AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática – 2014, Nº 73 - 90

Orden y distancia de fracciones y decimales en la recta numérica: El caso de Abigaíl

Thomas G. Rothery, Perry High School, Chandler AZ (Estados Unidos de América)

Alfinio Flores Peñafiel, University of Delaware, Newark DE (Estados Unidos de América)

Recibido el 18 de Enero de 2013; aceptado el 28 de Enero de 2014

Orden y distancia de fracciones y decimales en la recta numérica: El caso de Abigaíl.

Resumen

Este es un estudio de un caso acerca de las representaciones de números racionales en la recta numérica hechas a mano y utilizando un programa interactivo de una alumna de nivel medio superior. En un principio las representaciones de la alumna mostraron una clara comprensión de cómo representar el orden entre diferentes números en la recta numérica, pero no cómo representar correctamente las distancias entre ellos. La forma de representación utilizada (decimales o fracciones) también fue importante para que ella pudiera o no mostrar su comprensión de las distancias entre diversos números racionales. El estudio muestra el pensamiento de la alumna, sus dificultades y avances, a través de las interacciones con el entrevistador y el programa de computadora.

Palabras clave: fracciones decimales, recta numérica, representaciones, orden, distancia, tecnología interactiva.

Ordem e distância de fracções e decimais na recta real: O caso de Abigaíl.

Resumo

Este é um estudo de caso sobre as representações de números racionais na recta real realizadas à mão e utilizando um programa interactivo de uma aluna de nível médio superior. Inicialmente as representações obtidas pela aluna mostram uma compreensão clara de como representar a ordem entre diferentes números na recta real, mas já não como representar correctamente as distâncias entre eles. A forma de representação utilizada (decimais ou fracções) também foi importante para que ela pudesse mostrar a sua forma de entender as distâncias entre diversos números racionais. O estudo revela a forma de pensar da aluna, as suas dificuldades e os seus progressos, através das interacções com o entrevistador e com o programa informático.

Palavras chave: fracções, decimais, recta real, representações, ordem, distância, tecnologia interactiva.

Order and distance of fractions and decimals on the number line: The case of Abigail.

Abstract

This is a case study about representations of rational numbers on the number line made by hand by a high school student and using an interactive computer program. At the beginning the student's

Para citar: Rothery, T.G., & Flores, A. (2014). Orden y distancia de fracciones y decimales en la recta numérica: El caso de Abigaíl. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5, 73 - 90.

representations showed a clear understanding of how to represent order among different numbers on the number line, but not how to represent distances between them correctly. The form of representation used (decimals or fractions) also was important for her ability to show her understanding about distances between different rational numbers. The study reveals the thinking of the student, her difficulties and progress, through her interactions with the interviewer and the computer program.

Key words: fractions, decimals, number line, representations, order, distance, interactive technology.

Ordre et distance de fractions et décimales sur la ligne de nombres: le cas d'Abigail.

Résumé:

Il s'agit d'une étude sur les représentations de nombres rationnels sur la droite de nombres fait à la main et à l'aide d'un logiciel interactif d'une élève de niveau moyenne-supérieure. Au début, les performances de l'élève ont montré une compréhension claire de la façon de représenter l'ordre des numéros différents sur la ligne de nombres, mais pas la façon de représenter correctement les distances entre eux. La forme de représentation utilisé (décimales ou fractions) était également important pour elle de montrer ou non sa compréhension des distances entre les différents nombres rationnels. L'étude montre la pensée de l'élève, ses difficultés et progrès, par des interactions avec l'intervieweur et le logiciel informatique.

Mots-clés: décimales, fractions, ligne de nombres, representations, l'ordre, distance,technologie interactive.

1. Presentando a Abigaíl

En este artículo presentamos el caso de Abigaíl (seudónimo), sus concepciones sobre el orden y la distancia entre fracciones y decimales en la recta numérica y el uso de un programa de computadora para tratar de ayudarla a desarrollar su comprensión del tema y superar concepciones erróneas. El caso de Abigaíl es interesante porque muestra que lo que ven los alumnos en una representación de fracciones en la recta numérica o en lo que se enfocan al graficar fracciones en la recta numérica puede ser distinto de lo que el maestro ve o quiere que sus alumnos vean en tales representaciones. Como Ernest (1985) señala, el modelo de la recta numérica presupone familiaridad con las convenciones de representación subyacentes. El maestro puede manejar tales convenciones de manera implícita, y verlas por tanto en una cierta representación, y en cambio los alumnos pueden no estar completamente conscientes de tales convenciones, y por tanto enfocan su atención a otros aspectos. El caso de Abigaíl es interesante también porque ilustra que no es suficiente mostrar al alumno una representación correcta para que éste automáticamente aprehenda los conceptos que se quiere enseñar. El caso de Abigaíl muestra también que sólo porque un alumno no puede contestar una pregunta usando un cierto tipo de representación no significa que el alumno no comprenda los conceptos. Puede ser que el alumno sea muy capaz de mostrar su comprensión de los conceptos con otro tipo de representación. Como en cualquier estudio de un caso, no se pretende generalizar los resultados a una población; las generalizaciones que se hacen son de tipo teórico (Yin, 1994). El caso de Abigaíl es parte de un estudio más extenso realizado por el primer autor (Rothery, 2006) con la asesoría del segundo. En ese estudio el enfoque principal fue el uso de múltiples representaciones por parte de los alumnos.

Abigaíl es una alumna de nivel medio superior (10.º grado, 16 años) en los Estados Unidos de América, cuyo segundo idioma es el inglés, el cual no habla con completa fluidez, y que ama las Matemáticas. Cuando está en el salón de clase, es muy dedicada y cuidadosa con su trabajo escrito, pide ayuda adicional a sus maestros cuando la necesita, y se enorgullece de su desempeño general. La dedicación y esfuerzo de Abigaíl son más grandes que las del alumno promedio en nivel medio superior y su habilidad para concentrarse durante las presentaciones en clase es superior a casi cualquiera. Aunque el interés académico de Abigaíl es sincero, no le faltan obstáculos y desafíos. De hecho, ante los ojos de sus maestros de Matemáticas, sus calificaciones y su desempeño no se equiparan con su deseo de ser una buena alumna. Abigaíl es una alumna mejor que el promedio quien usualmente saca B[1] en sus clases de Matemáticas. Y aunque su ética de trabajo sugiere que merece mejores calificaciones, Abigaíl tiene algunas concepciones erróneas y conceptos no bien formados acerca de ciertos tópicos matemáticos que le impiden sacar mejores calificaciones. Un área específica en la que necesita mejorar es su comprensión de los números racionales y su representación en la recta de los números reales.

Cuando los alumnos entran al nivel medio superior en Estados Unidos se espera que deben tener una comprensión de las operaciones numéricas básicas y fluidez para utilizarlas con los enteros, fracciones, y decimales (NCTM, 2000, p. 290) y que puedan representar las operaciones de sumar y restar en la recta numérica (Common Core State Standards, 2012, p. 48). Sin embargo, no debemos suponer que todos los alumnos alcanzan estos estándares con estos niveles. De hecho, en algunos casos, alumnos como Abigaíl están algunos grados por debajo de su nivel actual en la escuela con respecto a su comprensión conceptual de los números racionales y sus diversas representaciones.

2. Marco teórico

2.1. Sistemas de representaciones

Para analizar la comprensión de Abigaíl de los números racionales, prestamos especial atención a tres diferentes maneras en que los alumnos representan su comprensión de números racionales. Estos son, *lenguaje hablado* que incluye el vocabulario matemático, los *símbolos escritos* que involucran enunciados matemáticos o frases, como también enunciados y frases en el lenguaje natural, y *dibujos y diagramas* que incluye construcciones de rectas de números reales y gráficas. Estos son tres elementos centrales en el marco conceptual de Lesh (1979) sobre el aprendizaje de las Matemáticas y que ha sido elaborado y aumentado a lo largo de los años por el mismo Lesh y otros autores (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Post & Cramer 1989; Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992; Cramer, 2003; Clement, 2004). También tenemos en cuenta los pensamientos o acciones que ayudan a ligar una representación con la otra. Por ejemplo, el proceso de cambiar de una fórmula (símbolos escritos) a una gráfica (dibujo o diagrama) es calculando (Janvier, 1987). También tomamos en cuenta las organizaciones y operaciones dentro de un sistema de representaciones (Lesh, Behr, & Post, 1987). Esto puede ser el caso cuando un estudiante transforma los símbolos escritos de las fracciones a símbolos escritos de decimales por medio de la división.

[1] En el sistema de calificaciones más común en Estados Unidos, A es excelente, B es bien, C es regular, D deficiente, y F es reprobado.

2.2. Naturaleza e importancia de la unidad en los números racionales

Otro aspecto importante al analizar el pensamiento y desempeño de Abigaíl es en referencia a conceptos relacionados con las fracciones, en particular la naturaleza e importancia de la unidad. Hiebert y Behr (1988) describen los cambios fundamentales en la naturaleza de la unidad en situaciones con fracciones. Con frecuencia la primera experiencia de los alumnos con números racionales son fracciones comunes en las cuales el número escrito representa parte de una unidad partida. Hasta ese punto, las unidades han sido tratadas como enteros, ya sea como uno solo o como múltiples. Ahora las unidades se parten y el número representa sólo una parte de la unidad. La unidad es el contexto que da sentido a la cantidad representada pero con frecuencia es implícita más que explícita. Este cambio corresponde con un cambio de una cantidad discreta a una continua y un cambio de contar a medir y partir como actividades cuantificadoras primarias. Como Piaget remarca, las fracciones mismas adquieren un caracter dual. Son partes del todo original y también son todos por derecho propio, y como tales pueden ser subdivididas (Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960, p. 310).

Hiebert y Behr (1988) también señalan la importancia de anticipar la estructura de la unidad. De varias maneras la anticipación requerida es semejante a los esquemas anticipativos descritos por Piaget en el contexto de partir una región en partes iguales. De acuerdo con Piaget (Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960, p. 311), es necesario que los sujetos tengan un esquema anticipatorio para la subdivisión que dirija la repartición durante la conducta. Es decir, los alumnos no son capaces de partir una región en partes iguales hasta que pueden anticipar, antes de cortar, cómo se verá la región partida. Según Piaget, las dificultades de los alumnos surgen porque no hay un esquema anticipatorio en el cual la fracción deseada o parte se reconozca de antemano como algo ligado con un todo divisible igual a la suma de sus partes (p. 334).

Wearne y Kouba (2000, p. 189), en su análisis de los resultados de National Assessment of Educational Progress (la evaluación a nivel nacional que se conduce cada cuatro años en Estados Unidos), indican que los números racionales continuan siendo un tema difícil para los estudiantes. Señalan que la noción de lo que constituye la unidad parece estar en la raíz de muchas de sus dificultades. Kastberg y Norton (2007, p. 89) señalan también que para que las representaciones de decimales y fracciones tengan sentido, los alumnos deben identificar una parte en relación a un todo.

Kieren (1994) señala la diferencia que puede hacer el que los alumnos hagan sus propias particiones de la unidad o que vean unidades ya partidas. Cuando los alumnos dividen la unidad en ocho partes doblando tiras a la mitad sucesivamente para obtener mitades, cuartos y octavos, en este caso un octavo se refiere a un producto de su propia acción sobre una unidad: un octavo de una unidad. Cinco octavos es 5/8 de una unidad. Cuando se les da a los alumnos un juego de fracciones ya formadas de medios, cuartos, y octavos, aunque las piezas se ven iguales para un adulto, son diferentes para un alumno. En este caso cinco octavos se refiere a cinco piezas de un octavo. Se necesita una transformación y extensión conceptual para que un alumno entienda la relación entre unidades en estos contextos, esto es, que cinco octavos de una 1-unidad puede ser cinco unidades de un octavo. Kieren enfatiza la importancia de que los maestros estén concientes de las unidades y sus transformaciones cuando diseñen actividades y observen a sus alumnos.

Sowder (1995, p. 23) señala que en la mayoría de los salones de clase se dedica poco tiempo a problemas que relacionen fracciones con decimales. En tres libros de texto de sexto grado examinados, sólo una página de cada uno se dedicó a este tema, y sólo para escribir números decimales como fracciones y fracciones com decimales. Enseñar fracciones y decimales como temas separados sin proporcionar a los estudiantes oportunidades para hacer las conexiones impide el desarrollo de una completa comprensión de los números racionales.

2.3 Representación de números racionales en la recta numérica

Igualmente importantes son las convenciones matemáticas relacionadas con la representación de números fraccionarios en la recta numérica. Behr y Post (1992, p. 235) señalan que en la recta numérica la unidad de medida es la distancia en la línea desde cero hasta uno. Múltiples de esta distancia unitaria se generan sobre la recta numérica al iterar la distancia de cero a uno a lo largo de la línea. Para establecer el significado de una fracción como 5/8, establecemos la subunidad de 1/8. La fracción 5/8 es simplemente la distancia en la recta numérica igual a cinco iteraciones de 1/8. El punto 5/8 en la recta numérica es el punto cuya distancia desde cero en la recta es cinco unidades de 1/8. Un número racional representa así tanto un punto sobre la recta numérica como una distancia. Es importante para los alumnos que puedan representar fracciones tales como 5/8 en varios lugares de la recta numérica (p. 236).

Bright, Behr, Post y Wachsmuth (1988, p. 215) describen las siguientes características de la recta numérica. Primero, una longitud representa la unidad, y el modelo de recta numérica sugiere no sólo iteración de la unidad sino también subdivisión simultánea de todas las unidades iteradas. Es decir, la recta numérica puede ser tratada como una regla. Segundo, en la recta numérica no hay una separación visual entre unidades consecutivas. Es decir, el modelo es totalmente continuo. Tercero la recta numérica requiere del uso de símblos para comunicar parte del significado deseado. La recta numérica requiere así una integración de dos formas de información, visual y simbólica.

A pesar de su importancia, las convenciones sobre la recta numérica muchas veces se tratan de manera implícita más que explícita. Usualmente, una vez que se define la unidad sobre la recta, la distancia entre dos puntos será proporcional a la diferencia entre los números correspondientes. Es decir la distancia dependerá tanto de la unidad establecida como de la diferencia. Esto es una convención que los alumnos deben de entender. El maestro debe también hacer explícita la naturaleza convencional de relacionar distancias entre puntos con diferencias entre los números correspondientes. Sólo porque como adultos estamos acostumbrados a esta convención no significa que la relación entre distancias entre puntos y diferencias entre los números representados sea natural. Existen otras convenciones para identificar números con puntos en una recta. Por ejemplo, en una escala logarítmica, la distancia entre dos puntos será proporcional a la *razón* entre los números correspondientes.

Además de las dificultades intrínsecas del modelo de la recta numérica, los alumnos con frecuencia encuentran tratamientos inadecuados en los libros de texto. Bruno y Cabrera (2006) en un análisis de tres editoriales encontraron que el modelo de recta numérica no es tratado de manera totalmente adecuada por ninguna de las series de textos analizados. La forma en la que los maestros presentan y utilizan la recta numérica en la clase también es importante. Doritou (2006) encontró que muchas veces los maestros enfatizan más las acciones sobre la recta numérica en vez de conceptualizar la recta numérica como un modelo continuo del sistema numérico que se desarrolla de la noción de la unidad repetida.

2.4. Formas de uso de la tecnología

Por último, es también importante considerar la interacción de Abigaíl con el programa de computadora *TI-Interactive!* y su uso para comunicar su pensamiento además de la expresión verbal o escrita. Como Pea (1987, p. 94) señala, la tecnología no simplemente amplifica, como un amplificador de radio, los poderes mentales del alumno, o acelera el proceso de alcanzar más eficientemente metas educativas escogidas de antemano. El uso de tecnologías de cómputo, como otras tecnologías cognitivas, puede ir más allá y ayudar a los alumnos a re-estrucurar sus procesos de pensamiento.

Sherman (2012, p. 1103) con base en esta distinción de Pea, contrasta el uso de la tecnología entre amplificador o reorganizador de la siguiente manera. Cuando la tecnología se usa como un amplificador, desempeña con más precisión o eficientemente procesos tediosos o dilatados que se pueden hacer a mano, tales como cálculos aritméticos o la generación de representaciones matemáticas estándares. Con este uso de la tecnología lo que los estudiantes hacen o piensan no cambia, pero puede ser hecho en menos tiempo y con menos esfuerzo, y más precisamente. Por ejemplo, el uso de una calculadora científica para hacer los cálculos mientras los alumnos plantean y resuelven proporciones puede hacer su trabajo más eficiente y ayudar a evitar errores aritméticos en sus soluciones. Sin embargo, lo que los alumnos hacen no cambia por el uso de la calculadora; su enfoque cognitivo es todavía plantear y resolver proporciones, se use o no la calculadora. Como un reorganizador, la tecnología tiene el potencial de cambiar el foco del pensamiento o conducta matemática de los alumnos, al producir representaciones nuevas que resalten algún aspecto de un concepto que es difícil hacer explícito sin ella, o al proporcionar realimentación inmediata a la que los alumnos no podrían tener acceso. Sherman encontró en un estudio que cuando los alumnos usan la tecnología solamente como amplificador, no hay una influencia en la demanda cognitiva (Stein & Smith, 1998), pero que cuando se usa como reorganizador, el uso de la tecnología está íntimamente relacionado con apoyar el pensamiento matemático de alto nivel de los alumnos.

3. El caso de Abigaíl y sus representaciones de fracciones y decimales

3.1. Método

Abigaíl participó en un *experimento de enseñanza* (Steffe & Thompson, 2000) conducido por el primer autor. El maestro/investigador entrevistó a Abigaíl y le proporcionó protocolos de entrevista cuya función era guiarla a través de las diferentes fases de aprendizaje, y evocar, accesar y evaluar el pensamiento de la alumna acerca de conceptos matemáticos predeterminados. La instrucción y las entrevistas fueron conducidas en inglés. La traducción de los diálogos fue hecha por el segundo autor. A lo largo de la entrevista, Abigaíl utilizó el programa *TI-InterActive!*, cuando el entrevistador se lo pidió, para reforzar conceptos y para aclarar confusiones que pudiera tener acerca de los números racionales. Este es el programa para graficar por computadora utilizado en su salón de clase.

3.2 Representación de números naturales en la recta numérica

En la primera tarea el investigador pidió a Abigaíl que construyera una recta de números reales y graficara los valores 44, 46 y 47. Aunque probablemente Abigaíl había tratado con este tipo de problemas en algún grado anterior, el maestro/investigador estaba interesado en ver cómo Abigaíl se desempeñaba en este ejercicio (Figura 1).

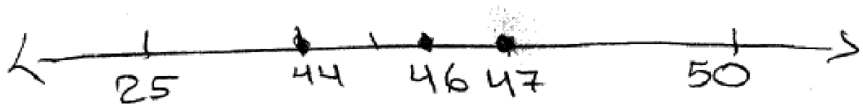

Figura 1. La gráfica de números naturales hecha a mano por Abigaíl.

Abigaíl inicialmente marcó los extremos del intervalo como 25 y 50 en la recta de números reales. Abigaíl luego marcó los valores 44, 46 y 47 en el centro de la gráfica. Aunque Abigaíl demostró que era competente para ordenar los números, su representación de las distancias era muy inadecuada. Con base en su dibujo, podríamos pensar que Abigaíl creía que 44 estaba más cerca de 25 que el valor 47 de 50, o bien que descuidó por completo las distancias y se concentró solamente en el orden. Por tanto, el investigador le preguntó acerca de la proximidad de las localidades de los puntos en su gráfica.

I: ¿Es este espacio [señalando las marcas 25-44 en la *Figura 1*] igual que este espacio [señalando 47-50]?

A: No.

I: ¿Cuánto espacio hay entre estos dos? [señalando 47 y 50 en su recta de números reales]

A: Tres.

I: Tres [reafirmando]. ¿Cuánto hay entre estos dos [señalando 25 y 44]?

A: [Sus ojos se ponen en blanco mientras piensa] Umm. [Piensa durante unos segundos, luego una risita sofocada porque no puede hacer el cálculo mentalmente.] Era mucho mayor.

Aunque Abigaíl era capaz de entender que la distancia entre 47 y 50 era distinta de la distancia entre 25 y 44, no pudo calcular mentalmente la distancia entre 25 y 44. Por tanto, el investigador le pidió a Abigaíl que usara *TI-Interactive!* para crear una recta numérica similar a la que ella había dibujado antes. Abigaíl fue capaz de hacerlo sin mucha ayuda y escogió el dominio de su gráfica por computadora igual al de su gráfica hecha a mano (Figura 2).

El investigador le pidió a Abigaíl que comparara las dos gráficas. Aunque su nueva gráfica era mucho más precisa que su gráfica anterior, Abigaíl pensó que las dos se parecían mucho. Cuando se le preguntó si había diferencias entre las dos gráficas, puso su atención en los números debajo de las marcas en vez de las distancias entre los puntos y los extremos de su gráfica.

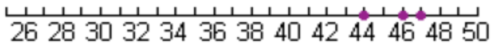

Figura 2. Abigaíl grafica números enteros con *TI-InterActive!*.

I: ¿Se ve este dibujo [en la computadora] igual que este dibujo [gráfica hecha a mano]?

A: Sí.

I: [El investigador pensaba que la nueva gráfica en la computadora era una mejora considerable comparada con la gráfica que había hecho a mano, pero siguió adelante.] ¿En qué se parecen?

A: Los puntos. [También utilizó el lápiz para señalar los puntos en su hoja.]

I: Sí, los puntos. Bien. ¿Cuál es una pequeña diferencia?

A: Aquí están todos los números [señalando las marcas en la pantalla de la computadora].

I: Todos los números. ¿Dónde [en la gráfica por computadora] hay más números?

A: De este lado [señalando el lado izquierdo de su gráfica por computadora de la recta numérica].

I: De este lado, ¿quieres decir entre 44 y el extremo?

A: Sí, hay más números.

Aún con el uso de *TI-InterActive!*, Abigaíl mostró deficiencias en su comprensión de las distancias. Aunque fue capaz de reconocer los valores adicionales localizados debajo de la recta numérica, fue incapaz de asociar esos valores con distancia o con medida. De hecho, decidió eliminar los valores adicionales cambiando la escala en su gráfica para tener una representación más concisa de sus puntos (Figura 3).

Figura 3. Gráfica de números enteros a mayor escala con *TI-InterActive!*.

Aunque los alumnos empiezan a aprender en la escuela las propiedades de los números enteros y cómo representarlos en la recta numérica desde temprana edad, no debemos suponer que tienen una comprensión conceptual perfecta de orden o distancia. En este experimento de enseñanza, Abigaíl demostró su competencia con el orden de los números enteros. Sin embargo, su habilidad para representar distancias no era adecuada y necesitaba mejorar. Para conseguir esto, el investigador decidió continuar con el desarrollo del pensamiento de Abigaíl sobre distancia por medio de números decimales con un solo dígito después del punto decimal.

3.3. Representación de números decimales en la recta numérica

El investigador le pidió a Abigaíl que graficara e identificara los puntos 10, 10.1, y 11 en la recta numérica dada por el maestro. La escala de la recta numérica era tal que los espacios entre los intervalos harían que la gráfica no fuera fácil de leer si los tres puntos estaban graficados con precisión. Sin embargo, Abigaíl representó gráficamente muy bien los valores 10 y 11. El punto correspondiente a 11 estaba a una distancia proporcional entre 10 y 20, aún sin las particiones y ella graficó 10.1 apenas a la derecha y casi encima del punto correspondiente a 10. En su dibujo, casi parece como si los puntos 10 y 10.1 formaran un gran punto debido a sus lugares tan cercanos y estar casi superpuestos (Figura 4).

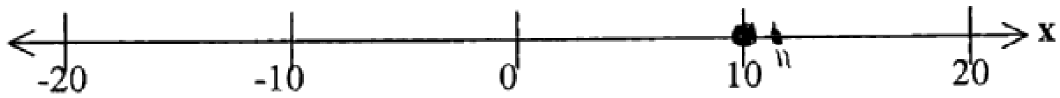

Figura 4. La gráfica de decimales de Abigaíl.

Cuando el investigador le preguntó a Abigaíl si era fácil graficar los tres puntos en la gráfica dada, ella contestó que no. Por tanto, le pidió que dibujara una nueva gráfica donde los puntos se pudieran ver más fácilmente (Figura 5). Nuevamente, sus puntos estuvieron bien ordenados y la localización de sus puntos, aunque aproximada, era correcta con respecto a la distancia.

Figura 5. La gráfica amplificada hecha a mano de Abigaíl.

El investigador le preguntó acerca del valor graficado 10.1 y su distancia al valor 10. Abigaíl mostró no sólo que la distancia entre los dos valores era .1, sino que fue capaz de marcar los intervalos restantes, mostrando que había diez distancias iguales de .1 entre 10 y 11 (aproximadamente, ya que no utilizó una regla).

> I: Esto se ve bien. ¿Cómo supiste que tenías que ir a esa distancia del punto 10? [señalando el punto 10.1]
>
> A: Porque es .1
>
> I: ¿.1? Bien… ¿Cuántos “.1”s [queriendo decir distancias de “.1”] hay entre aquí [señalando 10] y 11?
>
> A: ¿Entre éstos?
>
> I: Sí, entre 10 y 11. ¿Cuántos .1 hay entre 10 y 11?
>
> A: Nueve

La respuesta de Abigaíl es correcta, hay nueve marcas de .1 entre 10 y 11, aunque hay 10 distancias de .1 entre 10 y 11. La pregunta anterior acerca del número de .1 entre los valores 10 y 11 se puede interpretar de las dos maneras. Así que el investigador le pidió que los representara gráficamente.

I: Bien, ¿puedes dibujarlos?

A: ¿Todos?

I: Sí.

Aunque Abigaíl decidió no utilizar la regla que tenía a su disposición, las posiciones aproximadas estaban suficientemente bien dibujadas para interpretar la gráfica claramente. Abigaíl dividió el segmento unitario en diez partes, aunque no expresó de manera explícita que cada uno de los subintervalos tenía una longitud de 0.1. Después colocó los tres puntos en los lugares correctos. Además, los intervalos entre las marcas eran todas aproximadamente de la misma longitud (Figura 6).

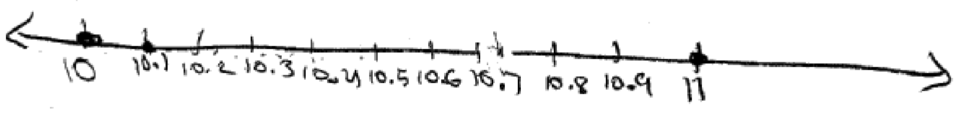

Figura 6. La gráfica de decimales de Abigaíl con particiones.

Como Abigaíl dibujó una buena gráfica a mano, el investigador le preguntó que si podía verificar su trabajo construyendo la misma gráfica usando el programa *TI-InterActive!*. Abigaíl construyó la gráfica por computadora con poca ayuda del investigador. Sin embargo, su nueva gráfica era ligeramente distinta de su gráfica hecha a mano. La gráfica por computadora mostraba un dominio más grande (de 9 a 12) que su gráfica original. Abigaíl la construyó de esta manera porque no quería que los valores 10 y 11 fueran los puntos extremos de su recta numérica. La única ayuda dada por el investigador fue en relación a cambiar la escala de las marcas para los intervalos, ya que en el programa la escala pre-establecida era 1, pero Abigaíl expresó que prefería contar de .1 en .1 como en su gráfica hecha a mano. El investigador le mostró dónde podía poner un nuevo valor para cambiar la escala. Una vez que lo encontró, ella supo cambiar la escala de 1 a .1 (Figura 7).

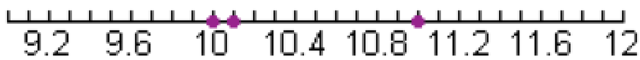

Figura 7. La gráfica de decimales de Abigaíl utilizando *TI-InterActive!*.

3.4. Representación de fracciones en la recta numérica

Como Abigaíl mejoró su comprensión de la distancia por medio de los decimales, el investigador tenía curiosidad acerca de la comprensión de Abigaíl de las fracciones. Abigaíl recibió la siguiente pregunta acerca de fracciones (Figura 8).

¿Cuál es mayor, $\frac{1}{5}$ ó $\frac{1}{4}$? Justifica tu razonamiento usando una recta de números reales o con otro método de tu elección. (Esto podría ser convirtiendo las fracciones a decimales, haciendo una gráfica circular, usando tecnología, etc.)

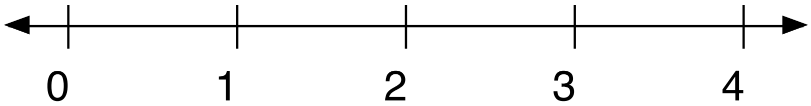

Figura 8. Graficando dos fracciones sobre la recta de números reales

Abigaíl dijo que $\frac{1}{4}$ era el mayor de los dos valores y dibujó los dos puntos en la recta de los números reales. Aunque los números en su gráfica estaban ordenados correctamente, sus distancias eran incorrectas (Figura 9). De hecho, no mostró clara comprensión conceptual de la distancia cuando graficó los dos puntos. La distancia entre 0 y 1/5 debería ser bastante más grande que la distancia entre 1/5 y 1/4. Cuando el investigador le preguntó, "¿Cómo supiste cuánto recorrer [en la recta de números] para dibujar los puntos?" ella respondió, "Sólo lo recorrí." Abigaíl no subdividió el segmento unitario en cuatro partes iguales para ubicar 1/4, ni tampoco lo subdividió en cinco partes iguales para ubicar 1/5.

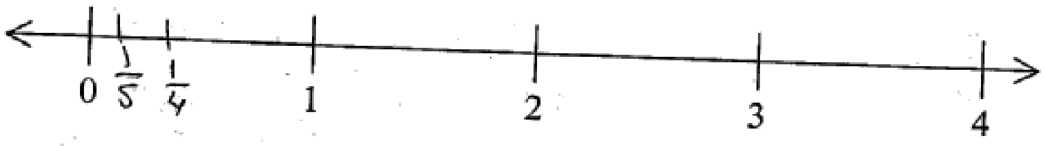

Figura 9. La gráfica de Abigaíl de dos fracciones.

El investigador le pidió a Abigaíl que usara *TI-InterActive!* para graficar los puntos $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{4}$ para ver si el resultado por computadora correspondía con su gráfica hecha a mano. Además, le pidió que incluyera los valores $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ para ver las diferentes distancias entre los puntos (Figura 10).

Los puntos eran claramente visibles en la gráfica por computadora de Abigaíl, pero cuando ella ingresó los valores de las cuatro fracciones, la herramienta tecnológica convirtió las fracciones a decimales, y luego etiquetó los extremos de los intervalos por medio de decimales. Esto puede ser un problema para algunos alumnos, pero Abigaíl pareció entender la transformación de los símbolos (i.e. $\frac{1}{2}$ a .5).

Figura 10. La gráfica de Abigaíl de cuatro fracciones usando *TI-InterActive!*.

Usando la gráfica creada por el programa, el investigador le preguntó a Abigaíl que si podía crear a mano una gráfica que fuera parecida a la gráfica por computadora. Ella lo hizo creando la Figura 11. Para sorpresa del investigador, su nueva gráfica no era mucho mejor que su original. Aunque las fracciones estaban en el orden correcto, sus distancias todavía estaban mal. En su dibujo, los cuatro puntos están igualmente espaciados, y el valor $\frac{1}{2}$ claramente no estaba en el punto medio entre 0 y 1. En este caso Abigaíl tampoco subdividió el segmento unitario en dos partes iguales para ubicar 1/2.

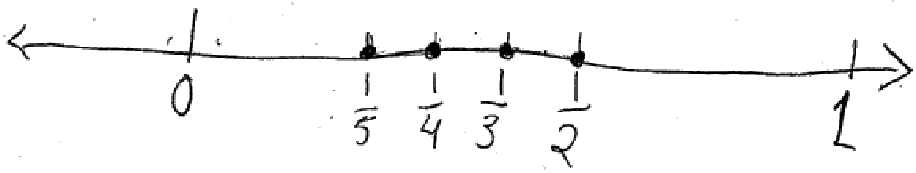

Figura 11. La gráfica de Abigaíl de cuatro fracciones unitarias.

En este momento, el investigador le preguntó acerca de la separación de los puntos en su gráfica a mano, y le pidió que la comparara con su gráfica por computadora. El quería que Abigaíl notara que las distancias entre los puntos en la computadora eran todos diferentes, mientras que sus puntos hechos a mano estaban puestos con distancias iguales. Al principio, Abigaíl pensaba de algún modo que los intervalos en la gráfica por computadora eran todos de la misma longitud.

I: [En su nueva gráfica a mano] ¿Ves esta distancia [de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$] y esta distancia [de $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$) y esta distancia [de $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{5}$]? ¿Ves cómo todas son iguales?

A: Ajá [Sí]

I: ¿Son de la misma manera aquí? [Señalando la gráfica en la pantalla]

A: Ajá [Sí, aunque parecía confundida.]

Abigaíl no veía las diferencias concretas entre las dos gráficas, así que el investigador le pidió a Abigaíl que calculara las diferencias entre pares de fracciones. Ella trató de hacerlo en el papel, pero no recordaba el algoritmo para restar fracciones. En este momento el investigador pensó que la sustracción de fracciones llevaría algún tiempo. Como Abigaíl no recordaba cómo realizar la operación, y como no era éste el punto de interés principal del estudio, el investigador le dijo a Abigaíl que usara la calculadora del programa. Un vez que Abigaíl completó los cálculos, las respuestas fueron copiadas en los espacios correspondientes entre los puntos (Figura 12).

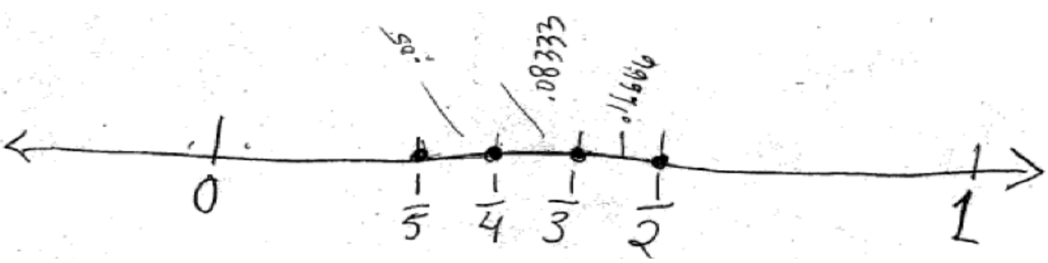

Figura 12. La gráfica de Abigaíl de cuatro fracciones unitarias con sus diferencias.

El investigador le preguntó a Abigaíl acerca de la distancia entre los puntos (valores) conforme las fracciones se hacían más grandes. Ella fue capaz de enunciar que conforme los puntos se alejaban de cero en la dirección positiva, los espacios o distancias entre los puntos se hacía más grade.

I: Entonces, ¿qué me puedes decir conforme ellos [señalando los intervalos entre los puntos] se alejan más y más en esta dirección?

A: Se hacen más grandes.

I: ¿Se hacen más grandes en esta dirección? [alejándose de cero en la dirección positiva]

A: Ajá [Sí]

I: Entonces [refiriéndose a los espacios entre los puntos en la Figura 13], ¿son éstos iguales?

A: No.

Aunque la noción de distancia de Abigaíl mejoró con esta parte de la intervención, ella no llegó a una completa comprensión durante esta sesión. Cuando el investigador le pidió que creara otra recta de números con intervalos que fueran a la misma escala que la gráfica hecha por la computadora, ella no supo cómo empezar. Esto pudo haber sido una consecuencia de demasiadas cambios de un tipo de una representación a otra y entre representaciones del mismo tipo para una sola sesión. En esta actividad, ella empezó evaluando fracciones utilizando símbolos escritos, luego utilizó el programa para transformarlas en símbolos decimales con valores equivalentes, luego los decimales fueron traducidos usando la computadora para representarlos en una recta numérica (con decimales como intervalos), seguido de la indicación para que Abigaíl transformara los decimales (de la gráfica por computadora) de regreso a fracciones y representarlas en la gráfica hecha a mano donde las longitudes de los intervalos estaban escritas en forma de decimales. De manera loable, Abigaíl fue capaz de lograr la mayoría de este proceso de transformación y traducción; su única falla fue en el paso final donde se le pidió re-copiar la gráfica. También podemos añadir que se podría haber enfatizado más durante la entrevista el papel que representa la unidad en cada una de las diferentes representaciones utilizadas, y cómo el uso explícito de la unidad podría haber llevado a una mejor comprensión de lo que es la distancia y su representación en la recta numérica.

Hubo otras experiencias positivas más específicas de esta actividad. Primero, es claro que Abigaíl comprende el orden entre las fracciones, por lo menos cuando el numerador tiene el valor de 1. Con demasiada frecuencia, los alumnos identifican la fracción mayor como aquella que tiene el denominador más grande. Segundo, ella sabía en qué orden debían aparecer los números en la gráfica. Conforme la recta numérica sube de cero a infinito, algunos alumnos grafican el valor 1/5 a la derecha del número 1/4 porque el valor 5 es más grande que el valor 4.

Sobre todo, aunque Abigaíl no pudo reproducir la gráfica al final, ella fue capaz de entender algunas características de la gráfica creada por la computadora. Esto fue sumamente importante en la investigación porque el programa *TI-InterActive!* proporcionó una experiencia de aprendizaje que tal vez no hubiera ocurrido en otras condiciones. El uso de la tecnología, no sólo como amplificador, sino también como reorganizador, junto con las interacciones con el investigador, le permitió a Abigaíl reorganizar sus pensamientos y ver que los intervalos en su gráfica hecha a mano eran inexactos comparados con la gráfica hecha por la computadora. Abigaíl fue capaz de ver que conforme los puntos se alejaban de cero en la dirección positiva, las diferencias entre los puntos se incrementaban. Este tipo de desarrollo de aprendizaje fue invaluable para Abigaíl, quien al principio tenía fuertes concepciones erróneas acerca de la distancia y medida entre puntos.

4. Comentarios finales

Hubo cuatro resultados importantes en esta parte del estudio. Primero, la habilidad para ordenar números en la recta numérica no implica la habilidad para representar la distancia entre los números. Esto fue evidente cuando Abigaíl trabajó con números enteros y fracciones unitarias. Ella fue capaz de ordenar una lista de valores del más pequeño al más grande y representarlos en una recta de números reales. Sin embargo, la distancia entre los puntos respectivos no estaba bien proporcionada cuando fueron graficados originalmente. Tal concepción errónea no fue una simple omisión de Abigaíl. También fue una sorpresa para el investigador que supuso que un alumno del nivel medio superior dominaba tanto el orden como la distancia entre números racionales en la recta numérica.

Segundo, Abigaíl fue capaz de usar tecnología en dos maneras diferentes. Al principio del estudio, ella pudo usar *TI-InterActive!* como una herramienta de aprendizaje. Su práctica usando la tecnología con números enteros le permitió después considerar el concepto de distancia al graficar a mano decimales con un dígito después del punto decimal. Más tarde en el estudio, Abigaíl usó *TI-InterActive!* para aprender que las distancias entre fracciones de denominadores consecutivos en la recta numérica no estaban uniformemente espaciados. Abigaíl también fue capaz de usar tecnología para apoyar su pensamiento. Al graficar decimales con un valor posicional después del punto, ella fue capaz de hacerlo a mano, luego mostrar por medio de *TI-InterActive!* que su gráfica por computadora era similar a su gráfica original a mano. Tal recurso le da a los alumnos confianza ya que son capaces de mostrar consistencias en su trabajo.

Tercero, el estudio mostró la importancia de que los maestros y los alumnos hagan explícito el concepto de unidad al trabajar con fracciones o decimales. Parte de la razón por la cual Abigaíl tuvo problemas para representar fracciones en la recta numérica fue que no hizo uso, implícita o explícitamente, de la subdivisión de la unidad en partes iguales para ubicar las fracciones comunes. En cambio, en el caso de las fracciones decimales, Abigaíl utilizó subdivisiones del segmento unitario en diez partes iguales, tanto en una gráfica generada por la computadora (Figura 10), como en una hecha a mano (Figura 6), para ubicar correctamente fracciones decimales en la recta numérica, aunque no hizo explícita la longitud de los segmentos generados por la subdivisión.

Finalmente, el estudio mostró que los alumnos pueden representar sus ideas en una variedad de formas, utilizando símbolos, gráficas, y verbalmente. Unas representaciones pueden ser más fáciles para algunos alumnos que otras. Esto fue evidente a lo largo del estudio ya que Abigaíl trabajó confiadamente con números racionales cuando estaban representados en la forma de decimales, pero batalló cuando los números estaban representados por fracciones. Las dificultades de Abigaíl están relacionada con la comprensión incompleta de la convención subyacente para representar números en la recta numérica, que la distancia entre dos puntos en esa recta debe ser proporcional a la diferencia entre los números que representan, y que esta distancia queda determinada por la longitud del segmento unitario. Este ejemplo muestra que los alumnos de nivel medio superior no sólo necesitan práctica transformando una representación en otra (fracciones a decimales), sino que deben tener oportunidades para demostrar su comprensión usando una variedad de representaciones dentro del mismo modo. De manera similar, más tarde en otro ejercicio, Abigaíl fue capaz de explicar y utilizar símbolos escritos para mostrar que los espacios entre las fracciones unitarias se incrementaba conforme las fracciones se hacían más grandes en la dirección positiva, alejándose de cero. Sin embargo, fue incapaz de traducir su comprensión al modo de representación sugerida por el investigador, creando una gráfica a mano. Sería desafortunado suponer que los alumnos no entienden un concepto cuando son restringidos a utilizar una sola representación. Sólo porque un alumno no lo puede hacer usando el método favorito del maestro, no quiere decir que no está entendiendo.

El caso de Abigaíl también tiene importancia desde el punto de vista práctico. Por ejemplo, el segundo autor ha utilizado este caso en sus cursos de métodos de enseñanza de las Matemáticas para maestros de nivel medio superior. Por una parte, es importante que los futuros maestros no asuman que todos los alumnos de nivel medio superior tienen una comprensión completa de fracciones, decimales, y su representación en la recta numérica. Por otra parte, con los ejemplos de las representaciones de Abigaíl como punto de partida, los futuros maestros tienen la oportunidad de diseñar actividades de enseñanza que puedan ayudar a alumnos como Abigaíl a superar sus dificultades.

Referencias

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational numbers, ratios, and proportions. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan Publishing.

Behr, M., Lesh, R. Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *The acquisition of mathematical concepts and processes*. (pp. 91-126). New York: Academic Press.

Behr, M. J., & Post, T. R. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods* (pp. 201-248). Boston, MA: Allyn and Bacon.

Bright, G. W., Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(3), 215-232.

Bruno, A. & Cabrera, N. (2006). La recta numérica en los libros de texto en España. *Educación Matemática*, *18*(3), 125-149.

Clement, L. (2004). A model for understanding, using, and connecting representations. *Teaching Children Mathematics*, *11*(2), 97-102.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Consultado Enero 18 2013 de http://www.corestandards.org/Math

Cramer, K. (2003). Using a translation model for curriculum development and classroom instruction. En R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism* (pp. 449-463).

Doritou, M. (2006). *Understanding the number line: Conception and practice.* Unpublished doctoral dissertation, University of Warwick, Warwick, England. http://go.warwick.ac.uk/wrap/2622

Ernest, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(4), 411-424.

Harel, G., & Confrey, J. (1994). The *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.

Hiebert, J., & Behr, M. (1988). Introduction: Capturing the major themes. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 1-18). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kastberg, S. E., & Norton, A. (2007). Building a system of rational numbers. In P. Kloosterman & F. K. Lester (Eds.), *Results and interpretations of the 2003 mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp. 67-93). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren, T. E. (1994). Multiple views of multiplicative structures. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 387-397). Albany, NY: State University of New York Press.

Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities: Consideration for identification, diagnosis, and remediation. En R. Lesh, D. Mierkiewicz, & M.G. Kantowski (Eds.), *Applied mathematical problem solving* (pp. 166-175). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987). Rational number relations and proportions. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Pea, R. D. (1987). Cognitive technologies in mathematics education. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 89–122). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Post, T. & Cramer, K. (1989). Knowledge, representation, and qualitative thinking. En M. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher- Special publication of the AACTE* (pp. 221-231). Oxford: Pergamon Press.

Rothery, Thomas G. (2006). English as a Second Language students using technological tools and multiple representations to learn the real number line. Tesis de doctorado no publicada. Tempe, AZ: Arizona State University.

Sowder, J. T. (1995). Instructing for rational number sense. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 15-30). Albany, NY: State University of New York Press.

Sherman, M. (2012) The role of technological tools in relation to students' mathematical thinking during classroom tasks. In L. R. Van Zoest, J. –J. Lo, & J. L. Kratky (Eds.), *Proceedings of the 34th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 1103-1110). Kalamazoo, MI: Western Michigan University

Steffe, L. & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodologies: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly & R.A. Lesh (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268–275.

TI Interactive! [programa de cómputo]. Texas Instruments.

Wearne, D., & Kouba, V. L. (2000). Rational numbers. In E. A. Silver & P. A. Kenney (Eds.), *Results from the Seventh Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp. 163-191). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Yin, R. K. (1994). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Referencia de los autores

Thomas G. Rothery, Perry High School

Alfinio Flores Peñafiel, University of Delaware

Order and distance of fractions and decimals on the number line: The case of Abigail.

Thomas G. Rothery, Perry High School, Chandler AZ (U. S. A.)

Alfinio Flores-Peñafiel, University of Delaware, Newark DE (U. S. A.)

This is a case study about conceptions and understandings of order and distance of fractions and decimal numbers of Abigail (pseudonym), a high school student, and of her hand-made and computer generated representations of rational numbers and decimals on the number line.

To analyze the comprehension of Abigail about order and distance we pay attention to three ways in which students represent their understanding. These are *spoken language*, which includes mathematical vocabulary; *written symbols* which include mathematical statements as well as natural language phrases; and *pictures and diagrams* which include number lines and graphs. These are central elements of the conceptual framework developed by Lesh (1979) and extended over the years by him and other authors.

Another important aspect when analyzing the thinking of Abigail is the nature and of the unit in the rational numbers. The unit gives meaning to the quantity represented but often is implicit more than explicit. The use of unit with rational numbers corresponds to a change from discrete to continuous quantities, and from counting to measure and partition as primary quantifying activities. Also important are the mathematical conventions related with the representation of fractions on the number line. The number line requires the use of symbols to communicate part of the desired meaning, and the integration of two forms of information, visual and symbolic. We also consider the use of technology as amplifier and reorganizer. When used as organizer, the use of technology is closely related to support higher order thinking of the students (Sherman, 2012).

At the beginning, Abigail's representations showed a clear understanding of how to represent order among different numbers on the number line, but not how to represent distances between them correctly. The case of Abigail is interesting because it shows that what students see on a computer generated representation of fractions on the number line, or what they focus on when they represent fractions on the number line may be different from what teachers see or want their students to see in such representations. The number line model assumes familiarity with the underlying representation conventions. Teachers may use such conventions implicitly and see them in certain representation, but students may not be aware of such conventions, and focus on other aspects. Abigail's case is also interesting because it illustrates that it is not enough to show a student a correct representation for her to comprehend the concepts that the teacher wants her to learn. Her case also shows that just because a student is not able to answer a question using a certain kind of representation, does not mean that the student is not understanding with another form of representation. For Abigail, the form of representation used (decimals or fractions) was important for her ability to show her understanding about distances between different rational numbers. The study reveals the thinking of the student, her difficulties and progress, through her interactions with the interviewer and the computer program.