CARACTERIZACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES CON RESPECTO A LA TEORÍA DE CONJUNTOS EN UN GRUPO DE MAESTROS EN FORMACIÓN

Mario José Arrieche Alvarado
U. Pedagógica Experimental Libertador-Instituto Universitario Pedagógico de Maracay
Email: marioarrieche@hotmail.com

Resumen

En este trabajo tratamos de caracterizar los principales elementos de los significados personales que los estudiantes para maestros de educación primaria atribuyen a las nociones conjuntistas. Forma parte de un proyecto de investigación sobre el papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros, que se desarrolló en el programa de doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (España) 1998-2002, por lo que incluimos una primera sección describiendo este problema didáctico, seguida del estado de la cuestión sobre la comprensión de nociones conjuntistas por estudiantes universitarios.

Introducción

En este trabajo presentamos algunos resultados de un estudio cognitivo realizado en un grupo de maestros de primaria en formación, con la finalidad de caracterizar sus significados personales (interpretaciones personales, errores, dificultades de comprensión, etc) con respecto a nociones básicas de teoría de conjuntos. Usamos la noción de significado personal en el sentido dado por Godino y Batanero (1994, 1998) como el sistema de prácticas (actuativas y discursivas) manifestadas por un sujeto ante una cierta clase de tareas. Estas manifestaciones indicarán los aprendizajes logrados, así como las respuestas erróneas, juzgadas desde el punto de vista institucional, y que son indicativas de las dificultades y conflictos cognitivos de los sujetos en el estudio del tema. En nuestro caso, las tareas que vamos a proponer involucran las nociones básicas de la teoría de conjuntos siguientes: conjunto, subconjunto, elemento de un conjunto, conjunto vacío, conjunto unitario, intersección, unión, complementario, producto cartesiano y las definiciones simbólicas de estos conceptos. Por cuestiones de espacio en este informe describimos sucintamente el planteamiento del problema, la metodología, análisis e interpretación de los datos y las conclusiones obtenidas.

Planteamiento del problema

A pesar de la importancia que la teoría de conjuntos ha tenido en los diferentes niveles educativos en el período conocido como "matemática moderna" se produjeron fuertes críticas a su enseñanza en secundaria por prestigiosos matemáticos de la época, tales como Feymann (1965), Kline (1973), Freudenthal (1983), etc. Como consecuencia de estas críticas, se logra que se supriman estos contenidos en los niveles referidos. Sin embargo, hemos encontrado investigaciones con maestros en formación sobre dificultades de comprensión en nociones conjuntistas realizadas por Linchevski y Vinner (1988), Zazkis y Gunn (1997) y Fischbein y Baltsan (1999).

La pregunta inicial que motivó la investigación fue, *¿cuál es el papel que debería desempeñar el estudio de los conjuntos, aplicaciones y relaciones en la formación de los maestros?* Puesto que en los últimos diseños curriculares se ha suprimido la teoría de conjuntos de la educación primaria, estamos tentados a responder que el papel de la teoría de conjuntos en la formación de los maestros debe ser nulo, dado que no tienen que enseñar esos contenidos. Esto implica que podemos prescindir del lenguaje de los conjuntos, aplicaciones y relaciones cuando los maestros estudien los sistemas numéricos, la geometría y las magnitudes, y otros contenidos matemáticos que requieren de estos conceptos para ser estudiados. Pero nos queda la duda si con esa opción drástica creamos una barrera para que los maestros puedan ampliar sus conocimientos matemáticos sobre temas algo más avanzados que los que se supone tendrán que explicar en el ejercicio de su profesión. También es posible que perdamos la oportunidad de ofrecer una presentación estructurada de los restantes contenidos del programa. Por lo que creemos que para tomar una decisión fundada es necesario disponer de información que no está directamente accesible y, por tanto, requiere investigación.
Esa información debe permitir responder con fundamento a preguntas más específicas que podemos clasificar según tres dimensiones o categorías (Godino, 1999):

(1) ¿Qué es la "teoría de los conjuntos (TC)"? ¿Qué formulaciones se han hecho de dicha teoría matemática en distintos períodos y circunstancias? ¿Qué papel desempeña en la matemática? ¿Qué papel puede desempeñar en las matemáticas escolares? ¿Qué interés tiene en la formación del maestro? (*problemática epistémica*, esto es, relativa al conocimiento matemático).

(2) ¿Qué dificultades de comprensión tienen los distintos contenidos que configuran la TC para futuros maestros en formación? ¿Cuáles son los motivos de tales dificultades? (*problemática cognitiva*).

(3) ¿Cómo se enseña la teoría de conjuntos en el nivel y contexto institucional fijado? ¿Qué factores instruccionales condicionan, y cómo, el aprendizaje de los estudiantes de la TC? ¿Qué patrones de interacción profesor- alumno son óptimos para facilitar el aprendizaje de la TC? (*problemática instruccional*, esto es, relativa a la enseñanza y al aprendizaje).

En nuestro caso tratamos de responder la pregunta sobre la problemática cognitiva.

Metodología

Enfoque metodológico

Para investigar los significados personales de los estudiantes con respecto a las nociones básicas de la teoría de conjuntos utilizamos principalmente el enfoque cuantitativo, determinando los porcentajes de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas a las preguntas de un cuestionario. Por otro lado, y puesto que el enfoque cuantitativo nos indica las tendencias existentes en la población, pero no muestra toda la riqueza de la variabilidad individual, ni explica el por qué de la misma, vamos a complementar el estudio mediante técnicas de tipo cualitativo. Este estudio incluye el análisis de los errores de las respuestas al cuestionario y un estudio de casos mediante entrevista clínica, que nos va a permitir caracterizar con más rigor las dificultades y grado de comprensión logrado por los estudiantes de nuestra muestra

Población y muestra

La población objeto de estudio, serán los estudiantes de primer año del programa de Formación de Maestros. La muestra ha sido tomada en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. El estudio se realizará con uno de los grupos de la asignatura Matemática y su Didáctica (primer curso), formado por 122 alumnos, correspondiente al mencionado programa.

Instrumentos de evaluación

Los instrumentos de recogidas de datos utilizados en esta investigación fueron el cuestionario y la entrevista clínica El cuestionario estaba formado por 7 ítems conteniendo en total 25 subitems con la finalidad de determinar lo aprendido, los errores y las dificultades presentadas por los estudiantes en la comprensión de estos contenidos. Se trataba de preguntas de respuestas abiertas donde el alumno tiene o bien que definir conceptos, efectuar operaciones, argumentar la verdad o falsedad de proposiciones, realizar comprobaciones y demostraciones, o resolver problemas.
Por otro lado, la entrevista fue realizada a dos estudiantes, para profundizar en los aspectos que no quedaron claros en las respuestas al cuestionario y complementar la información de algunas cuestiones que no fueron consideradas en el mismo.

Análisis e interpretación de datos

Hemos clasificado las respuestas elaboradas en correctas, parcialmente correctas, incorrectas y respuestas en blanco (cuando el alumno no responde o su respuesta es insuficiente para entender su significado). Presentamos los propósitos y el análisis de contenido de cada ítem del cuestionario considerando los tipos de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas. A manera de ilustración en este trabajo sólo describiremos el análisis realizado al ítem Nº 3. No obstante, en Arrieche (2000) se puede ver el tratamiento completo realizado al resto de los ítems que conformaron la prueba.

Item Nº 3

Para cada una de las siguientes proposiciones escribe una V si consideras que es verdadera y F si es falsa:

a) $A \in A$ b) $\emptyset \subset A$ c) $x \in \{x\}$
d) $\emptyset \in \emptyset$ e) $A \subset A$.

En cada caso, explica tu respuesta.

El propósito de este ítem es observar en el futuro maestro la habilidad para reconocer, en una expresión conjuntista, algunas propiedades de los subconjuntos y el uso de los conceptos de: elemento de un conjunto, conjunto vacío y conjunto unitario.

Consideramos que la respuesta es correcta cuando los estudiantes explican razonadamente su respuesta de acuerdo con el concepto correspondiente. Las respuestas correctas tipo se dan a continuación:

3a) $A \in A$, falsa. Un conjunto no puede ser elemento de él mismo.
3b) $\emptyset \subset A$, verdadera. El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto (propiedad de subconjunto).
3c) $x \in \{x\}$, verdadera. EL único elemento del conjunto $\{x\}$ es x.
3d) $\emptyset \in \emptyset$, falsa. El conjunto vacío no posee elementos (También es válida la misma justificación de 3.a)
3e) $A \subset A$, verdadera. Todo conjunto es subconjunto de él mismo (propiedad de subconjunto).

Las respuestas parcialmente correctas ocurren cuando el estudiante acierta la veracidad de la proposición, pero su explicación no es clara o es incompleta, como en los siguientes ejemplos:

Alumno 2 (Item 3a) $A \in A$ *"F. Porque un conjunto no puede a otro conjunto".*
Alumno 20 (Item 3b) *"$\emptyset \subset A \Rightarrow V$. Es verdadera puesto que el elemento vacío siempre está integrado o forma parte de un conjunto. todos los conjuntos cuentan con él.*
$A = \{1\} \{2\} \{3\} \{\emptyset\}$"

Las respuestas incorrectas se dan cuando se comete algunos de los errores que se describen a continuación.

Errores conceptuales: Se presentan cuando el estudiante muestra en la explicación de su respuesta la carencia del concepto correspondiente, como en los siguientes ejemplos:

Alumno 4 (Item 3a) *"$A \in A \Rightarrow$ Falso. Porque para que $A \in A$, debería ser A un subconjunto o A^C de A".*
Alumno 5 (Item 3c) *"$x \in \{x\} \Rightarrow V$; porque un conjunto x puede tener un elemento $\{x\}$".*

***No reconoce la propiedad o la aplica incorrectamente*:** Se presentan en las respuestas que el alumno da a las proposiciones verdaderas que contienen el enunciado de una propiedad, utilizando argumentos incorrectos:
Alumno 6 (Item 3b) $\emptyset \subset A$. *" Falso. Conjunto vacio no puede ser un subconjunto de A".*

Entre algunos de los resultados obtenidos en este ítem se tienen:

1. En el ítem 3a, un 21,3% de los estudiantes respondieron correctamente y sólo un 9% respondieron parcialmente correcto, es decir, acertaron la

veracidad de la proposición pero su explicación no es clara o es incompleta. Lo que parece indicar la dificultad que presenta para los estudiantes el dominio del concepto de elemento de un conjunto.

2. El ítem 3c, sobre el concepto de conjunto unitario resultó ser casi igual de difícil que el ítem 1a, pues el 21,3% de los estudiantes respondieron correctamente y sólo el 6,6% respondieron parcialmente correcto y el 72,1% de los sujetos respondieron incorrectamente.
3. El ítem 3d, resultó ser el más difícil que todos los subítems que conformaron esta pregunta, ya que sólo un 14,8% de los estudiantes respondieron de forma correcta sobre el concepto de conjunto vacío y el 10,7% lo hacen de forma parcialmente correcto.

Conclusiones

En este apartado presentamos los resultados más relevantes obtenidos en el cuestionario y en la entrevista personal realizada a dos estudiantes, y las principales conclusiones del estudio.

- La prueba en general ha sido difícil para los alumnos, ya que en algunos ítems no llega al 1% el número de respuestas correctas y el número medio de respuestas ha sido 7,7 sobre un total de 25 preguntas. El máximo número de preguntas respondidas correctamente fue 20, de modo que ningún alumno hizo el examen totalmente correcto.
- El mayor número de errores conceptuales aparecen en los conceptos de subconjunto, elemento de un conjunto, conjunto vacío y conjunto unitario, sobre los que deberíamos hacer mayor énfasis en la enseñanza del tema. Estos resultados, concuerdan con los obtenidos en las investigaciones realizadas por Linchevski y Vinner (1988), Zazkis y Gunn (1997); y Fischbein y Baltsan (1999).
- Imprecisión en las definiciones de los conceptos, que indican una comprensión insuficiente.
- No reconocimiento o aplicación incorrecta de propiedades del conjunto vacío, subconjunto, de las relaciones y de las aplicaciones.
- en el curso de la entrevista los alumnos ratifican la deficiencia mostrada al interpretar los conceptos de conjunto vacío, conjunto unitario y elemento de un conjunto, y el uso del procedimiento correcto para demostrar la igualdad de dos conjuntos.

Como principales aportaciones de esta fase de nuestra investigación destacamos:

- La identificación de aspectos conflictivos en la comprensión de las nociones básicas de la teoría de conjuntos, que complementan los resultados obtenidos por otros investigadores.
- Se han identificado aquellas nociones que requieren una mayor atención por parte del docente y de los discentes, y en particular los conceptos de subconjunto y conjunto vacío.

Bibliografía

Arrieche, M. (2000). *Papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros: Un estudio exploratorio de aspectos epistemológicos, curriculares y cognitivos*. Trabajo de Investigación del Programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Feynman, R. (1965). New textbooks for the new mathematics. *Engineering and Science, 28: 9-15.*

Fischbein, E. y Baltsan, M. (1999). The mathematical concept of set and the collection model. *Educational Studies in Mathematics*, 37: 1-22.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas. En T. Ortega (Ed.), Actas del *III Simposio de la SEIEM,(pp.*). Valladolid.

Kline, M. (1973). El fracaso de la matemática moderna. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1978.

Linchevski, L. y Vinner, S. (1988). The naive concept of sets in elementary teachers*. Proceedings of the 12 th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 11: 471-78.

Zazkis, R. y Gunn, Ch. (1997). Sets, subsets, and the empty set: Students' constructions and mathematical conventions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16 (1): 133-169.