CONSTRUYENDO LA NOCIÓN DE FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA: ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE

S. Maldonado, G. Montiel y R. Cantoral
México, Cinvestav – IPN
gmontiel@ipn.mx, rcantor@mail.cinvestav.mx

Resumen

La enseñanza contemporánea se ve modificada, considerablemente, a causa de los resultados recientes de la investigación en matemática educativa tanto al nivel nacional como al de las diferentes regiones y escuelas de pensamiento en el mundo de hoy; estos resultados plantean, por ejemplo, que los asuntos del aprendizaje ligados al papel de la representación, la visualización y la utilización de tecnologías de la información juegan un papel prioritario en el diseño de secuencias didácticas novedosas para la escuela y la universidad. En el marco de este curso, dimos cuenta del estudio de las condiciones de construcción social de las funciones trigonométricas y lo presentamos a la luz de propuestas didácticas para favorecer los aprendizajes de los alumnos.

Antecedentes

Nuestro curso se apoya en el diseño de una presentación para el tratamiento de las funciones según la propuesta del libro *Funciones: visualización y pensamiento matemático* de Cantoral y Montiel, (2001). Este texto fue diseñado con base en las investigaciones conducidas por el equipo de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav – IPN en México. Se compone de secuencias didácticas sobre la noción de función desde una perspectiva en la que la visualización juega un papel relevante, con la mediación del uso de una particular tecnología, las calculadoras con capacidad gráfica con opciones dinámicas. Esta aproximación ha sido trabajada en diversos programas de formación docente en nuestro país, así como en eventos internacionales sobre enseñanza de la matemática. Para desarrollar esta propuesta consideramos como punto de partida que previo al estudio del cálculo, se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un “isomorfismo” operativo entre el álgebra básica y el estudio de las curvas, mejor aun, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico (Cantoral y Farfán, 1998).

En nuestra opinión, el concepto de función ha sido una pieza clave en el desarrollo de la matemática, las ciencias y la tecnología. Aunque algunos de los resultados de investigación han llegado al nivel de propuestas didácticas, en la mayoría de las “clases reales” se le sigue reduciendo a una mera presentación formal y se acompaña de un tratamiento algorítmico entre los alumnos.

El proceso de transposición didáctica no es un proceso simple ni lineal, como se ha documentado ampliamente por la teoría antropológica de la didáctica de Yves Chevallard, y se sabe además que la participación de los profesores en tal proceso resulta de la mayor importancia, pues serán ellos quienes al final, con sus clases cotidianas podrán participar en el desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes. Investigaciones como (Vinner, 1983; Dreyfus y Eisenberg, 1990; Breidenbach, et al., 1992, Dubinsky y Harel, 1992) tratan sobre el concepto de función y reportan dificultades ligadas a su aprendizaje. La mayoría de las aproximaciones teóricas que abordan la noción de función, han puesto la atención en la construcción de significados a través de procesos que bien podríamos llamar mentales. Vinner (1983) reporta por ejemplo algunas imágenes del concepto que desarrolla el alumno, en las que domina la regularidad en sus representaciones, se tiene también un cierto rechazo a las fórmulas y gráficas de funciones definidas por intervalos, a las fórmulas y gráficas de funciones constantes (por la ausencia de la variable independiente o la falta de variación en el bosquejo de la gráfica), entre otras. En otro sentido, apropiarse del significado de la noción de función implica formar una imagen de ella, tener estructuras cognitivas que se asocien al concepto, incluyendo representaciones mentales, procesos y propiedades asociados, más que la definición formal del concepto. Sin embargo, el cerebro no es una entidad puramente lógica, la manera compleja en la que funciona está a menudo en desacuerdo con la lógica matemática. El desarrollo de las imágenes conceptuales y de razonamiento, como camino hacia la comprensión y el aprendizaje de las ideas matemáticas, no puede ser coherente durante todo el tiempo pues los estímulos sensoriales excitan ciertos caminos neuronales e inhiben otros, pudiéndose producir conflictos congnitivos entre partes inconscientes de la imagen conceptual construida por el sujeto (Vinner y Tall, 1981).

En (Dubinsky y Harel ed., 1992; Breidenbach, et al., 1992) se hace una extensión del análisis piagetiano de la percepción y de la inteligencia usando el marco teórico de la abstracción reflexiva mediante acciones, procesos, objetos y esquemas, para hablar de la apropiación de las nociones. En términos generales, ellos reportan en lo que respecta a la noción de función, la complejidad que implica el pasaje de la concepción de acción a la concepción de proceso, debido a ciertas restricciones como la debida a su concepción (restricción de manipulación, restricción de cantidades, restricción de continuidad en la gráfica). Se refieren a una concepción de acción cuando el alumno requiere de las instrucciones precisas, como por ejemplo del empleo de fórmula algebraica para estar en condiciones de realizar transformaciones sobre ella, evaluar en puntos específicos o realizar la composición de dos funciones haciendo las sustituciones correspondientes, digámoslo así, haciendo sólo un paso a la vez. Una concepción de proceso significa bajo este enfoque, el tener una idea más dinámica, poder pensar a la función como algo que recibe una o más entradas y que regresa salidas o encontrar la inversa de una función. Esta etapa requiere de las coordinaciones de varias acciones. La concepción de objeto se logra cuando se manipulan las funciones mediante otras acciones y procesos, por ejemplo, cuando se derivan. Lograr la concepción de esquema involucra acciones, procesos y objetos del concepto de función, y distingue cuales pertenecen a cada esquema.

Otra postura respecto de esta noción de función se establece en términos de la llamada *dialéctica herramienta - objeto* de Régine Douady, quien reporta la existencia de dificultades para considerar a las funciones como *herramientas* en el trabajo matemático y, de forma más notoria, para traducir al contexto de funciones aquellos problemas que han sido planteados en otros contextos matemáticos como el numérico, geométrico, o externos a la matemática y que requieren de una *traducción* para ser resueltos.

En las aproximaciones teóricas mencionadas se le confiere un estatus importante al manejo de las diferentes *representaciones* del concepto de función, ya sea en términos de imágenes del concepto, concepciones de acción, proceso, objeto y esquema o en la dialéctica herramienta objeto. La formación del pensamiento científico, particularmente en matemática, está íntimamente ligado al desarrollo de simbolismos específicos para *representar* a los objetos y a sus relaciones, por tanto, el progreso de los conocimientos implica la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos (Ferrari, 2001). Por su parte, en (Duval, 1995) se señala que no puede existir comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación, pero se requiere del manejo de estas representaciones para comprender el objeto. Se busca entonces la *formación, tratamiento* y *conversión* de los registros semióticos de representación del objeto para lograr su aprendizaje. Se ejemplifica este proceso con un esquema de la articulación de registros semióticos para el caso de la función cuadrática, lo que nos hace pensar que se requiere de un sistema de representación semiótico específico de este objeto, en otras palabras, que este sistema sería distinto de aquel que se utilice en la función lineal, o en una función trascendente por ejemplo.

Sin embargo, las dificultades ligadas al aprendizaje del concepto de función no pueden limitarse al manejo y articulación de sus representaciones, pues existen también obstáculos epistemológicos inherentes al concepto mismo y no así a las particularidades de las maneras de enseñarlo, son propios de la construcción cultural. Para otros autores, los entendimientos relativos al concepto de función consisten de la identificación de cambios observados a nuestro alrededor como un problema práctico a resolver, así como el reconocimiento de regularidades en las relaciones entre cambios como una manera de estudiarlos. Ignorarlos como condiciones necesarias para el desarrollo de la noción de función, conllevaría enfrentar un obstáculo epistemológico, relativo a la filosofía de la matemática, respecto a considerar que los problemas prácticos no conciernen a esta disciplina. Esto desconocería lo sucedido en la historia de las ideas, pues las funciones aparecieron como herramientas para predecir y describir fenómenos de la naturaleza. Por otro lado, se considera que el desarrollo de una fuerte creencia en el poder de las operaciones formales con expresiones algebraicas y la creencia que sólo las relaciones que pueden expresarse mediante una fórmula analítica son funciones constituyen otro obstáculo. En tanto que, discriminar entre la función y las herramientas analíticas utilizadas para describir una ley implicaría un acto de entendimiento. Además se establece que la definición es una descripción del objeto conocido a través de los sentidos. La definición no determina al objeto, sino el objeto a la definición. Superar este obstáculo requeriría la capacidad de *discriminar* entre una definición matemática y la descripción del objeto, es decir, hacer una *síntesis* de la concepción general de función como objeto. Tomar en consideración los elementos epistemológicos de la construcción de los conceptos nos hace pensar en cómo enfrentar la problemática del aprendizaje del concepto de función cuando tenemos distintos tipos de funciones (algebraicas, racionales, trascendentes, entre otras), cada una con origen en un contexto específico, con distintas propiedades analíticas, esto es, con epistemologías propias, esto lo aborda ampliamente la socioepistemología.

Bajo este enfoque, se sabe que un concepto no se reduce a su definición, y que se constituye en distintos contextos de representación. La articulación y vinculación de estos contextos son necesarias para el entendimiento del concepto, pero no suficientes. Por ejemplo, para el caso del concepto de función, el alumno debe reconocerlo como definición, relación de conjuntos, tabla de valores, fórmula, gráfica, representación icónica; y, vincular y transitar entre una y otra, pero además, deberá darle una *funcionalidad* al concepto dentro y fuera de escenarios escolares. Esta funcionalidad debe reconocerse en su construcción social, y por lo tanto reproducir ciertas prácticas culturales.

Dado que el entendimiento es parte del complejo mundo del pensamiento y comportamiento humano, hay elementos tales como la expresión, el gesto, los movimientos, la interacción con el medio, que contribuyen al entendimiento de los problemas y a su resolución. Quizá por ello las corrientes sicológicas se han ocupado de los asuntos de visualización de los conceptos matemáticos, incorporando heurísticas de aprendizaje, contextos de representación, herramientas visuales, entre otras. En su mayoría, toman en cuenta la articulación de contextos y sus procesos cognitivos relacionados como la ***visualización de los conceptos.***

Este curso se enfocó al estudio de los efectos del juego de marcos, el algebraico y el analítico en particular, en la construcción de propiedades analíticas de las funciones trigonométricas. En el tránsito de estos marcos para las funciones trigonométricas, buscamos localizar y analizar las propiedades asociadas a las funciones circulares o trigonométricas, tanto al nivel del origen del conocimiento como al de la forma en que los estudiantes pueden participar de dicho proceso.

Haciendo un estudio breve de los programas curriculares en cuanto al estudio de función trigonométrica, observamos que para definirlas se presentan elementos involucrados a su aplicación; tales como el triángulo, círculo trigonométrico, medida de ángulos. El interés principal para su presentación radica en solo aprender los términos que la definen para su uso como herramienta en la solución de problemas.

Ahora bien, consideramos de partida que la trigonometría clásica se basa en el estudio de las propiedades de los triángulos, y de las razones trigonométricas como medios principales para estudiar dichas propiedades; en la trigonometría analítica en cambio, se inicia con el círculo, de modo que el círculo unitario permite dar otra definición a las funciones trigonométricas, mediante las que se estudian sus propiedades de naturaleza analítica. El paso de la medida de los ángulos en grados a la medida de los ángulos en radianes plantea un escenario de interés para los estudios didácticos, en este estudio nos interesaremos más por el tránsito que se da de las funciones trigonométricas sobre ángulos a las funciones trigonométricas sobre reales. Este curso desarrolló estrategias didácticas para estos fines.

En algún sentido, la limitación que introduce el tratamiento de las funciones trigonométricas restringidas a los ángulos es matemáticamente innecesaria, y de hecho consideramos que puede constituirse como un obstáculo didáctico para el aprendizaje. Con frecuencia en las clases y en las aplicaciones matemáticas, se deberá tratar con funciones trigonométricas como funciones del tiempo o de la distancia, o simplemente como funciones de un número real. Pero debemos señalar que si bien la diferencia entre sen(2 rad) o sen(2°) o sen(2) no tiene demasiada importancia significativa en los textos y en las clases de matemáticas, si creemos que plantea una dificultad mayor al nivel de los procesos de aprendizaje. Esto se acentúa cuando notamos que en las diferentes calculadoras con capacidad gráfica, o en los programas computacionales con posibilidades de graficación, se emplea la misma tecla *sen* para todos los fines, independientemente del dominio de definición o de las unidades de medida que se elijan, ya sea para evaluar una razón o para graficar una función.

Aunque la presentación escolar de las funciones trigonométricas será restringida en los primeros años de su enseñanza a las relaciones entre las medidas de los lados de los triángulos rectángulos con las de sus ángulos interiores, más adelante el alumno encontrará que tiene que operar sobre situaciones novedosas, como por ejemplo habrá de tratar con ángulos superiores a 180° sin hacer alusión a triángulo alguno, o deberá graficar funciones que combinan una parte algebraica con otra trascendente, como cuando debe estudiar el crecimiento de $f(x) = \operatorname{sen} x + x$, o decidir sobre la suavidad de la gráfica de la función g en el origen, con: $g(x) = \cosh - 1$ si $x \geq 0$; pero es 0 si $x < 0$, del mismo modo ocurre cuando deba calcular límites que no se abordan con estrategias algebraicas, como por ejemplo los límites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} \text{ o } \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}.$$

También tendrá que discutir la naturaleza de la convergencia de series que involucran, de diferentes formas, a las funciones trigonométricas, como por ejemplo:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \text{ o bien } \sum_{1}^{\infty} \frac{sen(2n-1)x}{2n-1}$$

Bajo este enfoque, no estaremos limitando nuestra problemática de interés, al papel de las representaciones semióticas en la actividad cognitiva de los alumnos, ni a la formación de representaciones mentales entre los escolares, sino más bien, desarrollaremos la tesis de que la epistemología de la funciones trigonométricas, y el uso social que de ellas se hace, impregnan de significados a dichos conceptos. Fundamentalmente, asumimos que los obstáculos epistemológicos ligados a la construcción de función trigonométrica deben ser considerados en un diseño de ingenierías didácticas particulares.

Iniciamos el curso con la resolución de ecuaciones algebraicas mediante factorización de polinomios con coeficientes reales, estudio gráfico y algebraico de las funciones potencia. Queremos trabajar la naturaleza de las raíces de una ecuación polinomial: simples, dobles, triples y cuádruples, y sobre el cómo se forma un patrón de comportamiento gráfico para $y=x^{2n}$ y $y=x^{2n+1}$, la función seno, incluida su gráfica y sus propiedades como periodicidad, acotación, oscilación, pero que no se haya estudiado a la función seno como el límite de una particular serie potencias.

En este sentido, nuestra propuesta se desarrollará sobre factorización de polinomios y su clasificación por la naturaleza de sus raíces, tomamos la forma algebraica y la naturaleza del contacto entre la gráfica de una función potencia y el eje X. Centraremos la atención en las formas de escritura, de argumentación y de validación y del empleo de gestos y movimientos corporales que pongan en juego ante problemas no rutinarios.

Pero un tratamiento, basado en gráficas, movimientos y argumentaciones con respecto de las funciones trigonométricas no podría reducirse a transformaciones y traslaciones, sino dar inicio por la construcción de sus primitivas (sen x, cos x, tan x). De aquí que, como segunda parte del curso, se reflexionó y discutió sobre los momentos de ruptura que precisa la función trigonométrica para su construcción en el aula, y que proponemos son:

- De la realidad macro al modelo a escala
- La razón como abstracción de la proporción
- Extracción de la razón de un referente teórico: el triángulo.
- Conversión de unidades: grados $\leftrightarrow$ radianes $\leftrightarrow$ reales
- De las funciones reales a las funciones complejas

de donde proponemos nuestra hipótesis de investigación, a saber, *que la función trigonométrica abstrae propiedades de las tablas trigonométricas y del estudio de los triángulos, pero obedece a prácticas de naturaleza distinta que la trigonometría como rama de la geometría*. De aquí que nuestro fundamento teórico sea aquel que incorpore las cuatro componentes de la construcción social del conocimiento matemático, la *socioepistemología*.

Referencias

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. y Nicholson, D., (1992) Development of the process Concept of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23 (3), 247 – 285.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, 42, 353 – 369.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001) *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall.

Chevallard, Y. (1985) *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigne.* La Pensee Sauvage, Grenoble, France.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T (1990). On the reluctance to visualize in mathematics. Visualization in teaching and learning mathematics. En W. Zimmerman y S. Cunningham (Eds.) MAA Notes 19, 25 –38.

Duval, R. (1995) *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.). (1992): *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Notes 25, MAA.

Ferrari, M. (2001) Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. Tesis de Maestría. Cinvestav – IPN. México.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics **12**, 151 – 169

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of mathematics education, science and technology.* 14 (3), 293 – 305