

## Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta

José António Fernandes, Universidade do Minho (Portugal)

Paulo Ferreira Correia, Escola Secundária/3 de Barcelos (Portugal)

José Miguel Contreras, Universidade de Granada (Espanha)

Recibido el 8 de mayo de 2012; aceptado el 19 de septiembre de 2013

---

### Ideas intuitivas de alumnos de 9º año en probabilidad condicional y probabilidad conjunta

#### Resumen

*La profundización de la enseñanza de las probabilidades en la educación básica, como viene siendo preconizado, resalta la importancia de investigar las posibilidades de la enseñanza formal de contenidos no incluidos hasta ahora en los respectivos programas escolares, como es el caso de la probabilidad condicionada y de la probabilidad conjunta. Con ese propósito se estudian en este artículo las ideas intuitivas de los alumnos de 9º año en estos contenidos, a partir de sus respuestas escritas en una encuesta con 4 ítems, de ellos, dos se refieren a probabilidad condicional y los otros dos a probabilidad conjunta. En los resultados se observa una gran discrepancia de aciertos de los alumnos en los dos tipos de probabilidad estudiados, con cerca de dos tercios de respuestas correctas en los ítems de probabilidad condicionada y apenas un 6% o menos de alumnos con respuestas correctas en los ítems de probabilidad conjunta.*

**Palabras clave:** intuiciones, probabilidad condicional, probabilidad conjunta, alumnos de 9º año.

### Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta

#### Resumo

*O aprofundamento do ensino das probabilidades no ensino básico, como vem sendo preconizado, releva a importância de averiguar sobre as possibilidades do ensino formal de conteúdos até agora não incluídos nos respetivos programas escolares, como é o caso da probabilidade condicionada e da probabilidade conjunta. É com esse propósito que se estudam neste artigo as ideias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade nesses conteúdos a partir das suas resoluções escritas numa tarefa constituída por quatro itens, dos quais dois se referem à probabilidade condicionada e os outros dois à probabilidade conjunta. Em termos de resultados obtidos, salienta-se uma grande discrepância do sucesso dos alunos nos dois tipos de probabilidade estudados, com cerca de dois terços dos alunos a apresentarem respostas corretas nos itens de probabilidade condicionada e apenas 6% dos alunos ou menos a apresentarem respostas corretas nos itens de probabilidade conjunta.*

**Palavras-chave:** intuições, probabilidade condicionada, probabilidade conjunta, alunos do 9º ano.

Para citar: Fernandes, J.A., Correia, P.F., & Contreras, J.M. (2013). Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 4, 5-26.

### **Intuitive ideas of 9th grade pupils about conditional probability and joint probability**

#### **Abstract**

*Deepening the teaching of probability in basic education, as has been recommended, underlines the importance of investigating the possibilities of teaching formal content so far not included in the curriculum, such as conditional probability and joint probability. With this purpose we study in this article the intuitive ideas of 9th grade pupils about such contents, basing on their written solutions to a task consisting of four items, two of which refer to conditional probability and the other two to joint probability. In terms of results, we note a large discrepancy in the success of the pupils in the two types of probability studied, with about two-thirds of pupils presenting correct answers to the items about conditional probability and only 6% or less of pupils presenting correct answers to the items about joint probability.*

**Keywords:** intuitions, conditional probability, joint probability, 9<sup>th</sup> grade pupils.

### **Les idées intuitives d'élèves en 9ème sur la probabilité conditionnelle et la probabilité conjointe**

#### **Résumé**

*L'approfondissement de l'enseignement des Probabilités dans l'éducation de base, tel que préconisé, souligne l'importance de rechercher sur les possibilités de l'enseignement formel de contenus, pas inclus jusqu'au moment dans les programmes scolaires respectifs, tels que ceux de la probabilité conditionnelle et de la probabilité conjointe. Donc, nous étudions dans cet article les idées intuitives des élèves du 9ème année concernant ces contenus à partir de leurs résolutions écrites dans une tâche composé par quatre questions, dont deux se réfèrent à la probabilité conditionnelle et les deux autres à la probabilité conjointe. Les résultats obtenus relèvent un écart important dans la réussite des élèves dans les deux types de probabilité étudiés, avec environ deux tiers des élèves qui présentent des réponses correctes à des questions sur la probabilité conditionnelle contre seulement 6% ou moins des élèves qui présentent des réponses correctes concernant les questions sur la probabilité conjointe.*

**Mots-clés:** intuitions, probabilité conditionnelle, probabilité conjointe, élèves du 9<sup>ème</sup>.

## **1. Introdução**

Nos últimos tempos tem-se assistido a um aprofundamento do ensino da estatística e das probabilidades nas salas de aula e nos programas escolares de muitos países, entre os quais se inclui também Portugal (Ministério da Educação, 2007).

No caso específico das probabilidades, alguns investigadores defendem que adiar para uma idade mais avançada dos alunos o seu ensino formal dá lugar à formação e consolidação das muitas intuições erradas que a literatura documenta (Batanero, 2013; Fischbein, 1975). Neste texto, entende-se por intuições as ideias dos alunos adquiridas na sua vivência quotidiana e independentemente do ensino formal, e que Fischbein (1975) designa por intuições primárias.

Ora, os conceitos de probabilidade condicional e de probabilidade conjunta encontram-se entre aqueles que mais ideias erradas despoletam nos alunos (Polaki, 2005; Tarr & Lannin, 2005; Watson & Moritz, 2002) e, por outro lado, essas ideias erradas não tendem a desaparecer simplesmente a partir do desenvolvimento cognitivo espontâneo dos alunos.

Em alunos do 11º ano, sem ensino de probabilidades, Fernandes (1990) observou uma forte adesão a ideias intuitivas erradas em situações contraintuitivas e Fernandes (2001) observou ganhos relativamente limitados dos alunos em situações não

construtivas relativamente a alunos do 8º ano, também sem ensino de probabilidades, especialmente no caso da probabilidade de acontecimentos de experiências compostas.

Apesar das dificuldades experimentadas pelos alunos, o conceito de probabilidade condicionada é de grande relevância, estando na base do desenvolvimento de vários outros conteúdos, de que são exemplos a probabilidade conjunta, a independência, o conceito subjetivo de probabilidade ou a inferência estatística (Borovcnik, 2012).

Tradicionalmente o ensino formal dos conceitos de probabilidade condicionada, independência e probabilidade conjunta acontece apenas no ensino secundário, frequentemente associado às técnicas formais de contagem. Contudo, mais recentemente, com base em vários estudos (e.g. Tarr, 1997; Tarr & Jones, 1997, Watson, 2005), tem sido defendido o ensino destes conceitos no ensino básico, naturalmente a partir de uma abordagem diferente daquela que tem sido seguida no ensino secundário, enfatizando os aspetos intuitivos.

Assim, tendo em vista dar resposta às mais recentes orientações de aprofundamento do ensino das probabilidades nas escolas e, simultaneamente, contribuir para erradicar muitas das intuições erradas dos alunos, torna-se importante indagar as ideias dos alunos do ensino básico nestes conceitos de probabilidade condicionada e probabilidade conjunta, tendo por finalidade última decidir das possibilidades do seu ensino formal no ensino básico.

## 2. Investigação prévia

No estudo de Watson e Moritz (2002) os alunos do ensino primário, secundário e recém-admitidos à universidade demonstraram dificuldades em acontecimentos envolvendo a probabilidade conjunta e a probabilidade condicionada. No presente estudo referimo-nos à probabilidade condicionada, fundamentalmente, como restrição do espaço amostral. Nestas situações, a determinação da probabilidade condicionada é influenciada pela identificação do subconjunto implicado como uma proporção do conjunto total (Watson & Moritz, 2002).

Na opinião de Tarr e Lannin (2005) os julgamentos em probabilidade condicionada requerem a habilidade de estabelecer comparações probabilísticas, havendo evidências contraditórias que documentam as destrezas de alunos do ensino básico para efetuarem corretamente tais comparações. Para Piaget e Inhelder (1951) é necessário que as crianças compreendam as relações parte-todo para compararem probabilidades de acontecimentos, enquanto outros autores identificaram outras estratégias que permitem aos alunos efetuar essas comparações. Recorrendo a vantagens (*odds*) ou outra comparação do tipo parte-parte, os alunos dos estudos de Falk (1993) e Green (1983) foram capazes de comparar probabilidades de dois acontecimentos, sugerindo que os alunos não precisam de atingir o estágio das operações formais para efetuarem com sucesso comparações probabilísticas (Tarr & Lannin, 2005).

Tarr (1997), num estudo com 26 alunos do 5º ano, observou que, antes de um programa de instrução em probabilidade condicionada e independência, os alunos começaram por utilizar mais comparações parte-parte do que comparações parte-todo quando faziam julgamentos sobre probabilidade condicionada. Segundo o autor, se bem que as comparações parte-parte permitem a muitos alunos perceberem que a probabilidade condicionada de alguns acontecimentos se altera em situações de não

reposição, estas estratégias limitam, muitas vezes, os alunos no reconhecimento de que a probabilidade de todos os acontecimentos se altera nas situações em que não há reposição.

Fischbein e Gazit (1984), numa experiência de ensino sobre probabilidade condicionada, envolvendo 285 alunos dos 5º, 6º e 7º anos de escolaridade, concluíram que a percentagem de respostas corretas na determinação de probabilidades condicionadas em situações sem reposição, em geral, foi mais baixa do que nas situações com reposição.

No caso específico da probabilidade condicionada, Pollatsek, Well, Konold e Hardiman (1987) verificaram que os alunos confundem  $P(A|B)$  com  $P(A \cap B)$ , isto é, não distinguem claramente os significados da condicional e da conjunta, confusão que se tornou particularmente evidente aquando da interpretação de enunciados de problemas que implicavam a identificação destas probabilidades. Esta dificuldade também foi observada em futuros professores do ensino primário (Estrada & Díaz, 2006) e em alunos do 9º ano de escolaridade (Correia, Fernandes & Contreras, 2011) na resolução de uma tarefa envolvendo frequências de dois acontecimentos numa tabela de dupla entrada.

Por outro lado, Falk (1986) verificou que muitos alunos não discriminam entre uma probabilidade condicionada e a sua transposta, isto é, entre as duas probabilidades  $P(A|B)$  e  $P(B|A)$ , erro que designou por *falácia da condicional transposta*. No estudo de Correia et al. (2011), antes referido, verificou-se que alguns alunos do 9º ano também aderiram a este erro.

Já no estudo desenvolvido por Lecoutre e Durand (1988), em que participaram 342 alunos dos 14 aos 18 anos de idade, os autores concluíram que os alunos tendem a admitir que acontecimentos de carácter aleatório são por natureza equiprováveis. Esta ideia, designada por *enviesamento de equiprobabilidade*, mostrou-se extremamente resistente a variações de fatores relacionados com a situação experimental (informação de natureza combinatoria, de natureza frequencista, modificações ao nível da formulação, etc.) e com a caracterização dos sujeitos (nível de formação, tipo de estudos secundários, sexo, etc.), que foram manipulados no estudo.

Polaki (2005) no seu estudo concluiu que os alunos do ensino básico apresentam muitas dificuldades no estabelecimento do espaço amostral de experiências compostas, apresentando frequentemente conjuntos de resultados incompletos destas experiências com base em raciocínios subjetivos (como a preferência pessoal) ou estratégias de tentativa-e-erro. Ora, desempenhando a análise do espaço amostral um papel decisivo na determinação da probabilidade, é natural que as dificuldades referidas se repercutam na determinação da probabilidade conjunta. Além disso, o autor verificou ainda que mesmo os alunos que foram sucedidos na definição do espaço amostral das experiências compostas cometeram muitos erros nas predições de probabilidade.

Em geral, as dificuldades dos alunos em estabelecer o espaço amostral de experiências compostas têm origem na exigência de integração de mais do que um aspeto da situação numa estrutura significativa. Por exemplo, no caso da experiência de lançamento de duas moedas, o aluno terá de coordenar simultaneamente a contagem e a ordem dos elementos de dois conjuntos, integrando-os para obter o espaço amostral da experiência composta. Ainda segundo Polaki (2005), nesta

estratégia está implícito o uso da regra do cardinal do produto cartesiano enquanto forma de confirmação de que o espaço amostral está realmente completo.

No caso da probabilidade conjunta, salienta-se o erro da *falácia da conjunção* (Tversky & Kahneman, 1983), que significa que os sujeitos avaliam a probabilidade da conjunção como sendo superior à probabilidade de um dos acontecimentos seus constituintes, isto é,  $P(A \cap B) > P(A)$  ou  $P(A \cap B) > P(B)$ . Este fenómeno verifica-se, sobretudo, quando um dos acontecimentos é altamente representativo do outro. Fernandes (1990) verificou que a maioria dos alunos do 11º ano e futuros professores de matemática que participaram no estudo afirmaram ser mais provável o acontecimento “Um ser humano é de cor negra e nasceu em África” do que o acontecimento “Um ser humano é de cor negra” pois “ter nascido em África” é altamente representativo de “ser de cor negra”.

Nos estudos de Díaz, Contreras, Batanero e Roa (2012) e Díaz e Batanero (2009), em que participaram futuros professores do ensino secundário e estudantes universitários de Psicologia, respetivamente, verificou-se que eles exibiram, com elevada incidência, vários enviesamentos de raciocínio sobre probabilidade condicional, dos quais se salientam a falácia da condicional transposta, a falácia da inversão do eixo temporal, a falácia da conjunção e a confusão entre acontecimentos independentes e mutuamente exclusivos.

Watson e Moritz (2002) acrescentam às dificuldades antes referidas que os alunos quando confrontados com a determinação de uma probabilidade conjunta, para além de a confundirem com a probabilidade da união, simplesmente adicionam as probabilidades dos acontecimentos que a constituem ou determinam a sua média.

No estudo que realizaram, Watson e Moritz (2002) verificaram que o aumento de nível escolar e de compreensão de conceitos básicos de probabilidade esteve associado ao aumento de respostas corretas, mas não esteve associado à diminuição da incidência da falácia da conjunção. Independentemente do ano escolar e do grau de compreensão dos conceitos básicos de probabilidades, aproximadamente 20% a 40% dos estudantes apresentaram respostas que violaram a regra da conjunção. Apenas uma pequena percentagem de alunos, entre 1% e 4%, determinaram a probabilidade do acontecimento conjunto como sendo a média ou a soma das probabilidades dos dois acontecimentos.

Também no estudo de Fernandes (2001), em que foram incluídos vários itens de probabilidade em experiências compostas, se verificou que alunos do 8º ano e 11º ano (sem ensino de probabilidades) revelaram muitas dificuldades, as quais se deveram ao recurso a probabilidades das experiências simples implicadas na experiência composta, a uma descrição incompleta do espaço amostral, a fatores causais e ao enviesamento de equiprobabilidade.

### 3. Metodologia

No presente artigo estudam-se, fundamentalmente, as ideias de alunos do 9º ano de escolaridade em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta no contexto de extração de bolas de um saco, considerando o tipo de respostas (corretas e erradas), as estratégias de resolução e os erros cometidos pelos alunos.

Participaram no estudo 310 alunos do 9º ano de escolaridade pertencentes a quatro escolas do Litoral Norte de Portugal, duas inseridas em meio urbano e duas em

meio rural. As idades dos alunos variavam entre os 13 e os 17 anos, com 14 anos de média de idades (que é a idade normal de frequência do 9º ano); 51% dos alunos eram do sexo feminino e 49% do sexo masculino; e as suas classificações na disciplina de Matemática, no final do 8º ano, numa escala de 1 a 5, variavam entre 2 e 5, com uma média de 3,1.

A recolha de dados foi efetuada através de um questionário que incluía nove questões, quase todas com vários itens, sobre independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral. No presente texto apresentaremos os resultados obtidos numa das questões constituída por quatro itens, que envolvem a extração sucessiva de duas bolas de um saco, os dois primeiros com reposição da primeira bola extraída e os dois últimos sem reposição da primeira bola extraída. Além disso, destes itens, dois referem-se à determinação de uma probabilidade condicionada e os outros dois referem-se à determinação de uma probabilidade conjunta.


O questionário foi aplicado em aulas dos alunos, de 90 minutos, no início do 2º período escolar do ano letivo 2011/2012 e os alunos tinham estudado os conteúdos de probabilidades previstos no programa da disciplina de Matemática do 9º ano no início do ano letivo, que inclui aspetos de linguagem e as definições clássica e frequentista de probabilidade, e de que não faz parte o estudo formal da probabilidade condicionada nem da probabilidade conjunta.

Em termos de análise de dados, estudaram-se as respostas, as justificações e os erros cometidos pelos alunos nos quatro itens da questão, destacando-se os conteúdos de probabilidade condicionada e probabilidade conjunta, determinando-se frequências e recorrendo-se a tabelas como forma de sintetizar os resultados. No caso das respostas, estudou-se ainda a existência de uma possível dependência entre os tipos de respostas (corretas e erradas) nos itens de probabilidade condicionada e de probabilidade conjunta.

#### 4. Apresentação e discussão de resultados

A questão proposta aos alunos envolve o cálculo de probabilidades condicionadas e conjuntas nos contextos de extração sucessiva, com e sem reposição, de duas bolas de um saco contendo 3 bolas brancas e 2 bolas pretas.

**Questão.** Num saco há 3 bolas brancas e 2 bolas pretas, conforme se mostra na figura seguinte. As bolas são todas iguais exceto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente **duas** bolas do saco.



a) Considera que a 1ª bola extraída é **colocada** de novo no saco antes de se extrair a 2ª bola.

1. Sabe-se que a 1ª bola extraída é branca. Qual a probabilidade de a 2ª bola ser branca?
2. Qual a probabilidade de obter **duas** bolas brancas?

b) Considera que a 1ª bola extraída **não é colocada** de novo no saco antes de se extrair a 2ª bola.

1. Sabe-se que a 1ª bola extraída é branca. Qual a probabilidade de a 2ª bola ser preta?
2. Qual a probabilidade de obter **uma** bola branca e **uma** bola preta (por qualquer ordem)?

*Figura 1. Questão proposta.*

Na análise efetuada às resoluções dos alunos consideramos, a seguir, o tipo de respostas (corretas e erradas), as estratégias de resolução e os erros cometidos pelos alunos.

#### 4.1. Respostas dos alunos

Na Tabela 1 apresentam-se as percentagens de respostas corretas e erradas dos alunos, incluindo também as não respostas, nos quatro itens da questão.

Tabela 1. *Distribuição (em %) dos alunos segundo o tipo de resposta aos diferentes itens da questão (n = 310).*

Itens e conteúdos	Respostas		Não respostas
	Corretas	Erradas	
a1: $P(B_2   B_1)$	66,8	25,8	7,4
a2: $P(B_1 \cap B_2)$	6,1	79,0	14,9
b1: $P(P_2   B_1)$	66,4	23,9	9,7
b2: $P(B_1 \cap P_2) + P(P_1 \cap B_2)$	2,9	77,7	19,4

Da observação da Tabela 1 conclui-se ter havido uma considerável percentagem de acertos nos itens relativos ao cálculo da probabilidade condicionada e uma elevada percentagem de respostas erradas nos itens que envolvem o cálculo da probabilidade conjunta, em que também aumenta a percentagem de não respostas. No caso da probabilidade conjunta, os resultados confirmam as dificuldades referidas por Polaki (2005) e por Fernandes (2001).

As maiores dificuldades dos alunos nos itens de probabilidade conjunta podem, pelo menos em parte, dever-se ao facto de a probabilidade conjunta poder ser relacionada com a probabilidade condicionada. Ora, essa aplicação da probabilidade condicionada à probabilidade conjunta perspectiva esta última como um conceito mais elaborado do que o da primeira.

Já no caso dos dois itens de probabilidade conjunta, quando aplicada a regra do produto, a maior dificuldade dos alunos em b2 relativamente a a2 pode explicar-se pelos diferentes processos matemáticos envolvidos, que no caso de b2 envolve contagem, ordem e união, enquanto no caso de a2 apenas a contagem é relevante.

Estudando agora a existência de possível associação entre o tipo de resposta nos itens de probabilidade condicionada (a1 e b1) e nos itens de probabilidade conjunta (a2 e b2), relacionámos as frequências de respostas corretas e erradas, considerando o valor 0 correspondente a nenhuma resposta correta e o valor 1 correspondente a pelo menos uma resposta correta no conjunto dos dois itens respetivos, obtivemos os resultados que constam da Tabela 2.

Tabela 2. *Distribuição das respostas corretas e erradas segundo os itens de probabilidade condicionada e probabilidade conjunta.*

Probabilidade condicionada	Probabilidade conjunta		Total
	0	1	
0	65	4	69
1	218	23	241
Total	283	27	310

Por observação dos dados da Tabela 2 conclui-se que a grande maioria dos alunos (218) acertaram pelo menos um dos itens de probabilidade condicionada e erraram ambos os itens de probabilidade conjunta e muito poucos (23) acertaram pelo menos um de probabilidade condicionada e outro de probabilidade conjunta, tendo-se verificado que a aplicação do teste de independência de  $\chi^2$  não determinou diferenças estatisticamente significativas entre as frequências das duas variáveis. Onde podemos concluir que as respostas corretas em probabilidade condicionada não estão associadas às respostas corretas em probabilidade conjunta.

Seguidamente, no sentido de compreender o diferente desempenho dos alunos nos itens de probabilidade condicionada e conjunta, estudam-se as estratégias e os erros dos alunos que se inferem das suas resoluções.

#### 4.2. Estratégias de resolução

Na resolução dos quatro itens da questão, para além de cálculos e texto, algumas das produções dos alunos (9,8%) envolveram as estratégias apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3. *Distribuição de frequências (em %) das estratégias envolvidas nas produções dos alunos nos quatro itens da tarefa.*

Estratégias	Itens			
	a1	a2	b1	b2
Diagrama de árvore	6 (66,7)	15 (37,5)	9 (69,2)	19 (40,4)
Tabela de dupla entrada	1 (11,1)	7 (17,5)	—	9 (19,1)
Regra do produto	—	11 (27,5)	—	3 (6,4)
Diagrama de árvore e regra do produto	—	6 (15,0)	2 (15,4)	8 (17,0)
Desenhos	2 (22,2)	—	2 (15,4)	1 (2,1)
Regra da soma	—	—	—	3 (6,4)
Enumeração sistemática	—	1 (2,5)	—	2 (4,3)
Diagrama de árvore, regra do produto e regra da soma	—	—	—	2 (4,3)
Total	9 (100)	40 (100)	13 (100)	47 (100)



Da tabela conclui-se que foi nos itens que envolvem o cálculo da probabilidade conjunta, nas quais se obteve a menor percentagem de respostas corretas, que os alunos mais recorreram a estas estratégias. Donde podemos admitir que o maior grau de dificuldade dos itens a2 e b2 motivou os alunos na procura de novas estratégias que os conduzissem à obtenção de uma resposta correta ou errada.

A estratégia mais utilizada pelos alunos para obterem as respostas na questão consistiu na construção de um *diagrama de árvore*, que em 49 resoluções conduziu a 13 respostas corretas, distribuídas da seguinte forma: 3 respostas corretas no item a1; 1 resposta correta no item a2; 8 respostas corretas no item b1 e 1 resposta correta no item b2.

Esta estratégia ocorreu associada a dois cenários distintos. O primeiro consiste na construção de um diagrama de árvore a partir do qual são efetuadas contagens dos casos favoráveis e possíveis para calcular a probabilidade pedida (ver Figura 2).

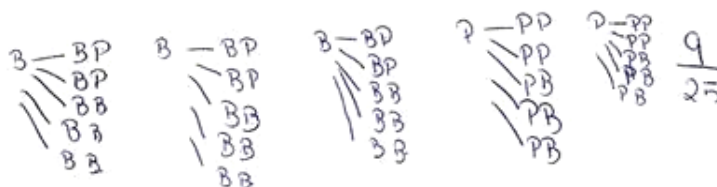


Figura 2. Resposta do aluno  $A_{226}$  no item a2.

No segundo cenário é construído também um diagrama de árvore, assinalando agora os valores das probabilidades nos ramos da árvore para determinar o valor da probabilidade pedida (ver Figura 3).

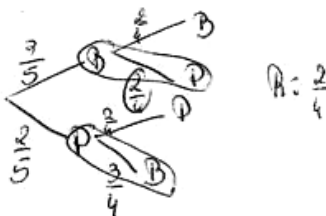


Figura 3. Resposta do aluno  $A_{28}$  no item b1.

A segunda estratégia mais utilizada consistiu na construção de uma *tabela de dupla entrada* (ver Figura 4), que em 17 resoluções conduziu a 7 respostas corretas, distribuídas da seguinte forma: 6 respostas corretas no item a2 e 1 resposta correta no item b2.

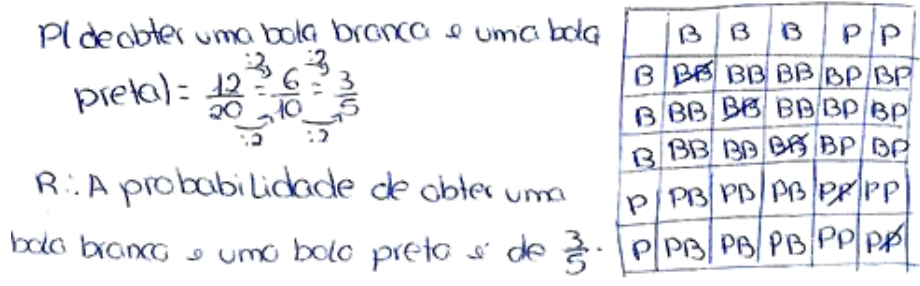


Figura 4. Resposta do aluno  $A_{101}$  no item b2.

Quanto à estratégia *regra do produto* (ver Figura 5), ela consistiu no recurso à operação de multiplicação para obter a resposta, que em 14 resoluções conduziu a 6 respostas corretas, todas elas no item a2.

$P(\text{obter duas bolas brancas}) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

Figura 5. Resposta do aluno  $A_6$  no item a2.

A estratégia *diagrama de árvore e regra do produto* combina uma árvore de probabilidades com a operação de multiplicação (ver Figura 6). Esta estratégia ocorreu em 16 resoluções dos itens a2, b1 e b2, conduzindo sempre a respostas corretas no item a2 e a uma resposta correta no item b2.

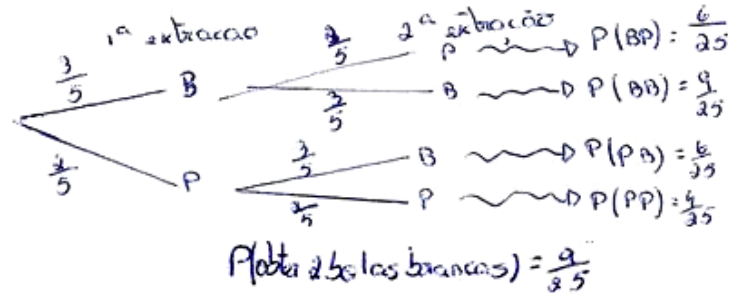


Figura 6. Resposta do aluno  $A_{34}$  no item a2.

A estratégia *desenhos* consiste na construção de um desenho que ajude a clarificar as condições impostas pelo problema (ver Figura 7). Esta estratégia ocorreu em 5 resoluções dos itens a1, b1 e b2, tendo conduzido sempre a respostas corretas, exceto no item b2 em que a única resposta obtida através desta estratégia é incorreta.

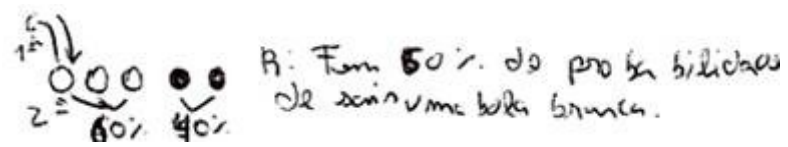



Figura 7. Resposta do aluno  $A_{174}$  no item a1.

A estratégia *regra da soma* envolve a operação de adição de probabilidades para obter uma probabilidade conjunta (ver Figura 8), que nas 3 resoluções do item b2 conduziu sempre a respostas erradas.

$$P(\text{sem brancos e a outra preta}) = \frac{3}{5} + \frac{2}{4} = \frac{12}{20} + \frac{10}{20} = \frac{22}{20} = \frac{11}{10}$$

Figura 8. Resposta do aluno  $A_{37}$  no item b2.

A estratégia *enumeração sistemática* (ver Figura 9) consistiu na procura organizada das sequências possíveis e favoráveis a certo acontecimento, para obter a resposta nos itens a2 e b2. Esta estratégia foi utilizada apenas em 3 resoluções, conduzindo sempre a respostas erradas.

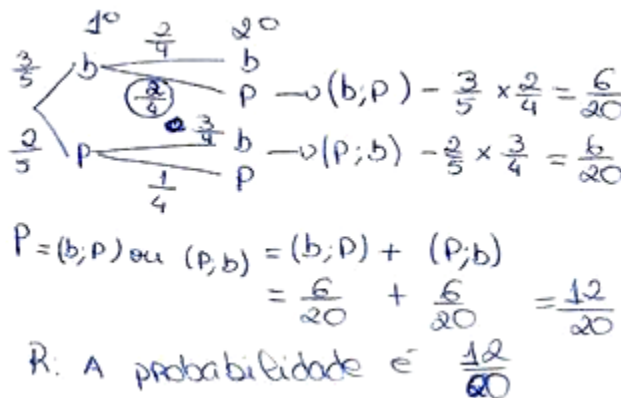


$$P(\text{saír duas bolas brancas}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$\frac{1-2}{1-3}$	$\frac{2-1}{2-3}$	$\frac{3-1}{3-2}$	$\frac{4-1}{4-2}$	$\frac{5-1}{5-2}$
$\frac{1-4}{1-5}$	$\frac{2-4}{2-5}$	$\frac{3-4}{3-5}$	$\frac{4-3}{4-5}$	$\frac{5-3}{5-4}$

Figura 9. Resposta do aluno  $A_{187}$  no item a2.

Na estratégia *diagrama de árvore, regra do produto e regra da soma* combinam-se as três estratégias já referidas (ver Figura 10) para obter a resposta no item b2. Esta estratégia foi usada apenas por dois alunos e conduziu sempre à resposta correta.



$$P = (b;p) \text{ ou } (p;b) = (b;p) + (p;b) = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20}$$

R: A probabilidade é  $\frac{12}{20}$

Figura 10. Resposta do aluno  $A_{39}$  no item b2.

As várias estratégias adotadas pelos alunos são também observadas em outros estudos, como em Fischbein (1975), Green (1983) e Watson e Moritz (2002). De entre as representações gráficas, Fischbein (1975) destaca o diagrama de árvore, pois, uma vez entendida a sua construção, este poderá, por um lado, ser generalizado para um grande número de elementos e, por outro lado, permitirá a adaptação a novos problemas derivados do inicial. No entanto, contrastando com a sua importância, os alunos sentem dificuldades na sua construção e no seu uso, donde se recomenda que seja dada mais importância a este recurso didático na sala de aula.

Globalmente, a eficácia das estratégias antes referidas revelou-se um tanto limitada pois apenas em cerca de 36% dos casos conduziu às respostas corretas no conjunto dos quatro itens da tarefa. Considerando, agora, separadamente os dois itens de probabilidade condicionada (a1 e b1) e os dois itens de probabilidade conjunta (a2 e b2) verifica-se que as estratégias conduziram a respostas corretas em 71% dos casos e em 27% dos casos, respetivamente.

Deste modo, embora com base apenas nos alunos a que se referem as estratégias analisadas, conclui-se que a maior dificuldade da probabilidade conjunta relativamente à probabilidade condicionada perpassou a globalidade das estratégias adotadas por esses alunos nos respetivos itens, tal como verificou antes para o conjunto das respostas de todos os alunos.

Do que foi apresentado, conclui-se que é notória a dificuldade dos alunos em recorrer a técnicas organizadas de contagem que lhes permita descrever corretamente o espaço amostral e calcular as respetivas probabilidades, tal como adverte Polaki (2005). E, quando o fazem, a dificuldade subsiste na construção das representações esquemáticas e na sua interpretação. Daqui resulta a importância de aprofundar estas estratégias, dada a sua pertinência na definição do espaço amostral e subsequente determinação da probabilidade conjunta.

### 4.3. Erros dos alunos

Na Tabela 4 apresenta-se a distribuição dos alunos segundo o tipo de erro cometido nos quatro itens da questão. Apesar de as resoluções dos alunos poderem acumular outros erros, em cada uma das categorias de erros apresentadas na Tabela 4 enfatizou-se o erro que mais influenciou a resolução do aluno.

Tabela 4. *Distribuição de frequências (em %) dos alunos segundo o tipo de erro cometido nos quatro itens da questão.*

Erros	Itens			
	a1	a2	b1	b2
Confusão entre probabilidade condicionada e conjunta	2 (2,5)	87 (35,5)	1 (1,4)	35 (14,6)
Considerar o número pretendido de bolas ou de casos possíveis	7 (8,8)	75 (30,6)	4 (5,4)	21 (8,8)
Razão bolas brancas (pretas) / bolas pretas (brancas)	20 (25,0)	9 (3,7)	34 (45,9)	9 (3,7)
Cálculo de duas probabilidades	—	—	—	71 (29,6)
Centrar a atenção na cor	—	34 (13,9)	4 (5,4)	31 (12,9)
Probabilidade conjunta como soma ou diferença de probabilidades	—	19 (7,7)	—	45 (18,8)
Não reposição	37 (46,3)	7 (2,9)	—	—
Inverso de uma razão	13 (16,2)	9 (3,7)	8 (10,8)	5 (2,1)
Reposição	—	—	19 (25,7)	8 (3,3)
Ordem	—	—	—	8 (3,3)
Outros valores	1 (1,2)	5 (2,0)	4 (5,4)	7 (2,9)
Total	80 (100)	245 (100)	74 (100)	240 (100)

Tal como seria de esperar, da Tabela 4 resulta imediatamente que os itens de probabilidade conjunta (a2 e b2) são aqueles em que se verifica uma maior ocorrência de erros. De seguida, descrevem-se os erros cometidos pelos alunos na resolução dos quatro itens da questão.

O erro *confusão entre probabilidade condicionada e probabilidade conjunta* ocorreu sempre que os alunos não foram capazes de distinguir entre  $P(B_2 | B_1)$  e  $P(B_1 \cap B_2)$  nos itens a1 e a2 e entre  $P(P_2 | B_1)$  e  $P(B_1 \cap P_2) + P(P_1 \cap B_2)$  nos itens b1 e b2. Esta confusão ocorreu em 125 resoluções, tendo predominado nos itens a2 e b2, com os alunos a apresentarem uma probabilidade condicionada quando era pedida uma probabilidade conjunta (ver Figura 11).

- a) Considera que a 1ª bola extraída é colocada de novo no saco antes de se extrair a 2ª bola.
- 1) Sabe-se que a 1ª bola extraída é branca, Qual a probabilidade de a 2ª bola ser branca?  

$$P(\text{2ª bola ser branca}) = \frac{3}{5}$$
  - 2) Qual a probabilidade de obter duas bolas brancas?  

$$P(\text{obter 2 bolas brancas}) = \frac{3}{5}$$
- b) Considera que a 1ª bola extraída não é colocada de novo no saco antes de se extrair a 2ª bola.
- 1) Sabe-se que a 1ª bola extraída é branca. Qual a probabilidade de a 2ª bola ser preta?  

$$P(\text{2ª bola ser preta}) = \frac{2}{4}$$
  - 2) Qual a probabilidade de obter uma bola branca e uma bola preta (por qualquer ordem)?  

$$P(\text{obter 1 bola branca e 1 bola preta}) = \frac{2}{4}$$

Figura 11. Respostas do aluno  $A_{58}$  nos quatro itens da questão.

O erro *considerar o número pretendido de bolas ou de casos possíveis* consiste em admitir que a probabilidade pedida é o quociente entre o número de bolas que se pretende extrair do saco ou o número de casos possíveis e o número total de bolas ou de bolas de uma certa cor existentes no saco. Os valores apresentados pelos alunos foram: 1/3, 1/4, 1/5 e 2/3 em 7 resoluções (1, 1, 2 e 3 resoluções, respetivamente) no item a1; 2/3 e 2/5 em 75 resoluções (17 e 58 resoluções, respetivamente) no item a2; 1/5 em 4 resoluções no item b1; e 1/5 e 2/5 em 21 resoluções (3 e 18 resoluções, respetivamente) no item b2.

Uma vez que os alunos se limitaram a apresentar uma razão de probabilidade sem acrescentarem qualquer outra explicação, efetuou-se uma interpretação dos termos das frações obtidas pelos alunos, tendo-se concluído pelos seguintes significados: 1 — uma bola branca, uma bola preta ou o resultado BP (Branca e Preta); 2 — duas bolas; 3 — três bolas brancas; 4 — quatro bolas no saco (admitindo que depois de retirada do saco a bola não é repostas); 5 — cinco bolas no saco.

O erro *razão bolas brancas (pretas) / bolas pretas (brancas)* consiste em identificar a probabilidade com uma espécie de *vantagem*, isto é, a razão entre o número de bolas brancas (pretas) e o número de bolas pretas (brancas) existentes no saco ou a razão do número de bolas brancas existentes no saco antes e depois da primeira extração. Assim, os alunos admitem a probabilidade como sendo o quociente entre o número de

casos favoráveis e o número de casos desfavoráveis a um certo acontecimento, tendo sido identificados quatro cenários distintos associados a este erro: no cenário *comparação do número de bolas brancas com o número de bolas pretas* o aluno analisa a vantagem das bolas brancas em relação às bolas pretas (ver Figura 12), afirmando a razão 3/2 nos itens a1, a2, b1 e b2 (14, 9, 1 e 5 resoluções, respetivamente), sem considerarem a não reposição da primeira bola no caso dos itens b1 e b2; no cenário *comparação do número de bolas pretas com o número de bolas brancas* o aluno analisa a vantagem das bolas pretas em relação às bolas brancas,

$\frac{3}{2}$  se são 3 bolas brancas e 2 pretas é essa a probabilidade, porque a 1ª bola que foi extraída foi colocada na mesma no saco.  
 $\frac{3 \text{ bolas brancas}}{2 \text{ pretas}}$

Figura 12. Resposta do aluno  $A_{99}$  no item a1.

afirmando no item b1 a razão 2/3 ou 2/2 (4 e 29 resoluções, respetivamente), consoante admitem ou não a reposição da primeira bola extraída; no cenário *comparação entre o número de bolas brancas* o aluno analisa a vantagem entre as bolas brancas antes e depois da primeira extração, afirmando a razão 3/3 em 6 resoluções do item a1; no cenário *consideração de duas vantagens*, que ocorreu apenas no item b2 e em 4 resoluções, os alunos apresentam duas vantagens, talvez influenciados pela referência no enunciado tanto às bolas brancas como às bolas pretas (ver Figura 13).

Preta      Branca  
 ↓            ↓  
 $P = \frac{2}{3}$        $P = \frac{3}{2}$

Figura 13. Resposta do aluno  $A_{236}$  no item b2.

O erro *cálculo de duas probabilidades* consiste em considerar duas razões de probabilidade, quando a resposta correta envolve apenas uma (ver Figura 14). Este erro ocorreu em 71 resoluções do item b2.

$\left. \begin{matrix} \text{bolas} \\ \text{brancas} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{m.c.p} \\ \text{m.c.p} \end{matrix} = \frac{3}{5} = 0,6$   
 ↓  
 60%  
 $\left. \begin{matrix} \text{bolas} \\ \text{pretas} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{m.c.p} \\ \text{m.c.p} \end{matrix} = \frac{2}{5} = 0,4$   
 ↓  
 40%  
 R: A probabilidade de sair bola branca é de 60% e de sair bola preta é de 40%.

Figura 14. Resposta do aluno  $A_{24}$  no item b2.

O erro *centrar a atenção na cor* consiste em considerar o atributo cor sem ter em conta as frequências das respetivas cores, tomando para acontecimentos elementares pares do tipo BB, BP, PB,... e considerando-os acontecimentos elementares equiprováveis. Este erro verificou-se em 34 resoluções do item a2, 4 resoluções do item b1 e 31 resoluções do item b2.

Dependendo do conjunto de pares considerados, os alunos obtiveram razões de probabilidade diferentes. Por exemplo, centrando-se na descrição do espaço amostral a partir das cores, o aluno obtém o valor 1/2 para a probabilidade pedida no item b2 (ver Figura 15).

BP  
BB  
PB  
PP R. A probabilidade de obter uma  
bola branca e um preta é de  $\frac{1}{2}$ .

Figura 15. Resposta do aluno  $A_{231}$  no item b2.

Em geral, este erro resultou de os alunos determinarem apenas algumas das sequências possíveis e favoráveis em resultado de não terem distinguido as bolas brancas e pretas e também por não atenderem à reposição ou não reposição da primeira bola antes de se extrair a segunda. A resposta do aluno  $A_{217}$ , apresentada na Figura 16, ilustra essas dificuldades.

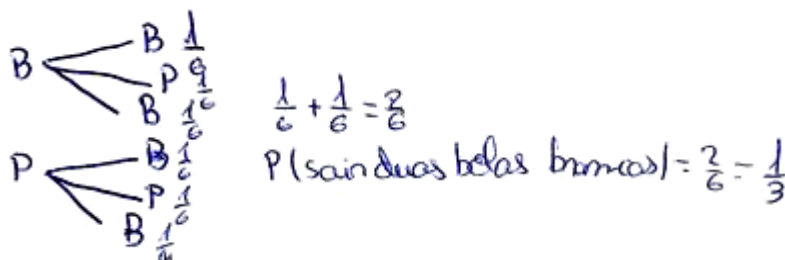


Figura 16. Resposta do aluno  $A_{217}$  no item a2.

A adesão a este erro revela a dificuldade dos alunos na identificação do espaço amostral e na aplicação de processos de enumeração completa, aspetos que em muito influenciaram as suas respostas.

O erro *probabilidade conjunta como soma ou diferença de probabilidades* consiste em adicionar ou subtrair probabilidades, muitas das quais estão envolvidas no erro *cálculo de duas probabilidades*. Este erro verificou-se em 19 resoluções do item a2 e em 45 resoluções do item b2.

No caso da soma de probabilidades, referida em 12 resoluções do item a2 e 45 resoluções do item b2, podemos verificar que o aluno  $A_{94}$  (ver Figura 17) adicionou as probabilidades de obter bola branca e bola preta na primeira extração.

$$\begin{aligned}
 P(\text{bola branca}) &= \frac{3}{5} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} &= \frac{5}{5} \\
 P(\text{bola preta}) &= \frac{2}{5} \\
 R: \text{ A probabilidade de sair uma bola} \\
 & \text{branca e uma bola preta é } \frac{5}{5}.
 \end{aligned}$$

Figura 17. Resposta do aluno  $A_{94}$  no item b2.

No caso da diferença de probabilidades, referida apenas em 7 resoluções do item a2, podemos verificar que o aluno  $A_{295}$  (ver Figura 18) subtraiu as probabilidades de obter bola branca e bola preta na primeira extração, o que corresponde a determinar a probabilidade a partir do excedente de bolas brancas em relação às bolas pretas.

$$\begin{aligned}
 P(\text{seu 2 brancos}) &= \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \\
 &= \frac{1}{5} = 0,2
 \end{aligned}$$

Figura 18. Resposta do aluno  $A_{295}$  no item a2.

O erro de *não reposição* consiste em não considerar a reposição da primeira bola extraída do saco antes de se extrair a segunda bola numa extração com reposição. Este erro ocorreu em 37 resoluções do item a1 e 7 resoluções do item a2, tendo os alunos ignorado a reposição em relação aos casos favoráveis, aos casos possíveis ou a ambos. No caso do aluno  $A_{229}$  (ver Figura 19) podemos constatar que ele apenas falhou a reposição em relação aos casos possíveis.

$$\begin{array}{r}
 B \quad \text{---} \quad B \quad \frac{3}{4} \\
 \frac{3}{5} \quad \text{---} \quad P \quad \frac{2}{4} \\
 P(2^{\text{a}} \text{ bola ser branca}) = \frac{3}{4}
 \end{array}$$

Figura 19. Resposta do aluno  $A_{229}$  no item a1.

O erro *inverso de uma razão* consiste em obter o inverso da razão de probabilidade pedida, o inverso de uma razão de probabilidade que, embora não sendo a probabilidade solicitada, representa a probabilidade de um acontecimento com significado no contexto da situação apresentada, o inverso de uma vantagem ou o inverso de razões incluídas nos erros anteriores. Este erro ocorreu em 13 resoluções do item a1, 9 resoluções do item a2, 8 resoluções do item b1 e 5 resoluções do item b2.



O erro de *reposição* consiste em considerar a reposição da bola extraída do saco antes de se extrair a segunda bola numa extração sem reposição. Este erro ocorreu em 19 resoluções do item b1 e 8 resoluções do item b2, itens que envolviam a extração consecutiva de duas bolas sem reposição.

No item b1 os alunos não efetuaram a redução do espaço amostral aquando da extração da segunda bola, obtendo a razão 2/5 em vez de 2/4. No item b2 dois alunos consideraram 4 bolas em vez de 5 e a reposição da primeira bola extraída, obtendo a fração 4/16, e seis alunos consideram a reposição da primeira bola extraída na contagem dos casos possíveis e obtiveram a fração 12/25 (ver Figura 20).

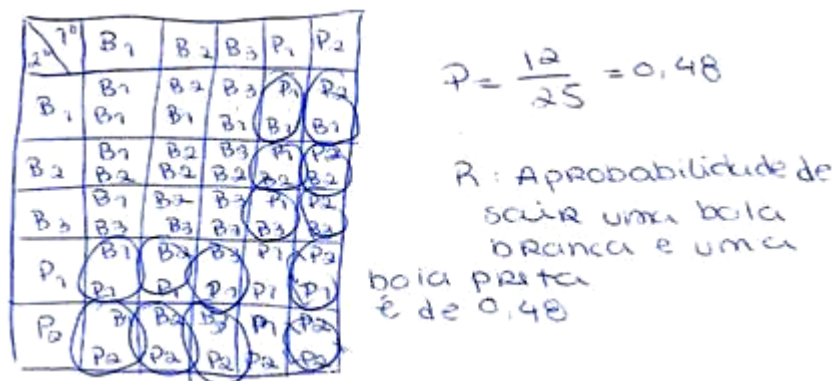


Figura 20. Resposta do aluno A<sub>98</sub> no item b2.

O erro de *ordem* consiste em considerar que as trocas de ordem não geram novas configurações. Este erro ocorreu em 8 resoluções do item b2. Excetuando um aluno que obteve a razão 6/25, porque acumulou o erro de ter considerado a extração com reposição na contagem dos casos possíveis, todos os outros obtiveram a razão de probabilidade 6/20 (ver Figura 21).

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$

Figura 21. Resposta do aluno A<sub>268</sub> no item b2.

Finalmente, por oposição às categorias antes referidas, incluíram-se na categoria *outros valores* as respostas desprovidas de sentido na situação apresentada.

Como foi previsto, os vários erros cometidos pelos alunos nos quatro itens da questão, que foram acima descritos, explicam as suas maiores dificuldades nos itens de probabilidade conjunta relativamente aos itens de probabilidade condicionada. De entre os erros que mais explicam as dificuldades dos alunos na probabilidade condicionada e na probabilidade conjunta, salientam-se:

- A *confusão entre probabilidade condicionada e probabilidade conjunta*, em que os alunos apresentaram uma probabilidade condicionada em vez da probabilidade conjunta pedida, erro também observado nos estudos de Correia et al. (2011), Díaz et al. (2012), Díaz e Batanero (2009), Estrada e Díaz (2006) e Pollatsek et al. (1987);

- *Considerar o número pretendido de bolas ou de casos possíveis*, em que os alunos determinam a probabilidade pedida através do quociente entre o número de bolas que se pretende extrair do saco ou o número de casos possíveis e o número total de bolas ou de bolas de uma cor existentes no saco;
- *A razão bolas brancas (pretas) / bolas pretas (brancas)*, em que os alunos identificaram a probabilidade como uma vantagem, que, de acordo com Tarr (1997), constitui estratégia intuitiva para comparar probabilidades a partir do recurso a relações do tipo parte-parte;
- *O cálculo de duas probabilidades*, em que os alunos interpretaram a probabilidade de extrair duas bolas, uma branca e uma preta, em duas extrações sucessivas (item b2) como sendo as probabilidades de extrair uma bola branca e de extrair uma bola preta numa única extração;
- *Centrar a atenção na cor*, em que os alunos revelaram dificuldades na aplicação de processos de enumeração completa e, em consequência, obtiveram espaços amostrais incorretos;
- *A probabilidade conjunta como soma ou diferença de probabilidades*, em que os alunos adicionaram ou subtraíram as probabilidades de extrair uma bola branca e de extrair uma bola preta numa única extração, erro também observado, embora com pequena incidência, no estudo de Watson e Moritz (2002).

## **5. Conclusão**

Os resultados do estudo realizado mostram de forma consistente e sistemática que os alunos claramente sentiram mais dificuldades no conceito de probabilidade conjunta do que no conceito de probabilidade condicional, tal como Watson e Moritz (2002) também verificaram no seu estudo.

Assim, enquanto no caso do conceito de probabilidade condicionada os alunos do 9º ano possuem um substrato intuitivo que pode constituir um adequado ponto de partida para o ensino formal do conceito, tal como também outros estudos documentam (e.g., Correia & Fernandes, 2013; Tarr, 1997), o mesmo não se pode concluir em relação ao conceito de probabilidade conjunta. Neste último caso, as dificuldades dos alunos são consistentes, sendo transversais ao tipo de respostas (corretas e erradas), às estratégias de resolução e aos erros por eles cometidos.

No caso dos erros cometidos pelos alunos salienta-se a sua grande variedade e considerável incidência na globalidade das respostas, sendo os erros *considerar o número pretendido de bolas ou de casos possíveis*, *o cálculo de duas probabilidades* e *centrar a atenção na cor* pouco referidos na literatura. Nos dois primeiros erros, de entre outros aspetos, está presente identificar probabilidades de acontecimentos em experiências compostas com probabilidades de acontecimentos em experiências simples, o que enfatiza a pertinência de os alunos tomarem consciência da necessidade de combinar esses valores através de operações adequadas em ordem a obter a probabilidade pretendida.

Já no caso do terceiro erro, os valores de probabilidade obtidos são insensíveis às quantidades de objetos presentes (bolas na questão explorada), sendo que a inconsistência de tal raciocínio pode ser salientada através da exploração de situações em que se varia o número desses objetos, de modo a gerar situações de conflito

cognitivo, como recomenda Polaki (2005), ou simplesmente questionar a racionalidade subjacente a esse raciocínio.

Por outro lado, o facto de não se ter verificado qualquer associação entre o desempenho dos alunos em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta, também constatada por Watson e Moritz (2002), levou estes autores a advogarem “a necessidade de encorajar os estudantes a interpretar a linguagem dos dois tipos de acontecimentos” (p. 83), ajudando-os através da ênfase de termos que destaquem as relações lógicas. Por exemplo, a utilização das frases “simultaneamente A e B” ou “A e também B” podem ajudar os alunos no reconhecimento do acontecimento conjunção, distinguindo-o dos acontecimentos disjunção e condicional.

Simultaneamente, os alunos podem também ser ajudados na distinção entre os vários tipos de acontecimentos através da exploração de situações concretas tais como experiências com e sem reposição (como a tarefa aqui tratada) ou pistas visuais tais como diagramas de Venn e tabelas de dupla entrada. Sobretudo para os alunos do 9º ano, que não foram antes confrontados com probabilidades da conjunção, da disjunção e condicional, pelo menos numa perspectiva formal, estas pistas visuais revestem-se de uma importância acrescida ao permitirem-lhes clarificar o significado das relações lógicas e ao proporcionarem-lhes meios sistemáticos de contagem que são decisivos na determinação das respetivas probabilidades.

Polaki (2005) refere que os alunos do final do ensino elementar quando fazem predições de probabilidade em acontecimentos simples e compostos apresentam respostas subjetivas, usam frases quantitativas informais para descrever probabilidades e mostram ser capazes de conectar predições à composição do espaço amostral e ordenar probabilidades em consonância. Ainda segundo este autor, vários fatores contribuíram para os progressos conseguidos por estes alunos durante a instrução, designadamente a experimentação em pequenas amostras, a análise da composição do espaço amostral e a exploração de questões concetuais em pequeno grupo ou no grupo-turma.

Apesar das dificuldades sentidas pelos alunos no presente estudo, sobretudo em relação à probabilidade conjunta, para Watson e Moritz (2002) muitos alunos podem interpretar acontecimentos condicionais e conjuntivos em contextos sociais, e não apenas em contextos de extração de bolas de urnas. O raciocínio apropriado acerca destes acontecimentos “pode ser um objetivo que não é fácil de atingir por todos os alunos, contudo ele pode não ser tão difícil como alguns investigadores pensaram antes” (p. 83).

## Referências

- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? Em J.A. Fernandes, P.F. Correia, M.H. Martinho & F. Viseu (Orgs.), *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-21). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Borovenik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 5-27.
- Correia, P.F., & Fernandes, J.A. (2013). Caracterização das intuições de alunos do 9º ano em independência e probabilidade condicionada. Em J.A. Fernandes, F. Viseu, M.H. Martinho & P.F. Correia (Orgs.), *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na*

- Escola* (pp. 47-68). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho. Consultado em março 11 del 2012, <http://hdl.handle.net/1822/23124>
- Correia, P.F., Fernandes, J.A., & Contreras, J.M. (2011). Intuições de alunos do 9º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada. Em C. Nunes, A. Henriques, A. Caseiro, A. Silvestre, H. Pinto, H. Jacinto & J. Ponte (Orgs.), *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. Consultado em março 5 del 2012, Online: <http://hdl.handle.net/1822/13659>
- Díaz, C., & Batanero, C. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 4(3), 131-162.
- Díaz, C., Contreras, J.M. Batanero, C., & Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación secundaria. *Bolema*, 26(22), 1207-1226.
- Estrada, A., & Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables: an exploration study with future teachers. Em A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education. Consultado em fevereiro 2 del 2012 [Online: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/C413.pdf>]
- Falk, R. (1993). *Understanding probability and statistics: a book of problems*. Wellesley, Massachusetts: A K Peters.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. Em R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistic* (pp. 292-297). Victoria, BC: University of Victoria.
- Fernandes, J.A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.
- Fernandes, J.A. (2001). Intuições probabilísticas em alunos do 8.º e 11.º anos de escolaridade. *Quadrante*, 10(2), 3-32.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1-24.
- Green, D.R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. Em D.R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G.M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.
- Lecoutre, M., & Durand, J. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: Etude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19(3), 357-368.
- Ministério da Educação (2007). *Programa ajustado de matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Polaki, M.V. (2005). Dealing with compound events. Em G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 191-214). Nova Iorque: Springer.
- Pollatsek, A., Well, A.D., Konold, C., & Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255-269.

- Tarr, J.E. (1997). Using middle school students' thinking in conditional probability and independence to inform instruction. (Doctoral dissertation, Illinois State University, 1997). *Dissertation Abstracts International*, 49, Z5055.
- Tarr, J.E., & Jones, G.A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 39-59.
- Tarr, J.E., & Lannin, J.K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? Em G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 215-238). Nova Iorque: Springer.
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 90(4), 293-315.
- Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. Em G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 145-169). Nova Iorque: Springer.
- Watson, J.M., & Moritz, J.B. (2002). School students' reasoning about conjunction and conditional events. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33(1), 59-84.

### Referencias a los autores

José António Fernandes, Universidade do Minho (Portugal). [jfernandes@ie.uminho.pt](mailto:jfernandes@ie.uminho.pt)

Paulo Ferreira Correia, Escola Secundária/3 de Barcelos (Portugal). [ferreiracorreiapaulo@gmail.com](mailto:ferreiracorreiapaulo@gmail.com)

José Miguel Contreras, Universidade de Granada (Espanha). [jmcontreras@ugr.es](mailto:jmcontreras@ugr.es)

## **Intuitive ideas of 9th grade pupils about conditional probability and joint probability**

José António Fernandes, Universidade do Minho (Portugal)

Paulo Ferreira Correia, Escola Secundária/3 de Barcelos (Portugal)

José Miguel Contreras, Universidade de Granada (Espanha)

The recent growing interest in stochastic teaching at school level in many countries, including Portugal, suggests the need to carry out studies that support the possibility of teaching concepts that used to be postponed to secondary education to elementary school students; obviously with a more intuitive rather than a formal perspective.

In this work, we study the intuitive ideas of 310 9<sup>th</sup> grade students concerning the concepts of conditional probability and joint probability, to evaluate the possibility of teaching such concepts at elementary school. To achieve this goal we analyzed in depth the students' written answers to four items -two of them concerning conditional probability and two related to joint probability- and, within the context of drawing two balls from a bag, with and without replacement.

Focusing on the results of this study, it should be emphasised that about two thirds of students gave correct answers to the items related to conditional probability, whereas few students (6% or less) answered correctly the items related to joint probability. Nevertheless, we found no association between the type of answers (right or wrong) and the type of probability (conditional or joint probability).

The analysis of the strategies used by the students and the errors that can be inferred from their resolutions are essential for understanding the different students' performance in the items related to conditional and joint probability.

A closer look at the strategies, related to a part of the resolutions, shows these strategies included the use of *tree diagram*, *two-way table*, *product rule*, *addition rule*, *drawings* and *systemic enumeration*, and in some cases, the combination of two or three of these strategies. The most frequent errors explaining the students' difficulties are mainly related to the *confusion between conditional probability and joint probability*, *considering the required number of balls or possible cases*, *the ratio between white balls (black) / black balls (white)*, *calculation of two probabilities*, *focus on colour and considering joint probability as a sum or difference of probabilities*. These strategies and errors, described in the literature, confirm a deeper difficulty in joint probability due to the reduced efficiency of the already mentioned strategies and to a higher incidence of the mentioned errors.

In conclusion, the intuitive knowledge shown by the students proves the existence of conditions to introduce the teaching of conditional probability, while in the case of the joint probability the situation is more complex. Nevertheless, bearing in mind the students' difficulties with joint probability, confirmed by many other studies, we should take into consideration the more optimistic view conveyed by Watson and Moritz (2002) and the progress achieved by the students through instruction in Polaki's study (2005).