EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES Y EVENTOS INDEPENDIENTES: CONCEPCIONES Y DIFICULTADES

Adriana D'Amelio de Tari
Universidad Nacional de Cuyo, Argentina
adamelio@fcemail.uncu.edu.ar

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo profundizar en el estudio y caracterización de los errores en estudiantes de nivel superior acerca de los conceptos de eventos mutuamente excluyentes e independientes. Ciertamente observaciones previas de actitudes y respuestas a exámenes en los alumnos de nivel universitario que aprueban un primer curso de Estadística, han detectado confusiones entre eventos mutuamente excluyentes e independientes, e indicado algunas de las ideas espontáneas que tienden a elaborar acerca de ambos conceptos en las diferentes situaciones en las que esta noción entra en juego .En primer lugar es usual que asocien eventos ajenos a eventos independientes. En segundo lugar la independencia se confunde con experiencias independientes, sin que se explicite la diferencia entre ambas nociones. En tercer lugar la confusión se debe a la causalidad. Si bien el concepto de eventos independientes y mutuamente excluyentes es aparentemente sencillo, las ideas espontáneas de las personas dan lugar a respuestas equivocadas. Aquí entra en juego la relación entre la realidad y el objeto matemático puesto en juego. En este trabajo se analizan las concepciones erróneas del sujeto frente a determinadas situaciones, cuando se ha tenido acercamiento a discusiones de la definición del concepto de eventos independientes y mutuamente excluyentes en un curso de probabilidad, qué tan persistentes son esas ideas, qué ocurre en el proceso en el que el sujeto confronta sus concepciones erróneas con los resultados de la aplicación de los conceptos teóricos, con el fin de proporcionar elementos para su mejor tratamiento e implementación en la enseñanza.

Introducción

En estadística el problema parte de la realidad y para el alumno es un problema relacionar la realidad con el objeto matemático. Ernesto Sánchez dice: “en educación cabe preguntarse en qué condiciones y cómo un sujeto cambia una concepción, una creencia , una intuición o idea espontánea sobre una situación determinada , en virtud de la utilización de un instrumento científico”. Ante esto y como es común en un curso de probabilidad es muy fácil confundir el concepto de eventos mutuamente excluyente con el de eventos independientes, según Sánchez E. (tesis doctoral sobre eventos independientes) el problema surge de:

la creencia que eventos independientes son lo mismo que eventos ajenos

la confusión entre eventos independientes y experiencias independientes.

Además se interpreta la independencia como algo sólo cuantitativo comprobado por la regla del producto.

Estos conceptos son sencillos o aparentemente simples en su definición, pero sin embargo la confusión persiste en los alumnos universitarios que toman un curso de Estadística 1. El fenómeno se da en carreras matemáticas y no matemáticas.

Este trabajo pretende entender las confusiones entre eventos mutuamente excluyentes e independientes con el fin de proporcionar elementos para su mejor tratamiento e implementación en la enseñanza.

Problema de Investigación

En primer lugar es usual la confusión que asocia ajeno a independientes, y ya se sabe que sólo si uno de ellos es vacío se verifican ambas cosas.
En segundo lugar el concepto de eventos independientes se da cómo una pareja de eventos definida mediante la regla condicional o la regla del producto y en el caso en que la probabilidad sea cero y no necesariamente el evento sea vacío, da lugar aplicando la regla del producto a pensar que se verifica la independencia.
En tercer lugar la independencia se confunde con experiencias independientes. Sin que se expliciten la diferencia entre ambas nociones.
En cuarto lugar como dice Sánchez en su tesis la confusión se debe a la causalidad.
El problema empieza en probabilidad que siempre ha sido considerada por los docentes en su experiencia de dictado un tema difícil de entender de parte de los alumnos Si bien el concepto de eventos independientes y mutuamente excluyentes es aparentemente sencillo las ideas espontáneas de las personas dan lugar a respuestas equivocadas.
Estas preconcepciones han tenido interés en investigadores tanto en psicología cómo en didáctica. Es por eso que de las preguntas de (Hawkins, A. Kapadia, R., 1984, p.351) he seleccionado las siguientes:
¿Cuáles son las relaciones entre las concepciones subjetivas o intuitivas y aquellas concepciones que son transmitidas en el salón de clases y que constituyen el conocimiento formal de probabilidad?
¿Hay técnicas de enseñanza y aprendizaje óptimas que tomen en cuenta las concepciones espontáneas de las nociones de probabilidad de los sujetos mientras que desarrollan su conocimiento formal?
Ciertamente observaciones previas de actitudes y respuestas a exámenes nos han indicado algunas de las ideas espontáneas que tienden a elaborar acerca de eventos independientes y mutuamente excluyentes en las diferentes situaciones en las que esta noción entra en juego, pero no se sabe en detalle que relación guardan estas concepciones con las definiciones formales.
Según las preguntas de Sánchez. E. pag 11.
¿Qué pasa con las concepciones erróneas del sujeto sobre independencia frente a determinadas situaciones, cuando se ha tenido acercamiento a discusiones de la definición del concepto de eventos independientes y mutuamente excluyentes en un curso de probabilidad?
¿Qué ocurre en el proceso en el que el sujeto confronta sus concepciones erróneas con los resultados de la aplicación de los conceptos teóricos?
Los sujetos adjudican a la situación un contexto, convocado por la palabra independencia, en donde incluyen elementos a experiencias perceptivas o empíricas: relaciones de incidencia en el primer caso, relaciones temporales en el otro.

Marco Teórico
El estudio de las concepciones de los alumnos sobre los hechos ha sido motivado en gran medida, por el fracaso que sistemáticamente han tenido en materias científicas. Cornu (1983) denomina concepciones espontáneas de una idea matemática al conjunto de intuiciones, imágenes y conocimientos que se forman en el sujeto a partir de su experiencia diaria y a partir del significado coloquial que poseen los términos utilizados en la expresión formal de la idea matemática, estas concepciones

espontáneas se forman con anterioridad a los procesos formales de enseñanza. Szydlik (2000), por su parte, se refiere a creencias sobre contenidos y sobre fuentes de convicción. Para esta autora, las creencias son presunciones personales acerca de la naturaleza de la realidad, que orientan la actividad individual en la búsqueda de las metas propuestas. Probablemente el mejor marco teórico para ubicar estas concepciones, modelos o creencias de los alumnos es el referido a los obstáculos epistemológico. Bachellard (1987) introdujo esta expresión al escribir: “El problema del conocimiento científico debe proponerse en términos de obstáculos. ....Es en el propio acto de conocer, íntimamente, cuando aparecen, por una especie de necesidad funcional, los retardos y las dudas. Ahí es donde encontramos las causas de la paralización e incluso del retroceso, donde descubrimos las causas de la inercia, que llamaremos obstáculos epistemológicos” (p.13). El planteamiento de Bachelard en el comienzo de su obra *La formación del espíritu científico* es sobre la noción de obstáculo epistemológico para la explicación de la aparición inevitable de errores en los estudiantes. :

“En el acto mismo de conocer, íntimamente, es donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones; es ahí, donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos.”

“La noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación”

La noción de obstáculo epistemológico y las sucesivas tipificaciones y caracterizaciones de la misma, se han utilizado cómo clave para el estudio, sistematización, análisis y explicación de los errores que se presentan en el pensamiento científico.

Brousseau (1983) precisa por su parte que un obstáculo epistemológico es un conocimiento que funciona exitosamente en un determinado dominio de actividad, pero no así en otros a los que se intenta trasponer y en los que conduce a errores y contradicciones. Percibir con claridad ese conocimiento y rechazarlo es una parte esencial del propio conocimiento.

Historia y epistemología

Steinbring analiza el desarrollo histórico de la independencia estocástica en una perspectiva epistemológica, con el fin de encontrar elementos para una perspectiva didáctica. En el desarrollo histórico se es testigo de una inversión del contenido del concepto y de su definición matemática. El desarrollo debería ser organizado en una relación permanente entre lo matemático y la realidad.

La dificultad en el caso de la independencia, es poner de acuerdo dos concepciones en contraposición. Por una parte, hay una definición matemática teórica:

Sea (Ω ,*A, P)* un espacio de probabilidad. Los sucesos A, B pertenecientes a Ω son independientes sí y sólo sí: $P(A \cup B) = P(A) . P(B)$

Por otra parte hay numerosas representaciones intuitivas, fundamentadas sobre las experiencias más diversas, que hacen decir qué observaciones resultados de experiencias, fenómenos, etc, son independientes unos de otros.

Mark Kac ha insistido sobre la relación entre definición matemática y representación intuitiva de la independencia.

Von Mises (1964, p.38) objeta la definición formal de independencia alegando que en la teoría axiomática de Kolmogorov hay acontecimientos que son independientes pero que no pueden en ninguna forma sentirse como independientes unos de otros, en un sentido intuitivo como " no se influencian " o " son diferentes unos de otros": "Cuando se consideran dos caracteres que se influencian o no, se da un sentido a la noción de independencia. Sin embargo, una definición basada en la regla de la multiplicación no es mas que la generalización debilitada de un concepto lleno de significado" .

Ese problema de la inversión del contenido y de la definición matemática juega un papel importante en la enseñanza. En algunos libros aparece la deducción de la fórmula de independencia, por el sesgo de las probabilidades condicionales. Esto genera consideraciones de analogía con la incompatibilidad y el teorema de la adición.. Engel ha constatado que, para las aplicaciones, la independencia no es definida (por la regla de la multiplicación) sino postulada.

Boge dice: " La dificultad reside en la traducción entre matemática y realidad."

Estas dificultades aparecen también en el desarrollo histórico del concepto.

Desde la antigüedad con los juegos de azar surge la noción de independencia. la teoría de las probabilidades se presenta en forma concisa, explicaban matemáticamente la probabilidad (casos favorables sobre casos posibles); y en ese marco se derivaban las reglas más importantes de la teoría de las probabilidades, el teorema de la adición, el de la multiplicación, los conceptos de probabilidad condicional y de independencia.

La independencia surge en los juegos de azar en los tiros "sin reposición" dados por de Moivre (1718 / 1756) y por Bayes (1763).

El concepto de independencia que estaba en juego se concebía sólo en el contexto de experiencias independientes y se constata en las definiciones de los autores clásicos como De Moivre(1756):

"Dos eventos son independientes cuando no tienen conexión uno con el otro y lo que ocurra en uno ni fomenta ni obstruye la ocurrencia del otro"

"Dos eventos son independientes cuando están conectados de manera que la probabilidad de que ocurra cualquiera de ellos es alterada por la ocurrencia del otro"

Expone el siguiente ejemplo:

Suponga que hay una pila de 13 cartas de un color (pinta)y otra de 13 cartas de otro color .

¿Cual es la probabilidad de que tomando una carta al azar de cada mazo tomemos los dos ases?

"tomar o no tomar de la primera no tiene ninguna influencia en tomar o no tomar en la segunda [...] por lo tanto siendo los dos eventos independientes, la probabilidad de ocurrencia de ambos será (1/13). (1/13)".

Laplace no define de manera explícita los eventos independientes da por conocido lo que son y enuncia sus propiedades (1788).

Lo que se debe marcar en esta etapa la extracción con reposición y sin reposición que representan respectivamente, el caso de independencia y dependencia de sucesiones de pruebas. En la actualidad se presentan dificultades derivadas de estas concepciones de los autores clásicos.

Feller (1983) comenta:
Generalmente, en la práctica se tiene la intuición correcta de que ciertos eventos deben ser estocásticamente independientes, pues, de no ser así, el modelo probabilístico sería absurdo. Sin embargo [...] existen situaciones en las cuales la independencia estocástica se descubre sólo por los cálculos. (pág.137)

Turán-Turán (1996) dice: la dificultad se debe a que en la primera definición se consideran dos o más experimentos aleatorios, mientras que la definición actual en textos elementales sólo considera eventos de un mismo espacio muestral, generalmente asociados a un solo experimento.

Con el análisis anterior podemos ver que existen obstáculos epistemológicos que persisten en la actualidad en la sala de clases.

Colección de concepciones espontáneas en alumnos

Las siguientes concepciones fueron extraídas de cuestionarios de probabilidad resueltas por alumnos de carreras humanísticas que cursan Estadística. Ejemplo:
Un estudio de la conducta después del tratamiento de un gran número de drogadictos, sugiere que la reincidencia dentro de los dos años siguientes al tratamiento podía depender de la clase socio-económica a la cual pertenece dada en la siguiente tabla de contingencia:

		Condición dentro del período de dos años después del tratamiento	
		Reincide®	No reincide(NR)
Clases Socio-Económicas	Superiores (S)	10	50
	Inferior (I)	30	10

a) ¿Cuál es la probabilidad de que éste reincida y sea de clase superior?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la clase socio-económica I o no reincida?
c) Son los sucesos R y S independientes? Justifique.
d) Si el entrevistado que se selecciona pertenece a la clase socio-económica superior, cuál es la probabilidad de que reincida?
e) Son los eventos R y S mutuamente excluyentes? Justifique con la definición.

Estas fueron las respuestas de algunos alumnos a las preguntas c y e:

1) c) No porque dos eventos son independientes porque cuando ocurre S no modifica para que ocurra R
   e) No son mutuamente excluyentes porque ocurre el evento S, no puede ocurrir el evento R. $S \cup R = \emptyset$
2) c) No porque la ocurrencia de uno depende de la ocurrencia del otro
   e) No porque tienen elementos en común
3) c) justifica con $P(S \cup R) \neq P(S) . P$®
   e) no son mutuamente excluyentes porque son distintos $S \neq R$
4) c) No porque influye sobre el total
   e) Varía el total
5) c) no son independientes porque no son iguales
   e)son porque no ocurren simultáneamente

6) c) No son ya que la intersección no es vacía
   e) R y S son mutuamente excluyentes porque no pueden ocurrir simultáneamente
      $S \cup R = \varnothing$

7) c) No son independientes porque no se cumple la regla P (S∪R) = P(S) . P®.
   e) Son mutuamente excluyentes porque no hay intersección entre S y R

Sólo 8 alumnos contestaron los items c) y e) bien aplicando la fórmula.
Observaciones:

- Se pudo observar que gran parte de los alumnos confundieron la regla de la multiplicación, con la regla de la adición queriendo demostrar la independencia.
- Generalizaron otros la regla de la multiplicación considerando que todos los sucesos
- son independientes P (A∪B) = P(A)P(B)

Cabe destacar que en ninguno de los casos usaron la condicional P(A/B) = P(A) para demostrar la independencia
En el caso de las justificaciones de eventos mutuamente excluyentes se detectó el error de P (A∪B) = ∅

Sugerencias
Mostrar al alumno la diferencia entre eventos independientes y experiencias independientes, y no asociar la independencia a sucesión de extracciones "con reposición".
Indicar que sólo los eventos son mutuamente excluyentes e independientes si uno de ellos es un suceso imposible (∅).

Conclusión
Se ha demostrado que las dificultades y confusiones de los conceptos de eventos mutuamente excluyentes e independientes persisten en los alumnos. Hemos visto que los conceptos surgen en los juegos de azar y siguen una relación más compleja del cálculo de probabilidades. Se debería contemplar que una posible causa de tales confusiones es la falta de referentes adecuados para tratar estos temas, proponiendo situaciones adecuadas para los objetivos de los cursos introductorios de probabilidad y estadística.

Bibliografía

Feller, W. (1950) An Introduction to probability Theory and its Aplications Vol.1) (1975*) Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones. Vol 1*. Limusa . México.

Guzmán I."*Fundamentos Teóricos de la Didáctica de las matemáticas*" (1999) Lecciones para un curso del Programa de Magister ECDIMAT (Magister en Enseñanza de las ciencias con mención en Didáctica de la Matemática.

Hernández R. Joffre M (2000) C*oncepciones de los estudiantes de educacion superior acerca de la nocion de limite* .Tesis de Magister en Matemática,Mención Enseñanza de la Matemática República bolivariana de Venezuela Ucla-Upel-Unexpo

Kilpatrick J., Gómez P., Rico, L. .(1995). *Educación Matemática* Grupo Ed. Iberoamericana.

Sánchez, E. (1996) Conceptos teóricos e ideas espontáneas sobre la noción independencia estocástica en profesores de bachillerato: Un estudio de casos. Tesis de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Sánchez, E(1996) *Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes* . In F. Hitt (ed) Investigaciones en Matemática Educativa. (pp.389-404) Grupo Ed. Iberoaméricana .Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav- IPN, México.

Sánchez, E (2000) Investigaciones Didácticas sobre el concepto de eventos independientes en probabilidad. Recherches en Didactique des Mathématics, Vol. 20 Nº3,pp. 305 - 330 .2000.

Sánchez, E, Teaching Independence and Conditional Probability.

Steinbring, H. (1986) L´Independance Stochastique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(3), 99-118.