# REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN EL CONCEPTO "RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES POLINÓMICAS". ANÁLISIS A PRIORI

E.E. Rechimont y M.E. Ascheri
Universidad Nacional de La Pampa, Argentina
mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar

## Resumen

Analizamos los registros de representación semiótica y las correspondientes funciones semióticas implícitos en la solución de dos problemas propuestos para la Educación Polimodal, que consideramos pueden ser utilizados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción *Resolución Numérica de Ecuaciones Polinómicas*, contemplada en los C.B.C. del mencionado nivel. Las representaciones juegan un rol fundamental en los procesos de construcción de conceptos, por lo que son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático (Hitt, 1996). Con este análisis a priori, pretendemos ver cuáles de los registros de representación son de mayor peso para incorporar o darle sentido al concepto: F*unciones polinómicas. Raíces de las correspondientes ecuaciones.* Tratamos de responder a las preguntas: ¿Cuáles son los distintos registros de representación puestos en juego en la solución de cada problema?. ¿Cómo se suceden?. ¿Cómo aparecen y cuál es la necesidad de su conversión?. ¿Cómo se coordinan en la actividad conceptual? ¿En qué medida la presentación del tema desde una situación problemática es beneficiosa para incorporar y dar sentido a la determinación de las raíces de una ecuación polinómica?.

## Introducción

El concepto *funciones polinómicas en una variable* figura en los Contenidos Básicos para la Educación Polimodal del Ministerio de Cultura y Educación de la Nación (1997). En los contenidos conceptuales del Bloque 2, Álgebra y Geometría, figura: *Funciones polinómicas en una variable. Operaciones. Raíces de una función polinómica.* La síntesis explicativa pone de manifiesto la relevancia que adquieren las funciones polinómicas como herramientas para representar relaciones funcionales de una variable describiendo situaciones de la vida real. Se menciona que los procedimientos para el cálculo de las raíces de polinomios, por métodos gráficos e iterativos, se podrá realizar con ciertos recursos didácticos: calculadoras, calculadoras graficadoras, computadoras. Los Contenidos Procedimentales no especifican explícitamente el tratamiento de estas funciones y/o ecuaciones. Uno de los objetivos primordiales en el estudio de las funciones polinómicas es la habilidad para determinar raíces de las correspondientes ecuaciones.

## Marco teórico

En el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se observa, últimamente, que gran parte de las investigaciones en Didáctica de la Matemática se desarrollan alrededor del uso de nociones semióticas, como la noción de representación. Esta noción se toma como equivalente a una señal externa, un signo o marca, esquemas o imágenes mentales, que muestran y hacen presente un concepto matemático. No es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de *representación* en Matemática (Duval, 1995). En las formas convencionales de representación, se distinguen dos familias de sistemas: *representaciones simbólicas* (carácter alfanumérico, se simulan mediante programas informáticos, la sintaxis se describe por reglas de procedimientos), y *representaciones gráficas* (de tipo figurativo, carácter analógico, sintaxis dada por reglas de composición y convenios de interpretación (Rico, 2000).

La representación pone en consideración el objeto *representante o significante* (símbolo o representación) y el *representado o significado* (contenidos conceptuales). Todo conocimiento moviliza una actividad de representación. Duval (1995) sugiere que no deben confundirse los objetos matemáticos con su representación, y define los registros de representación como un medio de expresión que se caracterizan por sus signos propios y la forma en que estos se organizan. Una palabra escrita, una notación, un símbolo o una gráfica representan a un objeto matemático. Cambiar la forma de una representación en matemática es difícil para los alumnos, y la comprensión de un contenido parece limitada a la forma de representación utilizada. Duval (1995) pone de manifiesto tres fenómenos estrechamente vinculados: *diversificación de los registros de representación semiótica, diferenciación entre representante y representado, coordinación entre los diferentes registros*. Estos fenómenos deben considerarse en la relación de enseñanza-aprendizaje.

Tendremos en cuenta, para el análisis de los problemas propuestos, las siguientes entidades (Godino, en Prensa): *lenguaje, situaciones, conceptos*, *propiedades.*

La actividad matemática surge cuando el sujeto se enfrenta a situaciones problemáticas (elementos extensivos) en cuya solución utiliza elementos ostensivos (representación usada en la actividad matemática) e intensivos (ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones). Godino (1998), denomina "entidades actuativas" a las acciones que realiza el sujeto en la búsqueda de una solución. La relación entre la actividad matemática y los procesos de difusión del conocimiento se da a través de las funciones semióticas, que permiten formular en términos semióticos el conocimiento matemático.

## Problemas propuestos

En la resolución de problemas en las que están implícitas funciones y ecuaciones polinómicas, se recurre en algunos casos a las propiedades de los polinomios (factorización) y en otros a métodos numéricos. Nos proponemos:

1) Ilustrar estas situaciones con el estudio de dos ejemplos: *el problema de la esfera y el problema de la caja,* 2) Efectuar un análisis didáctico de la resolución de ecuaciones polinómicas presentes en la solución de los problemas.

### I. El problema de la esfera

*En un cilindro de base circular de 10 cm de radio, cuya altura es mayor que dicho radio, reposa una esfera de 7 cm de radio que se recubre de agua (la superficie libre del agua es tangente a la esfera). Se reemplaza la esfera por otra de x cm de radio ($0<x\leq 10$), siendo la cantidad de agua en el cilindro la misma. A partir de estos datos, se desea estudiar los siguientes fenómenos respecto de la nueva esfera:*

*a) ¿Cuándo la esfera está más abajo que el nivel del agua (sin llegar a ser tangente)?.*

*b) ¿Cuándo la esfera supera el nivel del agua?.*

*c) ¿Cuándo la esfera está exactamente recubierta por el agua (es tangente)?.*

**Solución: Sea V(x) y V(7) el volumen de agua en el cilindro que recubre exactamente a la esfera de radio x y de radio 7, respectivamente. Podemos afirmar que:**

Si $V(7) > V(x)$, la esfera de radio x está más abajo que el nivel del agua; si $V(7) < V(x)$, supera el nivel del agua; si $V(7) = V(x)$, está exactamente recubierta por el agua.

El problema trae como consecuencia el estudio del signo de V(x) - V(7) para $0<x\leq 10$.

$$V(x)=\pi\, 100.2x-\frac{4}{3}\pi x^3=\frac{4}{3}\pi(150x-x^3);\quad P(x)=150x-x^3.\quad \text{Para}\quad 0<x\leq 10,$$

$V(x)=\frac{4}{3}\pi P(x)$.

El signo de P(x)-P(7) sobre (0,10], no parece fácil de analizar, salvo si se puede usar que es factorizable por (x - 7). P(x) - P(7) = (x - 7) Q(x) , (Q(x) polinomio).
$P(x)=150\,x-x^3$ y $P(7)=150\;7-7^3$, entonces $P(x)-P(7)=(x-7)(-x^2-7x+101)$.

$-x^2-7x+101$ admite las raíces: $x_1=\frac{\sqrt{453}-7}{2}$, $x_2=-\frac{\sqrt{453}+7}{2}$, ($x_1\approx 7{,}14$; $x_2\approx -14{,}14$).

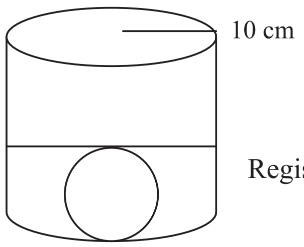
Se deduce, a partir de la siguiente tabla:

| x | $x_2$ | 0 | 7 | $x_1$ | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| x -7 | - | - | | + | + |
| $-x^2-7x+101$ | - | + | + | + | - |
| P(x) - P(7) | + | - | + | + | - |

si $x<7$, la esfera x está debajo del nivel del agua; si $7<x<x_1$, supera el nivel del agua; si $x=x_1$, es tangente al nivel del agua; si $x_1<x$, supera el nivel del agua.

**Análisis didáctico de la solución del problema**

La aprehensión del concepto funciones polinómicas, presenta las dificultades citadas por Hitt(1996) para el concepto de función. Si agregamos a ello la determinación de las raíces de las ecuaciones polinómicas, las dificultades y obstáculos son mayores.
El enunciado del problema es un elemento extensivo y el correspondiente registro semiótico es un registro verbal. Puede ser modelado en registros figural, analítico, simbólico, algebraico, tabular, etc. La imagen mental de la situación planteada la representamos en registro figural siendo el punto de partida a los distintos registros de representación involucrados en la solución.

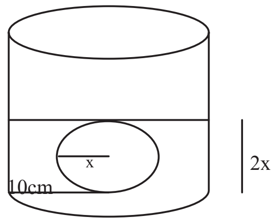



Registro figural

**Distintos registros de representación**

V(7), V(x) representan el volumen del agua en el cilindro que permite recubrir exactamente la esfera de radio 7cm y de radio x, respectivamente. A continuación se ponen de manifiesto funciones semióticas que relacionan V(x) con V(7) que conducirán hacia la solución requerida. Esta situación se expresa en registro simbólico: $V(7)>V(x)$ ; $V(7)<V(x)$ y $V(7)=V(x)$ y muestra como estas funciones semióticas ponen de manifiesto cuál es el nivel de agua del recipiente respecto de la esfera de radio x.

Las funciones semióticas precedentes dan origen al estudio del signo de $V(7) - V(x)$ para $0<x\leq 10$ para elaborar las respuestas solicitadas. Este estudio da origen a las funciones semióticas cuyo registro algebraico es: $V(x) - V(7) > 0$ ; $V(x) - V(7) < 0$ y $V(x) - V(7) = 0$, que constituyen el eje de la solución del problema.
Hasta esta instancia tenemos en escena elementos extensivos (enunciado del problema), ostensivos ($V(x)$, $V(7)$, $V(7) > V(x)$, $V(7) < V(x)$, $V(7) = V(x)$ ) y entidades actuativas (las relaciones anteriores).
En la solución matemática (algebraica) se acude al registro figural de la situación:




Una estrategia de solución (implica un trabajo con las funciones semióticas anteriores) se realiza en registros simbólico y analítico: $V(x)=\pi\, 100.2x-\frac{4}{3}\pi x^3=\frac{4}{3}\pi(150x-x^3)$ (1)
con lo que obtenemos la expresión $150x - x^3$ que corresponde a un polinomio de grado tres en la variable x. Representamos este polinomio: $P(x)=150x - x^3$ (registro analítico).
Luego, $V(x) = \frac{4}{3}\pi P(x)$ es un registro analítico que representa una transformación del registro simbólico – analítico dado en (1).
De igual forma, $V(7) = \frac{4}{3}\pi P(7)$, donde $P(7) = 707$, constituye un registro numérico.
El análisis del signo en $V(x) - V(7)$ conduce, según la solución que hemos propuesto, a estudiar el signo de $P(x) - P(7)$. La representación en registro algebraico correspondiente es: $P(x) - P(7) = 150x - x^3 - 707$. El análisis de este polinomio conduce a la solución del problema planteado, lo cual implica conocer los valores de x, o sea las raíces de la ecuación polinómica de grado tres. Con un registro analítico (en "$P(x) - P(7)$ es factorizable por $(x - 7)$") y mediante procedimientos algebraicos que ponen de manifiesto los correspondientes registros algebraicos, se obtienen los valores numéricos $(x_1,x_2)$ que forman un registro numérico.
Se representa en registro tabular las posibles variaciones de cada uno de los factores de $P(x) - P(7)$ y del polinomio $P(x) - P(7)$, que a su vez permiten analizar las variaciones de signos de $V(x) - V(7)$, para extraer las conclusiones del problema.
Cuando no resulta posible recurrir a las propiedades de los polinomios (teoremas de factorización) para resolver el problema, se suele recurrir a métodos numéricos. La comprensión de las relaciones entre representaciones mentales, computacionales y semióticas se logra, fundamentalmente, por la posibilidad de una clasificación de estos tipos de representación. Presentamos un problema que resume esta consideración.

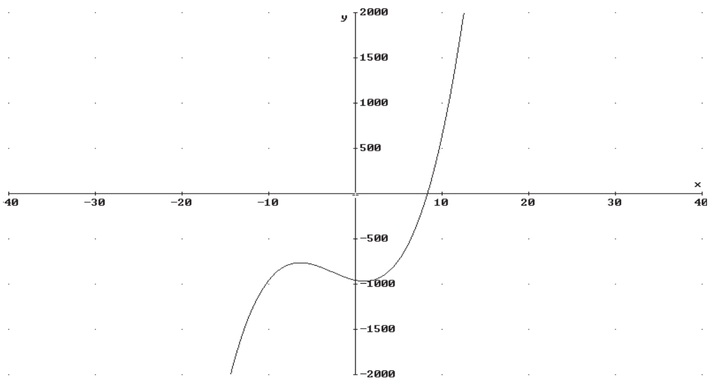
## II. El problema de la caja

*En una fábrica de chocolates se decidió envasar los bombones en un modelo de caja que sea un prisma de base x cm, de altura (x-2) cm, de profundidad (x+10) cm y cuyo volumen sea igual a 957 $cm^3$. Para poder armar esta caja se desean conocer las medidas de sus lados. Para ello:*
*a) Plantee la ecuación correspondiente, según los datos del problema.*
*b) Separe las raíces de esta ecuación realizando, primero manualmente y luego con la computadora, el gráfico de la función polinómica resultante.*
*c) En el apartado b) localizó las raíces de la ecuación polinómica. Utilizando estos datos y realizando 10 iteraciones del método de bisección, obtenga las medidas de los lados de este prisma.*
*c) Compruebe los resultados obtenidos utilizando la PC.*

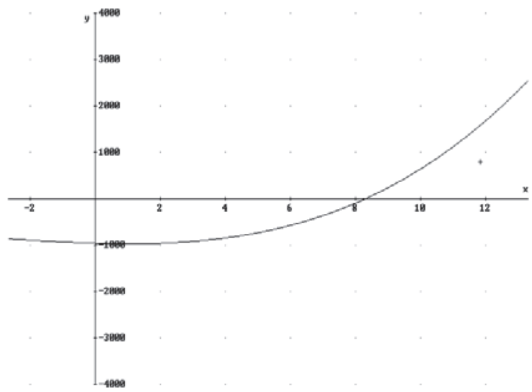
**Solución**

a) Planteamos: $V_{prisma} = x\,(x+10)(x-2) = 957$, de donde, $x^3 + 8x^2 - 20x - 957 = 0$.
   Llamamos: $P(x) = x^3 + 8x^2 - 20x - 957$.
b) Para hacer el gráfico manualmente primero calculamos la tabla de valores

| x | P(x) |
|---|---|
| -11 | -1100 |
| -10 | -957 |
| -5 | -782 |
| 0 | -957 |
| 5 | -732 |
| 8 | -93 |
| 9 | 240 |
| 10 | 643 |




Se observa que la única raíz real de esta ecuación polinómica se encuentra entre 8 y 9. Más precisamente, observando la gráfica que se realiza utilizando el software Derive y cambiando el rango de graficación, entre 8 y 8.5.



c) Método de bisección.

| Nro. de iter, n | $a_{n-1}$ | $x_{n-1}$ | $b_{n-1}$ | $f(a_{n-1})$ | $f(x_{n-1})$ | $f(b_{n-1})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 8.25 | 8.5 | -93 | -15.984375 | 65.125 |
| 2 | 8.25 | 8.375 | 8.5 | -15.984375 | 24.052734 | 65.125 |
| 3 | 8.25 | 8.3125 | 8.375 | -15.984375 | 3.905518 | 24.052734 |
| 4 | 8.25 | 8.28125 | 8.3125 | -15.984375 | -6.071503 | 3.905518 |
| 5 | 8.28125 | 8.296875 | 8.3125 | -6.071503 | -1.091022 | 3.905518 |
| 6 | 8.296875 | 8.304688 | 8.3125 | -1.091022 | 1.405239 | 3.905518 |
| 7 | 8.296875 | 8.300078 | 8.304688 | -1.091022 | 0.156607 | 1.405239 |
| 8 | 8.296875 | 8.298828 | 8.300078 | -1.091022 | -0.467334 | 0.156607 |
| 9 | 8.298828 | 8.299805 | 8.300078 | -0.467334 | -0.155395 | 0.156607 |
| 10 | 8.299805 | 8.300293 | 8.300078 | -0.155395 | 0.000598 | 0.156607 |

d) Con la computadora (programa hecho en MATLAB) y según los datos del problema: nº.de iter.: 10; $a_0$= 8; $b_0$=8.5, se obtiene que $x \approx 8.3$ y $P(8.3) \approx 0.0006$.
Luego, se llega a la conclusión de que la base del prisma es de 8.3 cm, su altura es de 6.3 cm y su profundidad es de 18.3 cm. Además, se puede comprobar que para estas medidas de las aristas, se tiene que $V_{prisma}$ = 957.907 $cm^3 \approx 957\ cm^3$.

**Análisis didáctico de la solución del problema**

Analizaremos los distintos registros de representación que se abordan en esta situación problemática, propuesta con la finalidad de la comprensión y la aprehensión de la *Resolución Numérica de Ecuaciones Polinómicas.*

En un primer análisis del enunciado de este problema detectamos un registro verbal (“el lenguaje común es el utilizado para representar situaciones del mundo real”). Además, podemos observar que subyacen en la posible solución los registros simbólicos (... *un prisma de base x cm* ...), analíticos y algebraicos ( ... *Plantee la ecuación* ...), tabular y grafical (... *separe las raíces* ..., *el gráfico* ...). También podemos detectar un registro numérico (... *realizando 10 iteraciones del método de bisección* ...). En este proceso se pasa de los registros analítico y algebraico a los registros algebraico y numérico a través de la utilización de un método numérico (método de bisección).

El enunciado de la tarea describe una situación problemática para los alumnos a los que se propone: construir una argumentación que convenza de la necesidad universal y atemporal de la verdad expresada en el enunciado. Desde el punto de vista de la pragmática, el contexto en que la tarea es propuesta por el investigador desencadenan procesos interpretativos por parte de los alumnos. Las palabras y expresiones usadas en el enunciado y la solución que desencadenan procesos interpretativos son las siguientes: *volumen de un prisma, plantee, separe y localice las raíces de una ecuación polinómica, grafique la función polinómica, obtenga las medidas de los lados utilizando un método numérico, compruebe.* Estos términos y expresiones denotan entidades conceptuales u operaciones matemáticas controladas por definiciones que el sujeto debe recordar y saber aplicar en la tarea. Entra en juego, en

este caso, la utilización de la computadora como una herramienta colaboradora en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la *Resolución Numérica de Ecuaciones Polinómicas* (por ejemplo, en la parte del enunciado: ... *Compruebe los resultados obtenidos utilizando la PC*).
Con la introducción de: ... *realizando 10 iteraciones del método de bisección* ..., en este proceso se ha pasado a los registros algebraico – numérico.
En la solución de este problema, se aplicaron diversos registros de representación.
En el apartado a) destacamos los registros verbal, analítico, simbólico y algebraico:
* Verbal: el lenguaje común se utiliza para representar esta situación del mundo real.
* Analítico: se hace referencia al volumen del prisma, según la definición (el volumen del prisma es igual al área de la base por la altura del prisma).
* Simbólico: se da esta definición mediante expresiones simbólicas sustentadas por las reglas de la lógica formal ($V_{prisma} = x\ (x + 10)\ (x - 2) = 957$).
* Algebraico: se llega a la expresión final por medio de operaciones algebraicas ($x^3 + 8x^2 - 20x - 957 = 0$).
En el apartado b) destacamos los registros tabular y grafical:
* Tabular: los valores numéricos de la función polinómica están organizados en una tabla de valores.
* Grafical: corresponde a la representación en el plano cartesiano, incluyendo los convenios implícitos en la lectura de gráficos (interpretación de ejes coordenados, de unidades, de corte o cruce de la gráfica con respecto al eje x, etc.).
En el apartado c) destacamos los registros simbólico, algebraico, analítico, tabular y numérico:
* Simbólico: se dan el número de iteraciones (n), extremos de los intervalos que contienen a la raíz de la ecuación polinómica ($a_{n-1}$, $b_{n-1}$), punto medio ($x_{n-1}$), valores de la función en los extremos y punto medio ($f(a_{n-1})$, $f(x_{n-1})$, $f(b_{n-1})$), a través de expresiones simbólicas sustentadas por las reglas del método de bisección.
* Analítico – algebraico: se obtiene el punto medio a partir de la definición, utilizando la expresión algebraica correspondiente ( $x_{n-1} = \left(a_{n-1} + b_{n-1}\right)/2$ ).
* Numérico: se realizan todas las evaluaciones que conllevan y que están involucradas en el método de bisección.
* Tabular: todos los valores numéricos obtenidos se organizan en una tabla.
Finalmente, para facilitar y mejorar la comprensión e interpretación de los resultados obtenidos manualmente y para comprobar la validez de los mismos, se utiliza la computadora. Las tareas de computación son importantes en la enseñanza – aprendizaje de los métodos numéricos, pues ayudarán a mejorar las habilidades de los alumnos, tanto en el conocimiento de la teoría como en la práctica de las temáticas involucradas.

## Conclusiones

El análisis a priori esbozado en los problemas presentados, pone de manifiesto que para uno de ellos es factible la búsqueda de la solución en una marco geométrico-algebraico utilizando registros de representación de uso frecuente por parte de los alumnos. En el otro problema, y debido a la complejidad, la determinación de las raíces de la ecuación polinómica requiere del uso de procedimientos numéricos para su solución. En este caso, la utilización de herramientas computacionales resulta ideal.
El análisis a priori puede ayudar a superar la creencia de que la solución de algunos problemas es simple, pues se explicitan diversos registros y se ponen en juego conversiones de uno a otro, debiendo tener en cuenta la correspondiente coordinación. Ello implica posicionarse en un determinado marco del cual es necesario conocer sus reglas lógicas. Este análisis permitirá identificar los puntos críticos implícitos en la solución, la necesidad de ciertos conocimientos previos y

prever estrategias didácticas para afrontar dicha solución. También permite mostrar la compleja trama de entidades y relaciones entre los registros de representación que se ponen en juego en actividades matemáticas elementales. Este tipo de análisis es útil para describir los procesos de interpretación y comunicación del saber matemático, e identificar las razones que pueden condicionar la actividad de aprendizaje.
Esperamos que los alumnos comprueben lo indispensable del uso de las computadoras para resolver cierto tipo de problemas y tengan una demostración tangible de cómo pueden ayudarles a realizar estas tareas que conllevan una gran cantidad de cálculos, minimizando los tiempos que requieren las mismas.

## Bibliografía

Artigues, Ch. y otros.,(1991), *Math 1^res Set E, analyse*, Hachette Lycées, París.

Chevallard,Y., 1992, *Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportes par une approche anthropologique.* Recherches en Didactique des Mathématique, 12.

Duval, R., (1995), *Sémiosis et pensée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals,* Peter Lang S.A., Editions scientifiques européennes.

Godino, J. D., (1998), *Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática,* Comunicación presentada en el VIII Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica,

Granada, España.

Godino, J., (en Prensa), *Un enfoque semiótico de la cognición matemática,* Univ. de Granada.

Godino, J. D. - Batanero, C., (1994), *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos.* Recherches en Didactique des Mathématique, Vol. 14 (3), pp. 325-355.

Godino, J. D. – Recio, A. M., (1998), *Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en Educación Matemática,* Proceedings of the 22 th International Conference of PME, Vol. 3, South Africa.

Hitt, F., (1996), *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos,* Investigaciones en Matemático Educativa, México:

Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 245-264.Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, (1997), *Contenidos Básicos para la Educación Polimodal,* República Argentina.

Piaget,J.,1968,*La formation du symbole chez l'enfant,* Neuchatel, Delachaux & Niestlé.

Rico, L., 2000, *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática,* Ponencia en el IV Simposio SEIEM (Huelva, 2000), Universidad de Granada, España.