teórica. De este modo se dio inicio al proceso de construcción social de la variable compleja, donde se requirieron de cerca de trescientos años para aceptar a los complejos, primero como números y luego como variables, mientras que en sólo treinta años se desarrollaron las bases teóricas del análisis complejo. Era de esperar en consecuencia, que la aceptación de un universo de números nuevo, resulte para los estudiantes un verdadero problema para su comprensión.

## El marco teórico

Para analizar la información contenida en las respuestas y los argumentos que produjeron los estudiantes, seguimos un marco de análisis que distinguía el uso de los aspectos relativos a la sensibilidad a la contradicción, como la búsqueda de coherencia interna en el aparato matemático. Todo ello según consta en transcripciones y en sus propias respuestas escritas. En esta etapa del análisis de la información, se destacó el tipo de argumentaciones matemáticas con base en la selección de las herramientas de validación respectivas, así como las formas en que construyen significados. Tal es el caso de $\log(x) = \log(-x)$, como el de $\pi i = 0$. Tuvimos un especial interés en documentar la forma en que negaban la identidad de Bernoulli, la mayoría de los estudiantes o la forma en que reconocían la posibilidad de aceptar una construcción más sofisticada como la propuesta por Euler: $\log(-1) = \pi i + 2n\pi$, con $n$ en los números enteros.

A fin de documentar la sensibilidad a la contradicción en las respuestas de los estudiantes, pusimos un énfasis mayor en el cambio del discurso argumentativo cuando debían sostener sus ideas en un debate con el profesor. En el caso particular de la definición de Bernoulli, buscamos determinar en qué nivel los estudiantes aceptaban el reto de trabajar bajo una hipótesis que les resultaba desde un inicio dudosa, y sobre todo, determinar la calidad y profundidad de los juicios esgrimidos.

Finalmente, el análisis de sus respuestas se hizo con base en los argumentos matemáticos y escolares que les permitían aceptar, rechazar o cuestionar las afirmaciones que planteaba la secuencia didáctica. De este modo, habríamos de aceptar una estrecha relación entre los niveles de argumentación con la sensibilidad a la contradicción que la situación planteaba. Así la cuestión de interés radica no en el número de estudiantes que optan por el camino de la extensión contra aquellos que buscan la coherencia, sino más bien, en analizar la variedad y riqueza en los discursos argumentativos de cada caso. Reproducimos a continuación, sólo una parte de la controversia.

Marzo 16, 1712. Leibniz a Bernoulli: Leibniz dice que $-1/1$ es imaginario, puesto que no tiene logaritmo.

Mayo 25, 1712. Bernoulli a Leibniz: Bernoulli rechaza la demostración de Leibniz de que la razón $1{:}-1$, ó $-1{:}1$ es imaginaria, por el hecho de que $-x$ tiene un logaritmo. Tenemos $dx/x = -dx/-x$; así, por integración, $\log x = \log(-x)$. La curva logarítmica $y = \log x$ tiene entonces dos ramas simétricas al eje Y, justo como la hipérbola tiene dos ramas opuestas.

Junio 30, 1712. Leibniz a Bernoulli: Leibniz repite su argumento de que $\log(-2)$ no existe, porque si existiera su mitad sería igual a $\log\sqrt{-2}$, una imposibilidad. La regla de diferenciación, $d\log x = dx/x$, no es aplicable a $-x$. En la curva logarítmica $y=\log x$, $x$ no puede decrecer a cero y entonces pasar al lado opuesto, ya que la curva no puede cortar al eje $y$, el cual es asintótico a ésta.

Como sabemos, la definición vigente de los logaritmos en los textos escolares de los cursos, suele restringirse a los números positivos. La cuestión de la extensión a los negativos primero y a los complejos después, aparece por primera vez en los cursos de análisis complejo, aunque este hecho pase desapercibido para los autores de libros de texto. En contraparte, según reportan los historiadores de la matemática, el concepto de logaritmo surge ligado a la necesidad de simplificar y agilizar cálculos numéricos tanto para la navegación como para las observaciones astronómicas. De este modo, la discusión sobre la inexistencia del $\log(-1)$ se construye sobre la base de las propiedades de los logaritmos para positivos:

> "... $-1$ no tiene logaritmo real puesto que, por una parte, no puede ser positivo ya que un logaritmo positivo está asociado a un número mayor que 1; y por otra parte, no puede ser negativo porqué un logaritmo negativo pertenece a un número positivo menor que 1; por tanto, la única alternativa posible es aceptar que el logaritmo de $-1$ no es real sino imaginario." (Cajori, 1913)

Continúa Leibniz acorde con el saber de la época negando su extensión a los negativos señalando posibles consecuencias que él considera absurdas:

> "si realmente existiera el logaritmo de $-1$, su mitad sería el logaritmo del número imaginario $\sqrt{-1}$, una conclusión que considero absurda." (cfr )

Este tipo de argumentos suelen presentarse en los discursos argumentativos de las alumnas y los alumnos cuando fueron sometidos a la experiencia didáctica, pues consideramos que la noción de existencia de los logaritmos de números negativos, significa tanto para Leibniz, como para estudiantes y profesores contemporáneos participantes de nuestra experiencia educativa, la conservación de propiedades establecidas para los positivos. Son, por así decirlo, argumentos metamatemáticos, dado que no sería factible limitar al $\log\sqrt{-1}$ a ser un real como lo hace Leibniz o los estudiantes, de algún modo esto obedece a una búsqueda de cierta naturalidad que no pertenece al campo propiamente matemático, sino al de la cultura que rodea al quehacer matemático: "más cerca de la naturaleza" decía Leibniz.
A diferencia de Leibniz, Bernoulli sostiene la propuesta de construir la curva logarítmica con dos ramas simétricas respecto del eje $y$, para lo que propone discursos argumentativos que, como vimos en la trascripción de la correspondencia, se apoyan en una búsqueda de situaciones deductivas en la recién creada teoría del cálculo infinitesimal. Por una parte, se sustenta en la igualdad de las diferencias $dx/x = -dx/-x$ para concluir por integración, que $\log(x) = \log(-x)$. Adicionalmente, se apoya el recurso, matemáticamente equivalente al anterior, de calcular las áreas de las dos figuras simétricas respecto del origen de coordenadas, propone considerar a la hipérbola equilátera $xy = 1$, para construir a la curva logarítmica en su interpretación de área bajo la curva.
La segunda parte de la controversia, ahora entre Euler y Bernoulli toma un nuevo curso, pues Euler plantea una contradicción directa a la propuesta de Bernoulli. De la que se sigue que $\pi \mathrm{i} = \log(-1)$; y en consecuencia se acepta $\log(-1) = 0$ , entonces también habremos de aceptar que $\pi i = 0$ y en consecuencia $i = 0$.

**Organización de la experiencia**

Los participantes de esta investigación fueron doce estudiantes universitarios de una institución pública mexicana, su maestra, que en ese entonces cursaba estudios de posgrado, y dos investigadores en matemática educativa. Sus conocimiento de álgebra y cálculo diferencial e integral incluían los tópicos clásicos de teoría de ecuaciones, álgebra lineal, cálculo diferencial e integral en una y varias variables, introducción a la lógica y los conjuntos.

Suele presentarse a los logaritmos en el terreno analítico, ya sea como la integral de la hipérbola equilátera en la rama positiva o como la inversa de la función exponencial. Quizá la más socorrida sea dado por la integral siguiente: $\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0.$ Finalmente, una presentación menos usual, pero que conviene señalar es la estructuralista. Se dice que $F$ es logarítmica si cumple con lo siguiente $F(xy) = F(x) + F(y)$ para todos $x$ e $y$ reales no nulos.

La noción de número negativo se constituye como un obstáculo epistemológico para el desarrollo de la noción de logaritmo de número negativo. Leibniz por ejemplo sostenía que la proporción $1 : -1 :: -1 : 1$ aunque imposible, es manejable, pues señala que no es posible que el mayor sea al menor como el menor es al mayor. Tal digresión obedece a la noción de número que se manejo en el momento.

Al respecto, el profesor George Glaeser cita que Lazare Carnot escribía:

> *Una multitud de paradojas o mas bien de absurdos palpables resultan de la misma noción; por ejemplo, que $-3$ será menor que 2; mientras $(-3)^2$ será más grande que $(2)^2$, es decir, que entre dos cantidades desiguales, el cuadrado de la más grande será menor que el cuadrado de las más pequeña ...* (cf. Glaeser, 1981, p. 326)

Por su parte, el matemático escocés C. MacLaurin, quien a principios de 1748 señalaba la imposibilidad de tomar cantidades negativas en si mismas, pues:

> *Así, la cantidad negativa no es, rigurosamente hablando, menos que nada.... una cantidad aislada no puede ser considerada como negativa en si misma: sino sólo mediante la comparación.* (cf. Glaeser, 1981, p. 316)

Anteriormente, Leibniz intentó mostrar que la razón $-1:1$ no existe, pues considera que en tal caso se tendría que $\log(-1/1) = \log(-1) - \log(1)$, lo que muestra que para él $-1/1 \neq -1$.

La argumentación sobre la inexistencia del logaritmo de $-1$ que propone Leibniz descansa en las propias propiedades de los logaritmos de números positivos y en la imposibilidad de que sean reales, al respecto dice:

> *... $-1$ no tiene logaritmo real puesto que, por una parte, no puede ser positivo ya que un logaritmo positivo está asociado a un número mayor que 1; y por otra parte, no puede ser negativo porque un logaritmo negativo pertenece a un número positivo menor que 1; por tanto, la única alternativa posible es asentar que el logaritmo de 1 no es real sino imaginario* (cf. Cantoral, et al., 1987, p. 13)

Argumenta a continuación una consecuencia contradictoria si se supone la existencia real de los logaritmos de números negativos: Si realmente existiera el logaritmo de $-1$, su mitad sería el logaritmo del número imaginario $-1$, una conclusión que considero absurda. (cf. Cantoral, et al., 1987, p.13). En sus intentos, Leibniz procura conservar el sentido adquirido por el logaritmo de los positivos, busca la no contradicción y la permanencia de los atributos. Por su parte, Bernoulli, construye una propuesta particular de los logaritmos de los negativos como una extensión simétrica respecto de los positivos. Una gráfica simétrica

respecto del eje y. Sus argumentos se apoyan en dos hechos, el primero una igualdad entre diferenciales y el segundo en una igualdad de áreas.
Entonces de la afirmación $dx/x = -dx/-x$ se sigue, por integración, que $\log(x) = \log(-x)$, lo que conduce a una extensión de los logaritmos de negativos dentro de los reales. Mientras que el segundo de sus argumentos utiliza a la hipérbola $xy = 1$, en la que construye a los logaritmos como las áreas bajo la hipérbola equilátera. Digamos que si $x > 0$, el $\log(x)$ es igual al $\log(-x)$, pues uno se toma cuando como el área bajo $y = 1/x$ desde 1 hasta $x$, mientras que $\log(-x)$ se toma como el área sobre $y = 1/x$ entre $-1$ y $-x$.
Según se refiere en (Cantoral et al., 1987), a lo largo de la controversia Leibniz Bernoulli, se notan planos de argumentación completamente diferentes. Los argumentos de uno no son entendidos por el otro. Su diferencia esencial radica en que Bernoulli busca extender los logaritmos a través de la propiedad $\log(x) = \log(-x)$ confeccionando en el camino las reglas de operación, que considera arbitrarias en tanto no produzcan contradicciones con el cuerpo de conocimientos aceptados al momento y evita, de este modo, la aparición en el problema de los números complejos. Leibniz en cambio, no acepta la extensión propuesta por Bernoulli aunque no propone otra, limitando sus intervenciones al señalamiento de las contradicciones a que habría lugar de aceptar la oferta de Bernoulli. La debilidad de los métodos de validación involucrados, planteo en el momento la construcción de nuevas y más versátiles formas de justificación.
PRIMERA PARTE DE LA ACTIVIDAD PROPUESTA
En la sesión anterior pretendíamos llegar a extender los logaritmos a los números negativos de la siguiente manera: $\log(-x) = \log(x)$ mediante las siguientes argumentaciones:

A) de $(-x)^2=(x)^2$, obteníamos $\ln(x)=\ln(-x)$
B) de $dx/x=-dx/-x$, obteníamos $\ln(x)=\ln(-x)$

Sin embargo, las argumentaciones ofrecidas no le convencieron. Intentemos dar una nueva argumentación a favor de la igualdad $\ln(x)=\ln(-x)$ a fin de que usted la acepte o la refute.
SEGUNDA PARTE

Sabemos y aceptamos que si $x>0$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

Intentemos extender esta definición a números negativos. Si $x>0$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

Pero $\int_1^{-x} \frac{dt}{t} = \int_1^0 \frac{dt}{t} + \int_0^{-1} \frac{dt}{t} + \int_{-1}^{-x} \frac{dt}{t}$, y como $\int_1^{-x} \frac{dt}{t} = \int_{-1}^{-x} \frac{dt}{t}$, puesto que $\int_1^0 \frac{dt}{t} = -\int_0^{-1} \frac{dt}{t}$ por ser un área positiva y la otra negativa e iguales en magnitud. Luego se tiene que
$\ln(-x) = \int_1^{-x} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x)$. De ahí $\ln(x)=\ln(-x)$.

1. ¿Le convenció este último argumento?, ¿le convencería a sus alumnos?
2. Si no es así, ¿de qué otra manera intentaría usted responder a su alumno que le ha preguntado por el logaritmo de un número negativo?

**Primeros resultados**
Ante la pregunta de por qué cuando exponemos el tema de logaritmos en alguno de nuestros cursos se trabaja sobre los positivos, el grupo optó por dos caminos principales.

El primero, sostuvo la tesis: Si existieran los logaritmos de negativos tendrían que ser el reflejo de los logaritmos de los positivos, dado que suele ocurrir que los positivos y los negativos tengan simetrías, sin embargo advierten, que de aceptarlos tendrían que reconstruir la teoría, pues habría que explicar de qué manera un número con base positiva $a^x$ sería igual a un número negativo $y$.

El segundo grupo, el más numeroso, se negó sistemáticamente a aceptar siquiera la posibilidad de tratar con los logaritmos de números negativos. Básicamente sus argumentos descansaban en que los logaritmos de los negativos no estaban definidos, o que no existían. Cuando habrían de explicar sus juicios solían usar las explicaciones de clase. "No existe un número positivo que al elevarlo a una potencia me de negativo".

EXTENSIÓN DE LAS OPERACIONES Y SENSIBILIDAD A LA CONTRADICCIÓN

Este universo discursivo que el entorno escolar propone como marco de referencia para lo que se dice y lo que se hace en el aula no sólo actúa sobre el sentido de los enunciados, sino también sobre su forma. Para responder adecuadamente a las demandas de la maestra, los estudiantes deben disponer de medios de control de la actividad matemática, no basta, como en el fragmento anterior, "pensar en voz alta" sobre las implicaciones a que daría lugar el aceptar los logaritmos de números negativos. Ahora, la maestra centra la reflexión en una exploración, aunque igual de abierta que la anterior, que dota de medios didácticos que permitirán la devolución del problema a los estudiantes.

Estas formas de interpretar los enunciados informan también de la intención, guían en el proceso de contextualización dando pistas a los alumnos y a las alumnas del camino que habría de seguir el curso de un razonamiento matemático. Es así, que plantear la cuestión de la conservación de las propiedades logarítmicas de los positivos a los negativos, dio un espacio de negociación del significado y en consecuencia, dotó de coherencia nuevamente al discurso matemático escolar.

**Maestra.-** Cuando exponemos el tema de logaritmos en alguno de nuestros cursos, usualmente lo hacemos para números positivos. ¿Las propiedades de los logaritmos seguirán siendo válidas en los negativos?

**Ma.**- Siguen siendo válidas, ya que $\ln(-x)=\ln(x)$ y $\ln(-x)=\ln(y)$, entonces $\ln[(-x)(-y)]= \ln(-x)+ \ln(-x)$. $\ln(-x^m) = -m\ln(-x)$...

**P.**- No seguirán siendo válidas, ... por ejemplo $\ln[(-5)(3)]= \ln(-5) + \ln(3)$ y $\ln(-5)$ no existe.

**R.**- No seguirán siendo válidas pues, como ya dije, el logaritmo de números negativos no está definido y ... $\ln[(-1)( -1)]= \ln(-1) + \ln(-1)$, es decir $\ln(1)= \ln(-1) + \ln(-1)$, es decir $0 =$ indefinido.

**J.**- No siguen siendo válidas: ... $\ln(-x)^m = m\ln(-x)$. El primer miembro es válido para $m$ par y el segundo no es válido para ningún caso.

**G.-** Si no se encuentra en nuestro universo de trabajo los logaritmos de números negativos, no podemos considerar tales igualdades.

**F.**- No siguen siendo válidas, por ejemplo: $\ln[(-e)( -1)]= \ln(-e) + \ln(-1)$, pero el lado derecho no es válida.

**Mar.**- ... no son válidas si se aplican a negativos, $\ln(-e)^2 = 2\ln(-e) = 2\ln[(-1)(e)] = 2[\ln(-1) + \ln(e)] = 2\ln(-1) + 2\ln(e)^2 = 2\ln(e) = 2$. Porque $\ln(-e)^2 = \ln(e)^2$ pero $2 \neq 2 \ln(-1) + 2$, porque $\ln(-1)$ no existe.

**H.**- No porque no los podríamos encontrar.

**T.**- No son válidas las leyes con números negativos.

LAS PRIMERAS MUESTRAS DE ADHESIÓN Y LA ACEPTACIÓN DEL CONTRATO

**Maestra.**- Si ella no nos convence totalmente, veamos otro argumento. Es claro que $dx/x=-dx/-x$. Se sigue por integración la siguiente igualdad, $\ln(x)=\ln(-x)$. Con lo cual, admitimos la existencia de logaritmo de números negativos y además una manera de calcularlos con base a los ya conocidos y aceptados logaritmos de números positivos, esto es, por ejemplo: si se desea conocer el $\ln(-2)$ éste es igual al $\ln(2)$, $\ln(-3)=\ln(3)$, etc.

**Ma.**- Silencio.

**P.**- Yo pensaba que el logaritmo de números negativos no existía, y por lo tanto, entonces sí existe.

**R.**- El procedimiento es incorrecto al considerar $-dx/-x$ y su signo como una forma separada para cada uno de ellos, lo cual hace en su demostración... De todos modos algo anda mal.

**R.**- No, pues no sé... no creo que $\ln(x)=\ln(-x)$.

**J.**- Bueno, si se acepta la existencia de logaritmo de números negativos, ¿quién sería N, tal que $e^{N}=-x$?

**J.**- $e^0$ no es igual a $-1$, ... por definición $e^0=1$.

**F.**- Si yo parto de $dx/x = -dx/-x$, $\int dx/x = \int -dx/-x$, $\int dx/x = (-1)/(-1) \int dx/x$, $\ln(x) = \ln(x)$ y no $\ln(x) = \ln(-x)$.

**T.**- No se qué decir, pero si así fuera se hubieran definido los logaritmos en general, para positivos y negativos de igual forma. Sin embargo, sólo se habla de logaritmos de números positivos.

**A.**- $dx/x = -dx/-x$ esto es cierto por la ley de los signos, pero no quiere decir que $dx = -dx$ y $x = -x$ de modo que al integrar nos quedaría $\ln(x) = \ln(x)$ y no $\ln(x) = \ln(-x)$.

Como se ve en el fragmento anterior, los puntos de vista sobre la aceptación de un nuevo resultado en la clase de matemáticas no son únicos. Estas formas de aceptación no provienen de la lógica interna de la deducción matemática, sino por el contrario, son el producto de una verdadera formación de identidades sociales de las personas, tal es el caso de las relaciones de poder tradicionales, maestro – alumno, texto – maestro, así como las situaciones de resistencia se construyen a través de la negociación de los significados en el ámbito escolar.

La aceptación o la resistencia son más bien, el fruto de la interacción y de las relaciones de poder entre los participantes en su juego con el saber. En algunos casos, la resistencia a aceptar la extensión de Bernoulli, obedece a otra forma de relación de poder que bien podría deberse al rol del libro de texto en la clase de matemáticas. La definición de logaritmo de número negativo no había aparecido en ninguno de los libros a los que los alumnos habían tenido acceso. El criterio de verdad no proviene entonces, de la discusión propiamente matemática, sino de la convención institucional en curso de constitución.

## Consideraciones finales

Quisimos mostrar con este estudio, que la sensibilidad a la contradicción por parte de los estudiantes no proviene, en forma exclusiva, de la agudeza con la que juzguen los procedimientos y razonamientos matemáticos, sino que intervienen adicionalmente elementos propios del discurso del medio escolar y del discurso matemático escolar. Esto es, los alumnos basan sus supuestos en situaciones del orden cultural, las cuales no siempre son compartidas por quienes participan en dicho proceso escolar, y que sólo se explicitan a los participantes en la medida en que se sea parte de esa cultura. Estos supuestos forman marcos de referencia robustos y permiten interpretar tanto las intervenciones argumentativas de los participantes, como las formas de aceptación de un resultado matemático en el aula, habremos de decir al respecto, que estos supuestos tampoco son naturales, en tanto que son de carácter social y cultural.

El haber tomado como unidad de análisis en este estudio al discurso matemático escolar, dotó a esta investigación en el campo de la matemática educativa, de un medio que consideramos eficaz para detectar problemas y para intervenir en ellos a fin de construir una verdadera herramienta de cambio educativo. En el caso que aquí hemos presentado, mientras que la definición de logaritmo de los números complejos aparece en el ámbito escolar sin contexto alguno, sin una adecuada preparación que escenifique y haga plausible sus resultados, sin un verdadero proceso de socialización en el aula de matemáticas, tendremos en consecuencia que los procesos educativos no parecen desencadenar acciones al nivel del entendimiento o del pensamiento matemático requerido para aprender y comprender matemáticas en y fuera del salón de clases.

Este hecho pudo explicarse en la medida que, aunque el discurso escolar está lleno de preguntas, la mayoría de ellas tienen una *función pragmática* que dista mucho de las funciones cotidianas de los enunciados interrogativos, las cuales se asocian a pedido de información o a estrategias de cortesía. Se trata de preguntas destinadas a *controlar* la interacción y a hacer explícito el conocimiento que se supone tienen los interlocutores. Estas preguntas sólo puede hacerlas quien enseña a causa de la posición que ocupa en la institución y del rol que desempeña en la conformación del discurso matemático escolar, por tanto la metáfora: si un alumno nos preguntara ¿a qué es igual el logaritmo de un número negativo?, carece de interpretación plausible para los participantes en la experiencia

El discurso matemático escolar en cambio, acepta adicionalmente a las preguntas con *función pragmática*, otras interrogantes con *función teórica*, que plantean cuestionamientos de orden teórico a fin de develar una coherencia interna del discurso argumentativo o de las eventuales implicaciones que tendría el conducir al razonamiento bajo hipótesis inusuales: Si aceptamos esto, entonces habrá que aceptar esto otro... Una forma de abstracción reflexiva, en el sentido de Piaget, suele usarse con frecuencia en algunos momentos de la actividad escolar en el campo particular de las matemáticas escolares. Sin embargo, el riesgo de cometer errores, tiende a incrementar la resistencia de los estudiantes ante esas formas interrogativas. Lo cual fue intencionalmente incrementado en nuestro diseño de ingeniería didáctica, como una variable de control al elegir alumnos que no hubiesen cursado asignaturas de variable compleja.

**Referencias bibliográficas**

Artigue, M. (1992). Didactic Engineering. *Recherches en Didactique des Mathématiques. Selected Papers*, 41 – 66.

Cajori, F. (1913).History of the exponential and logarithmic concepts. *American Mathematical Monthly*, Vol. 20, 35 – 47.

Cantoral, R.; Farfán, R. (1984). *Diseño de una secuencia de aprendizaje sobre el logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja*. México: Cinvestav.

Cantoral, R.; Farfán, R., Hitt, F.; Rigo, M. (1983). *Historia de los conceptos de Logaritmo y Exponencial*. México: Cinvestav.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. México: Thomson Learning.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathematics.*