

EL SENTIDO DE LAS CUATRO OPERACIONES BÁSICAS COMBINADAS

Forcinito, Silvia Ofelia. Zampini, María Inés. Álvarez, María Alcira.
Instituto de Formación Docente N° 3: Esc. Normal Superior J.I. Gorriti. Jujuy-
Argentina.
silvifor@yahoo.com.ar

Resumen

Los reiterados errores que presentan los alumnos a lo largo de toda la escolaridad media, cuando requieren poner en juego la prioridad de las operaciones, inspiraron la elección de este problema como objeto de la investigación. Su alcance se limita a la resolución de sumas y productos combinados en el campo de los números naturales.

Se ha considerado su importancia por ser base para su tratamiento en la ampliación de los campos numéricos (rationales y complejos), la resolución de ecuaciones y otros cálculos algebraicos de gran utilidad, dentro y fuera de la matemática.

Hipótesis

Los insistentes esfuerzos que hacen los docentes cada vez que los alumnos se equivocan en los cálculos combinados, tanto en el marco aritmético como en el algebraico, junto a la persistencia del error por parte de los alumnos, han permitido elaborar una primera hipótesis que consiste en suponer la presencia de lo que Guy Brousseau denomina: *conocimiento obstáculo*¹⁵. Y que este obstáculo, esta dado por la característica cultural de leer y escribir de izquierda a derecha, cuestión que se reproduce en los cálculos combinados dispuestos horizontalmente.

Como segunda hipótesis, desprendida de la anterior, se busca confirmar que situaciones de enseñanza adecuadas, que tengan en cuenta el sentido de las operaciones combinadas, permitirían al alumno franquear el obstáculo y transformarlo.

Objetivos

Se busca comprobar el obstáculo, diseñar e implementar un proyecto de aprendizaje sobre la prioridad de las operaciones en de sumas y productos combinados con números naturales dispuestos horizontalmente y contrastar los resultados obtenidos con los análisis apriori.

Metodología

Se adopta la, «*Ingeniería Didáctica*»¹⁶ como metodología para la investigación.

¹⁵ Brousseau, (1975) en el campo de la didáctica de la matemática, define el concepto: conocimientos obstáculos como errores reproducibles, predecibles, resistentes y relativamente universales.

¹⁶ DOUADY, REGINE. "Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège seconde" en La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes los programas y las prácticas. Topiques. 1996.

Marco Teórico

Se toman como encuadre de esta investigación la «*Teoría de las Situaciones*» (Guy Brousseau. 1986) y la «*Dialéctica Instrumento - Objeto. Juego de marcos*» (Regine Douady. S/f)

La Ingeniería

1 – Los análisis preliminares.

Desde lo epistemológico se consideró la «*Teoría axiomática del número natural*» de Peano, de la cual se desprende la regla que determina la prioridad de las operaciones. En cuanto a la práctica habitual de los docentes, se pudo observar que proponen separar los términos teniendo en cuenta los signos «+» y «-» que no figuren dentro de paréntesis. Son reglas «recetas» totalmente vacías de sentido.

Dentro de los errores que aparecen en las producciones de los alumnos a lo largo de la escolaridad primaria y media, se pueden observar:

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{2} \times 5 = 1; \quad 3 + 2x = 5x; \quad 4 + 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2}; \quad 2 + 4i = 6i$$

El error que subyace es el mismo, el alumno realiza los cálculos en el orden que aparecen, de izquierda a derecha, no tiene en cuenta la separación por términos.

2 – La concepción y el análisis a priori.

Se concibe una secuencia de 8 encuentros de 80 minutos cada uno a cargo de las docentes investigadoras.

– Primer encuentro: Se propone una entrevista inicial con el propósito de indagar sus concepciones previas acerca de los cálculos combinados.

– Segundo encuentro: Se propondrá a los alumnos que resuelvan problemas que involucren las 4 operaciones básicas. El propósito es indagar acerca del reconocimiento por parte de los alumnos de la pertinencia de estas operaciones dentro de un contexto, ver su forma de trabajar, de representar las resoluciones y, además, realizar un acercamiento interpersonal entre ellos y las docentes investigadoras.

– Tercer encuentro: Se trabajará de manera inversa a la anterior, se darán cuentas en las que intervenga una sola operación y los alumnos, en forma grupal, propondrán los problemas. Se continuará con una puesta en común.

– Cuarto encuentro: Se presentará a cada grupo de alumnos dos problemas en los que intervengan las mismas cantidades pero que se resuelvan de distintos modo, en uno se deberá realizar primero la suma y luego el producto y en el otro al revés. Esta actividad tiene el propósito de contextualizar las operaciones combinadas, que reconozcan que la necesidad de realizar primero una u otra operación está dada por la situación y que, según esto, aunque intervengan los mismos números y las mismas operaciones, los resultados serán distintos. En la puesta en común debatirán los procedimientos usados.

– Quinto encuentro: Se entregará a cada grupo dos dados de distinto color y dos tarjetas, una para cada equipo que se forme dentro del grupo. En una tarjeta se consignará que a la suma de los puntajes obtenidos al tirar los dados la deberán multiplicar por un número específico. En la otra, con los mismos puntajes obtenidos

en los dados, deberán efectuar el producto con uno de ellos y, a ese resultado, sumarle el del otro dado. Además se les pedirá que anticipen cuál de los equipos obtendría el mayor puntaje y que justifiquen su respuesta. Con esta actividad se propone profundizar las concepciones logradas en el encuentro anterior.

– Sexto encuentro: La clase se organizará en dos grandes grupos, en cada uno de ellos se formarán subgrupos. Cada subgrupo, de uno de los dos grupos, recibirá un par de problemas; para su resolución uno requerirá primero la suma y el otro primero el producto. De la misma forma se procederá con el otro grupo. Junto con los problemas recibirán una tarjeta con dos filas de números que corresponderán a los de los problemas. Una vez resueltos deberán completar la tarjeta con los signos de las operaciones y, cuando lo necesiten, algunas marcas o señales (no podrán borrar ni agregar números o letras) de modo que su lectura permita resolver los cálculos solucionando cada problema sin conocer sus enunciados. Luego los grupos que recibieron distintos problemas intercambiarán las tarjetas y resolverán los cálculos. En la puesta en común se analizará la claridad de los mensajes plasmados en las tarjetas y se validarán las resoluciones de acuerdo a los problemas correspondientes. El docente institucionalizará el uso del paréntesis como simbolización socialmente reconocida.

– Séptimo encuentro: Se realizará una reinversión de los conceptos logrados en la actividad anterior. Los alumnos recibirán dos problemas y cálculos en los que intervengan los mismos valores numéricos en sumas y productos, en algunos aparecerán paréntesis, deberán resolverlos y aparearlos con los problemas correspondientes.

– Octavo encuentro: Sobre la base de los resultados obtenidos en el encuentro anterior se entregarán cálculos con sumas y productos dispuestos horizontalmente, con y sin paréntesis, para que los alumnos los resuelvan.

– Evaluación: Se la realizará en forma individual. En una primera parte, los alumnos deberán presentar horizontalmente el cálculo de problemas que requieran una combinación de sumas y productos. En la segunda parte, deberán resolver cálculos con estas operaciones dispuestas horizontalmente, con y sin paréntesis.

3 – Experimentación, análisis a priori y validación.

La propuesta se desarrolló en un cuarto año de EGB 2, se eligió un grupo que no había trabajado las operaciones combinadas, pues si ya hubieran visto la regla de separación por términos los resultados de esta investigación quedarían confusos.

La entrevista inicial, invariablemente ante los cálculos del tipo « $4 + 3 \cdot 5$ » resolvieron primero la suma y luego el producto. Cuando se les preguntaba porqué habían decidido resolverlas de ese modo daban por respuestas: "porque ahí dice así" o "porque aparecen así". Confirmando así la primera hipótesis.

Los hallazgos obtenidos con las actividades desarrolladas en el segundo y tercer encuentro, no tienen relevancia en cuanto al interés de esta investigación, sus propósitos están especificados en el punto anterior.

En el cuarto encuentro se entregó a cada grupo dos problemas:

- a) *Susana tiene 2 figuritas sueltas y 3 sobres con 5 figuritas cada uno. ¿Cuántas figuritas tiene Susana?*
- b) *Susana tiene 3 sobres que contienen 5 figuritas de animales y 3 de deportes.*

¿Cuántas figuritas tiene Susana?

En general no tuvieron inconvenientes para resolverlos. Se puede decir que con respecto al objetivo propuesto, referido al reconocimiento de la prioridad de las operaciones, se logró una primera aproximación dentro de una situación contextualizada. También se pudo observar la variedad de estrategias de resolución que presentaron los alumnos, esto dio lugar a distintos puntos de debate en la puesta en común, como lo fueron la multiplicación como suma reiterada, el cálculo mental y la aplicación de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

En el quinto encuentro cada grupo recibió dos dados y dos tarjetas, una para cada equipo del grupo. Cada tarjeta tenía una de las siguientes consignas:

- a) *Al puntaje del dado blanco se le debe sumar el resultado de multiplicar el puntaje del dado rojo por el número tres.*
- b) *A la suma del puntaje del dado blanco con el del dado rojo se la debe multiplicar por el número tres.*

Todos los grupos resolvieron correctamente, consignaron los puntajes de cada dado en una hoja donde también resolvieron los cálculos. En la puesta en común explicaron sin dificultades los cálculos resueltos. La actividad fue valiosa ya que los alumnos reconocieron, para el mismo par de valores, las diferencias entre los resultados en los dos tipos de cálculo. Incluso llegaron a inferir que cuando debían sumar primero el resultado sería siempre mayor, una alumna lo justificó mediante la propiedad distributiva del producto respecto de la suma

En el sexto encuentro, tres grupos recibieron dos tarjetas, con los problemas 1 y 2. Los otros tres grupos recibieron las de los problemas 3 y 4, junto a la tarjeta en la que debían intercambiar los mensajes.

Problema 1

Una bailarina entrena 4 horas los días sábados y 3 horas de lunes a viernes. ¿Cuántas horas entrena por semana?

Problema 2

Otra bailarina entrena 4 horas a la mañana y 3 horas por la tarde ; lo hace de lunes a viernes. ¿Cuántas horas entrena por semana?

Problema 1: 4 3 5

Problema 2: 4 3 5

Problema 3

María para su cumpleaños decoró con 7 globos rojos y 5 globos blancos cada una de las 4 esquinas del comedor. ¿Cuántos globos utilizó María?

Problema 4

María para su cumpleaños decoró el comedor con 7 globos rojos en el centro y 5 con globos blancos en cada una de las 4 esquinas. ¿Cuántos globos utilizó María?

Problema 3: 7 5 4

Problema 4: 7 5 4

En las resoluciones de los alumnos se pudieron observar distintos comportamientos. En el grupo que participaron Nahir, Julieta y Felipe resolvieron correctamente ambos

problemas usando la disposición vertical para presentar las cuentas. Para enviar el mensaje de resolución del problema 1 Felipe propuso escribir al lado del producto el signo de la igualdad y su resultado, a continuación del mismo escribió el signo de la suma y el número 4. Para el problema 2 agregaron solamente los signos de las operaciones, consideraron que debía resolverse en el mismo orden de aparición.

Con respecto al problema 1 se les recordó que no se podían escribir números; cambiaron la propuesta usando una flecha para indicar el orden de resolución. Con respecto al problema 2 incorporan el signo de la igualdad después de la suma de los dos primeros números para indicar que a ese resultado lo deben multiplicar por el número siguiente.

Aymé, Ignacio y Yamila recibieron el mensaje y lo interpretan como el grupo emisor lo había propuesto.

El grupo de Pedro, Nicolás, Fran y Marcos resolvieron correctamente los dos problemas y también presentaron las cuentas en disposición vertical. Para enviar el mensaje encerraron con una línea curva los cálculos que se debían resolver primero.

Agustina, Tiago y José recibieron la tarjeta con este mensaje, resolvieron correctamente pero llama la atención que escribieron la cuenta que realizaron en segundo lugar a la izquierda de la primera. Aunque respetaron la prioridad indicada, posiblemente consideraron que los cálculos se deben escribir en el orden que aparecen los signos en la disposición horizontal. En la puesta en común dijeron que se dieron cuenta de la prioridad por los números que estaban juntos y por el que quedaba solo.

Al igual que los grupos anteriores, Paloma, Gustavo, Matías y Lucía resolvieron correctamente los dos problemas y presentaron las cuentas en disposición vertical. También enviaron el mensaje encerrando con una línea curva los cálculos que se debían priorizar. Luciana, Paloma y Valeria recibieron el mensaje y lo resolvieron en la misma tarjeta. No tuvieron en cuenta las líneas curvas marcadas por el grupo emisor y resolvieron por el orden de aparición de los cálculos incluyendo los resultados intermedios. Obtuvieron el mismo resultado para los dos problemas. En la puesta en común explicaron que no entendían lo que tenían que hacer porque los números estaban encerados.

En las resoluciones de los otros dos problemas, en el grupo de Tiago, José y Agustina, esta última decía que había que dividir 12 por 4; después de sumar mentalmente y que se trataba de una división por el "Cada una" del enunciado. Tiago se opuso diciendo: "No, no, no; puso 5 globos en 4 esquinas, uno en cada una y sobra una". Se les preguntó nuevamente cuántos globos se colocaron en una sola esquina. Agustina, que ya había resuelto la cuenta propuesta inicialmente, respondió: "3". En cambio Tiago dijo: "hay 12 en una esquina, 12 en otra, 12 en otra y 12 en otra". Resolvió oralmente: " $10 + 10 + 10 + 10 = 40$; $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ " y $40 + 8 = 48$ ". Agustina propuso multiplicar. En la hoja escribieron las dos cuentas en disposición vertical. El problema 4 lo resolvieron sin inconvenientes, también usaron la disposición vertical, esta vez resolviendo primero el producto y luego la suma.

Para enviar el mensaje propusieron escribir encima de los signos de operación un número de orden para indicar la prioridad. Se les recordó que no podían usar números, pero que si cualquier tipo de marcas. Decidieron usar flechas.

Los alumnos que recibieron el mensaje interpretaron las flechas al revés de la

intención propuesta. Interpretaron que la punta de la flecha indicaba donde debían comenzar. Mantuvieron la disposición horizontal para resolver los cálculos, colocando resultados intermedios sin respetar el significado del signo igual.

El grupo de Ignacio, Yamila y Aymé resolvieron correctamente ambos problemas y también usaron la disposición vertical para presentar las cuentas.

Para enviar el mensaje del problema 3 solamente agregaron los signos de las operaciones; consideran que la prioridad estaba dada por el orden de escritura. Como en el problema 4 debían indicar la alteración del orden recurrieron al uso de los colores, pintaron de verde los dos números que se debían multiplicar y dejaron en rojo al que luego deben sumar; reforzando esta idea con una flecha.

Nahir, Julieta y Felipe recibieron el mensaje y lo resolvieron con la intención dada por el grupo emisor. Ambos grupos sostienen que la prioridad está dada por el orden de escritura; consideraron que la salvedad se debe indicar cuando esto deja de ser válido.

El grupo de Luciana, Paloma y Valeria al igual que los otros grupos resolvieron bien los problemas y también usaron la disposición vertical. También, como pudo observarse en otro grupo, escribieron la cuenta que realizaron en segundo lugar a la izquierda de la primera, como si los cálculos debieran presentarse con el orden numérico dado en el enunciado del problema.

Para el cálculo del problema 3 solo incorporaron los signos de operación considerando que la prioridad estaba dada por el orden de escritura. En el problema 4 usaron una llave horizontal abierta por debajo de los dos números que debían multiplicar para indicar la prioridad.

Los alumnos que recibieron la tarjeta resolvieron los dos cálculos por el orden de escritura, no tuvieron en cuenta la presencia de la llave. Hicieron los cálculos en la misma tarjeta escribiendo los resultados intermedios; aunque también, los presentaron en la hoja en la disposición vertical.

En la puesta en común se analizaron las distintas representaciones, los errores cometidos y se debatió sobre las simbolizaciones más adecuadas. Como otra posibilidad, la docente presentó el paréntesis y comunicó que es la adoptada universalmente, estos signos aparecen en algunas calculadoras y en los teclados de las computadoras por ello es la que adoptarían también ellos. De este modo se institucionalizó el uso del paréntesis para indicar la prioridad de las operaciones; asimismo señaló que, para los casos en los que no estuvieran presentes los paréntesis, existe la convención de resolver primero los productos y después las sumas.

Los dos encuentros siguientes fueron dedicados a la familiarización de esta representación.

La evaluación fue individual y la realizaron los 22 alumnos presentes de los 24 que conformaban el grado. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Aprobados: 15 (68,18%) Regulares: 6 (27,27%) Aplazados: 1 (4,54%)

Las primeras apreciaciones

Se considera que el porcentaje de aprobados fue bueno; aunque, por los errores que manifestaron los alumnos hubiera sido conveniente aumentar el tiempo dedicado a la familiarización del concepto.

Esta secuencia de clases respondió a una primera aproximación a la construcción de

la prioridad de las operaciones. Lo que le sigue es una complejización de las situaciones aumentando la cantidad de números, de términos, luego incorporando la resta, la división entera para pasar luego a la ampliación del campo numérico con expresiones decimales y fraccionarias. A su vez el concepto debería ir apareciendo paralelamente en resoluciones de ecuaciones.

Creemos que la experiencia fue rica ya que permitió al menos conflictuar el obstáculo.

Bibliografía

ARTIGUE, MICHEL y Otros. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamericano. México. 1995.

BERTÉ, ANNIE *Matemática dinámica*. AZ. Bs. As. 1999.

BROUSSEAU, GUY *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. FAMAFA. Córdoba. 1986

CHEVALLARD, y Otros. *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Horsori. España. 1998

DOUADY, Regine. *Dialéctica instrumento – objeto. Juego de encuadres*. Cuaderno de Didáctica de matemáticas N° 3. Edición mecanografiada. s/f.