LA COVARIACIÓN COMO ELEMENTO DE RESIGNIFICACIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARITMO

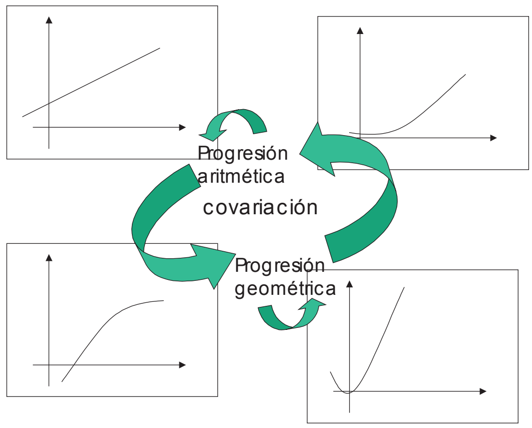
Marcela Ferrari Escolá
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
mferrari@mail.cinvestav.mx , mferrari@uaeh.reduaeh.mx

Resumen
En este artículo se discute la noción de covariación como argumento para el enriquecimiento del significado escolar de la función logaritmo. Esta afirmación haya sustento en la hipótesis epistemológica presentada en Ferrari (2003) respecto a que, el diseño de situaciones de aprendizaje que involucren la covariación de las progresiones aritmética y geométrica podría generar una apropiación más robusta de la noción logaritmo. Se presenta entonces una breve reflexión sobre un ejemplo que se está desarrollando en torno de la función logaritmo enmarcado en la aproximación socioepistemológica.

A partir de nuestra revisión de artículos y reportes de investigación, que involucran a la función logaritmo, nos atrevemos a decir que poco es lo que se ha investigado y reportado a la comunidad científica respecto a este tema. La mayoría de los escritos se acercan más a notas de clase o sugerencias de abordar el tema de maneras alternativas más que de aportar a la problemática de su apropiación.
Consideramos que esto responde a la idea, muy arraigada en el medio, que estudiar la problemática propia del aprendizaje del concepto de función basta para comprender lo que sucede con la apropiación de distintas funciones, por ejemplo, los logaritmos.
Basta mirar los índices y resúmenes de las distintas revistas científicas y de difusión de nuestra disciplina, para observar la profusión en el abordaje de la problemática de la apropiación de la noción de función. En efecto, la importancia conferida a la misma desde el paradigma euleriano, al convertirla en eje del estudio de las matemáticas, y las dificultades propias de una noción que admite varias concepciones y representaciones, se ve reflejada en el interés por su estudio de investigadores de la más diversa índole.
Nuestro interés por el estudio de los logaritmos partió, en un inicio, del hecho que, según se reportara en Ferrari (2003), la manipulación errónea de los mismos da cuenta de la no apropiación de la noción logaritmo, producto de no ser construida escolarmente. En ese trabajo se reportó la dislexia escolar producto del quiebre entre la presentación operativa de los logaritmos y la presentación funcional de los mismos.
Desde nuestra perspectiva cada función posee su propia naturaleza, misma que la distingue de las demás así como de las problemáticas inherentes a su apropiación. En este sentido, comprender la noción de $f(x)=x^2$ no es equivalente a la comprensión de $f(x)=\ln x$, apartándonos por tanto de la idea que “saber función” equivale a comprender todas y cada una de las funciones conocidas.
Consideramos que estudiar a profundidad la problemática propia de la noción de función resta importancia o pertinencia a hacerlo con funciones particulares. Al cuestionar esto desde nuestra investigación y adherirnos a la idea de que es vital reconocer la naturaleza de cada función para abordarla, nos vemos obligados a reflexionar y analizar las propuestas que existen en el medio sobre la covariación como una manera alternativa de abordar el tema de función,.
La pertinencia de esta idea radica en la hipótesis epistemológica surgida del análisis

preliminar que se realizara en Ferrari (2003), a saber: "el uso explícito de la covariación de progresiones geométricas y aritméticas podría constituirse en un importante elemento de resignificación de los logaritmos" y, si hemos de ser consistentes con la misma, consideramos necesario conocer las investigaciones ya reportadas en literatura propia de nuestra disciplina respecto fundamentalmente a covariación.

La consulta de varios diccionarios como primer acercamiento a la explicitación de la noción eje de esta investigación nos lleva a concluir que la palabra "covariación" no está definida en el léxico español, y que aquellos textos que la mencionan en realidad se refieren a la medida de "correlación" que en textos especializados de Estadística es denominada "covarianza".



Sin embargo, consideramos que la potencialidad de esta noción radica en que nos permite "remirar" las funciones escolares tales como polinomios, expo-nenciales, potencia y logarítmicas, y caracterizarlas como la "cova-riación de progresiones aritméticas y geométricas".

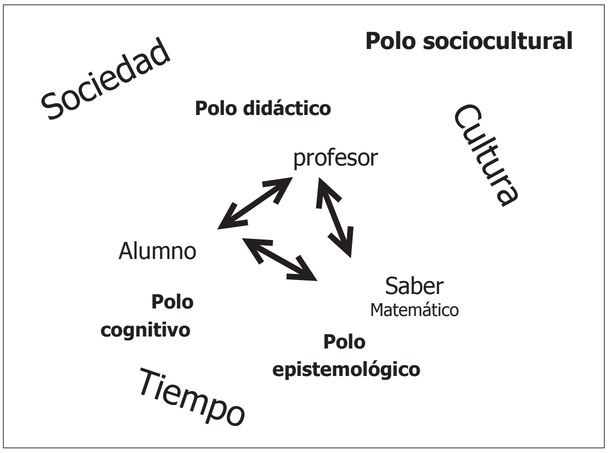
Varios investigadores se han interesado en el estudio de la covariación como una herramienta para la comprensión tanto de la noción de función (Confrey y Smith, 1995; Carlson, 1998; Carlson et al., 2002; Kaput 1992) como de algunos conceptos del Cálculo, tales como: la derivada (Zandieh, 2000), el teorema fundamental del Cálculo (Thompson, 1994) o el concepto de límite (Contrill et al, 1996; Carlson et al., 2001).

En (Carlson, 1998; Saldhana & Thompson, 1998; Carlson et al., 2001) se afirma que el razonamiento covariacional ha mostrado ser una importante habilidad para interpretar, describir y representar el comportamiento de funciones que modelan fenómenos dinámicos. En tanto que, Confrey y Smith (1994, 1995), explican la noción de covariación como aquella que vincula el movimiento entre valores sucesivos de una variable coordinándolo con un movimiento entre los correspondientes valores sucesivos de la otra variable. Consideran también que, en la aproximación covariacional, una función es comprendida como la yuxtaposición de dos secuencias, cada una de las cuales es generada independientemente a través de modelar datos. Desde nuestra perspectiva, al referirnos a la covariación estaremos considerando:

La relación entre las variaciones simultáneas de dos cantidades. Así, una recta puede caracterizarse como la covariación entre progresiones aritméticas, en tanto que el logaritmo, como la covariación entre una progresión geométrica y una aritmética, elementos que se desarrollarán más adelante.

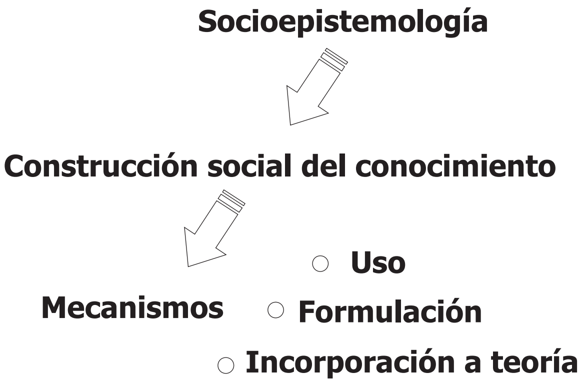
Marco Teórico

Este trabajo haya sustento en la aproximación socioepistemológica, que según Cantoral & Ferrari (2003) es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemológica del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los meca-nismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando en sobremanera el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana. La socio-epistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento social-mente situado, considerándolo a la luz de sus circunstancias y escenarios sociales.



Uno de los supuestos básicos de la socioepistemología es que el conocimiento se construye, siendo tal construcción de carácter social donde las prácticas sociales, como acción con intencionalidad, cobran un papel relevante.

En este sentido, en Ferrari (2003) se reporta un análisis socioepistemológico de los logaritmos. Se distinguen tres etapas en la consolidación de esta noción dentro del discurso matemático al tomar como eje central las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas, argumento utilizado por Napier para su primera definición. Como primer momento, consideramos a *los logaritmos como transformación numérica*. Se desarrollan fundamentalmente en el contexto numérico comenzando con ideas intuitivas de transformar para facilitar operaciones intentando regresar a la aritmética, es decir, utilizar sólo sumas y restas. Así, de la influencia de las primitivas formulaciones de las progresiones y de las relaciones entre ambas surge la definición de los logaritmos.



Como segundo momento se define, *los logaritmos como modelizadores.* En esta etapa se determinan sus características geométricas; logran pertenecer al discurso matemático de principios del siglo XVII; se les dota de una gráfica al adecuarlos al nuevo registro "algebraico-geométrico"; logran completar un modelo matemático de la cuadratura de curvas representativas de funciones potencia; permiten describir fenómenos físicos y se descubren nuevas formas para calcularlos en series de potencias todo lo que permite que accedan al discurso matemático del siglo XVIII y adquieran el status de función.

El tercer momento corresponde a la etapa de *los logaritmos como objetos teóricos*, conceptos trabajados en la enseñanza actual y que los encuentra escindidos de las argumentaciones necesarias, las cuales pueden contribuir a dotarlos de un mayor sentido, apartándolos de su tratamiento actual que los reduce a una aplicación algorítmica de sus propiedades apareciendo en el aula sin ningún antecedente analítico que pudieran haber adquirido los estudiantes hasta ese momento.

Discusión

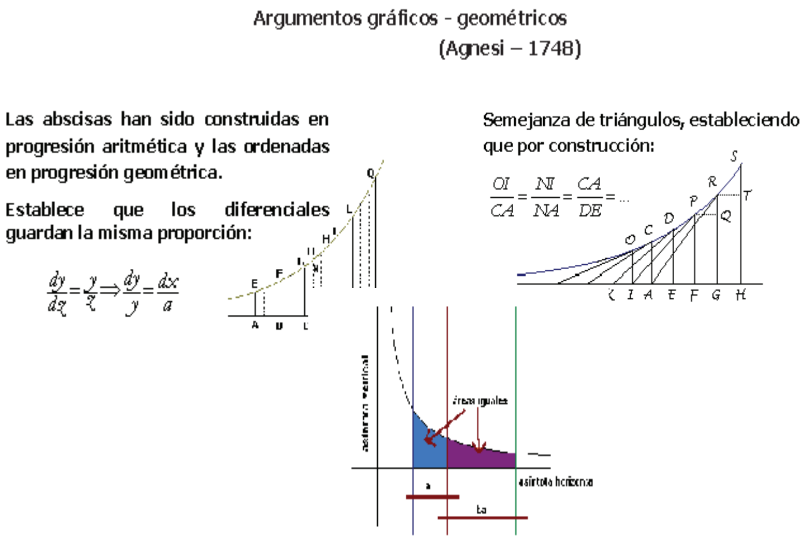
El trabajo en el que nos hayamos abocados en este momento es el de desarrollar los argumentos que tan fértiles resultaron para el segundo momento, no con el fin de reproducirlos tal cual se discutieron en el siglo XVIII sino para comprender a profundidad sus implicaciones, su potencialidad, la manera de resignificar a partir de los mismo a los logaritmos.

Como mencionáramos en el parágrafo anterior, la covariación entre una progresión geométrica (aquella sucesión de números tal que el cociente de dos términos consecutivos es constante) y una progresión aritmética (aquella sucesión de números tal que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante) fue fundamental para el desarrollo y consolidación de los logaritmos como una poderosa herramienta matemática que perdura hasta nuestros días.

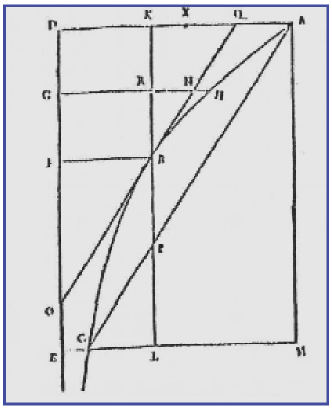
Xn+1 / Xn	**X**	**Y**	**Yn+1 - Yn**
2	**1**	**0**	
2	**2**	**1**	1
2	**4**	**2**	1
2	**8**	**3**	1
2	**16**	**4**	1
2	**32**	**5**	1
2	**64**	**6**	1
2	**128**	**7**	1
2	**256**	**8**	1

Si bien, para Napier (1614- 1619) para definir logaritmos sólo basta asociar una progresión geométrica con una aritmética, no debemos perder de vista que para mantener el álgebra de los logaritmos que conocemos y manejamos hoy en día, se debe convenir que $\log_a 1 = 0$ idea propuesta a Napier por Brigg en 1616 con el fin de calcular logaritmos a los números y extender la idea de "facilitar las cuentas" creada sólo para el ámbito de la trigonometría. En este sentido, decimos que la práctica social que se puede asociar a los logaritmos, como aquella que le dio vida, es la de "multiplicar sumando".

Este argumento fue el nexo entre las distintas representaciones y usos que se les dieron a los logaritmos, tanto dentro como fuera de la matemática. Las ideas que nos resultan interesantes para discutir la construcción escolar de la función logaritmo tienen como argumentos de referencia los siguientes:



Completar patrón de cuadraturas



Gregory St. Vincent (1647) establece: "*si las paralelas de una asíntota son trazadas entre la hipérbola y la otra asíntota, de tal forma que las áreas sucesivas de los cuadriláteros mixtilíneos así formados sean iguales, entonces las longitudes de tales paralelas forman una progresión geométrica*".

De los ejemplos de modelación de los logaritmos antes citados se percibe que el argumento que los engloba y por tanto refleja la naturaleza de los logaritmos, es justamente la covariación entre una progresión geométrica y una aritmética, misma que se está utilizando en los diseños de secuencias de aprendizaje.

La investigación de la que se deriva este artículo sigue en curso, esperándose contar con resultados que evidencien la robustez argumentativa de la covariación para construir la función logaritmo para la escuela.

Huygens (1690)

... para encontrar los espacios recorridos en ciertos tiempos, cuando caen los cuerpos o suben perpendicularmente, y para conocer las velocidades al cabo de estos tiempos, había una línea curva, que he examinado largo tiempo antes, que es de gran uso en esta investigación. Se le puede llamar "*Logaritmique*" o "*Logistique*", no veo que se haya dado algún nombre aunque otros la hayan considerado antes. Estando ABC, que tiene una línea recta DE como asíntota, en la cual si se toman partes iguales cualesquiera, como DG, GF, etc. y por los puntos D, G, F; etc. se trazan perpendiculares a la curva, se ve que las líneas DA, GH, FB serán proporcionalmente continuas.

Bibliografía

Cantoral, R. & Ferrari, M. (noviembre de 2003, en prensa) Un estudio socioepistemológico de la Predicción. *La matemática e la sua didattica 4.*

Carlson, M. (1998). A croos-sectional investigation of the development of the function concept. En E. Dubinsky, A. H. Schonfeld & J. J. Kaput (Eds.) *Research in collegiate mathematics education, III, Issues in mathematics Education, 7,* 115-162.

Carlson, M. Larsen, S. & Jacobs, S. (2001). An investigation of covariational reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation. En: R. Speiser, C. Maher & Ch. Walter: *Proceeding of the Twenty-third Annual Meeting. North American Chapter of the international group for the Psychology of mathematics education*. Vol 1. PME-NA XXIII. October 18-21, 2001. Snowbird, Utah. USA: Eric.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Educational 23*(5), 352, 378.

Confrey, J. & Smith, E. (1995) Splitting, cavariation, and their role in the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 135-164.

Confrey, J. (1998). Building mathematical structure within a conjecture driven teaching experiment on splitting. En: S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, W. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood & L. stiff: *Proceeding of the Twentieth Annual Meeting. North American Chapter of the international group for the Psychology of mathematics education*. Vol 1. PME-NA XX. October 31-November 3, 1998. North Carolina State university. Raleigh, North Carolina USA. USA: Eric.

Contrill, J., Dubinsky, E. Nichols, D. Schwingendorf, K., Thomas, K. and Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginnig with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavoir 15,* 167-192.

Ferrari. M. (2003). *Una vision socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. México: Grupo Editorial iberoamérica.

Kaput, J. J. (1992). Patterns in students' formalization of quantitative patterns. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.) *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes, Vol 25* (pp. 290-318) Washington, DC: Mathematical Association of America.

Rasmussen, C. (2000). New directions in differntial ecuations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior 20,* 55-87.

Saldhana, L. & Thompson, P. (1998). Re-Thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En: S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, W. Coulombe, J. Kolb, K.

Norwood & L. stiff: *Proceeding of the Twentieth Annual Meeting. North American Chapter of the international group for the Psychology of mathematics education*. Vol 1. PME-NA XX. October 31-November 3, 1998. North Carolina State university. Raleigh, North Carolina USA. USA: Eric.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational studies in mathematics 26.* 229-274.

Zadieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En E: Dubisnky, A . Shoenfeld & J. Kaput (Eds.): Research in collegiate mathematics education IV (vol 8, pp. 103-127). Providence, RI: American Mathematical Society.