

REPRESENTACIÓN EXTERNA DE FIGURAS PLANAS Y RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO

External representation of plane figures and geometric thinking

Joxemari Sarasua

Dpto. de Didáctica de la Matemática y de las CC.EE.
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

Resumen

En este texto se analiza, en primer lugar, la posible conexión entre las destrezas de representación externa de figuras planas y el desarrollo de los niveles de razonamiento. Para ello se realizó un amplio estudio entre estudiantes de enseñanza obligatoria, bachillerato y universidad, cuyos resultados sugieren una respuesta positiva a la primera cuestión. Posteriormente, se formula una propuesta de nuevos descriptores para los niveles de razonamiento, en relación a la representación externa de figuras planas, que pueden contribuir a una mejor clarificación de aquellos y a una mayor integración curricular del modelo de Van Hiele

Palabras clave: *representación externa, descriptores de los niveles, figuras planas, organización curricular*

Abstract

In this article, firstly, a possible connection between external representation skills for plane figures and the development of thinking levels is studied. For this purpose, extensive research was carried out with compulsory education, secondary school and university students. Results suggest that students' representation skills improve progressively as they progress on their thinking level. Subsequently, a proposal for new level descriptors is formulated in relation to the external representation of plane figures. This proposal is expected to contribute to a better clarification and to a higher curricular integration of the Van Hiele model.

Keywords: *external representation, level descriptors, plane figures, curriculum arrangement*

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

El modelo de Van Hiele (Michael T. Battista, 2007; Van Hiele, 1986) constituye probablemente el marco de referencia principal en el campo de la investigación en didáctica de la geometría. Gracias a él se ha conseguido modelizar el proceso mediante el cual los estudiantes adquieren los contenidos geométricos, caracterizando y jerarquizando diferentes modos de razonamiento. Esto ha propiciado nuevas propuestas de enseñanza de la geometría, con importante alcance también a nivel curricular, según las cuales la presentación de los contenidos conceptuales y la forma en que los estudiantes deben resolver los problemas progresarían a lo largo de los cursos según las características de los niveles (Gutiérrez, 2009; NCTM, 2003).

Se han señalado también ciertos vacíos relativos al modelo de Van Hiele, que sin embargo podrían ser debidos únicamente a la falta de interés por parte de los investigadores. Entre ellos caben señalar las escasas propuestas relativas al pensamiento geométrico en la etapa infantil (Clements, Swaminathan, Hannibal, & Sarama, 1999; Hershkowitz, 1990), la limitación a la geometría sintética (Dindyal, 2010; Weng San, 2010) o la necesidad de complementación desde otras perspectivas teóricas (Huerta, 1999; Pegg & Davey, 1998; Pegg, Gutiérrez, & Huerta, 1998). También se ha señalado (Sarasua, 2011) el inconveniente que supone no poder integrar en el modelo las competencias y los objetivos geométricos de aprendizaje, aspecto este que caracterizaría a un modelo integral de enseñanza y aprendizaje. En Sarasua (op. cit., 2011) se propone y aplica una metodología para, desde una perspectiva curricular, evaluar la potencialidad del modelo de VH para dar respuesta a los objetivos geométricos de aprendizaje. Tras categorizar los objetivos de aprendizaje correspondientes a las figuras planas, el autor utiliza dicha categorización a modo de evaluador externo para poner en relación los descriptores de los niveles con los objetivos señalados. De este análisis concluye el autor la "fortaleza y la potencialidad del modelo [...] para abordar la mayor parte de los objetivos geométricos" (Sarasua, op. cit. p. 314). No obstante, se evidencian ciertas áreas de baja definición, p. ej. en relación a cómo aparecen reflejadas las destrezas de representación externa entre los descriptores de los niveles. En concreto, se señala que:

"i) No se hace referencia [entre los descriptores de los niveles] a habilidades relacionadas con los diversos mecanismos para reproducir figuras planas: colorear, calcar, dibujar a mano alzada, construir con material manipulativo (tangram, palillos, geobandas, etc.) o mediante programas de geometría dinámica. Se echa en falta una referencia específica a las destrezas de representación externa mediante instrumentos de dibujo, particularmente a las construcciones con regla y compás.

ii) No se distingue entre a) dibujar copiando un modelo y b) dibujar en ausencia de modelo, p. ej. a partir de una descripción (o definición) verbal. Cabe suponer que ambas destrezas, de naturaleza distinta, han de corresponder a diferentes niveles de VH.

iii) No se hace referencia a construir o dibujar a partir de elementos (constitutivos o secundarios) o a partir de propiedades (paralelismo, congruencia de ángulos, etc.). Esta distinción parece relevante, ya que de acuerdo al modelo de VH este tipo de representaciones implicarían un razonamiento analítico al menos de segundo nivel." (Sarasua, op. cit. p. 137)

El objetivo de este trabajo es estudiar la posible relación entre la adquisición de destrezas de representación externa y los niveles de VH para las figuras planas. En la literatura analizada solo se han encontrado referencias generales a esta posible relación (Corberán et al., 1994; Hoffer, 1981), insuficientes para asegurarla y, en su caso, caracterizarla. Ésta es una cuestión previa y, en principio, no trivial. En efecto, y aunque referido a un ámbito diferente, se ha sugerido que no existe relación entre los niveles de razonamiento y ciertas habilidades de visualización en geometría tridimensional (Saads & Davis, 1997a, 1997b). ¿Podría sugerirse lo mismo en relación a las destrezas de representación externa? Si, por el contrario, éstas se desarrollaran en paralelo a los niveles de razonamiento, sería de interés analizar el grado y las características de la imbricación entre ambas adquisiciones para posteriormente formular, si fuera posible, nuevos descriptores para los niveles. En este caso, los nuevos descriptores podrían ayudar a fijar mejor los límites de cada nivel, facilitar su comprensión y también servir como punto de partida para explorar posibles

propuestas de mejora en otros contextos (geometría tridimensional, isometrías, etc.). Así mismo, si fuera posible secuenciar las destrezas de representación externa en función de los niveles, se podrían extraer consecuencias relevantes para el diseño curricular.

REFERENTES TEÓRICOS

Asumimos la distinción general aceptada, aun con algunos matices, por diversos autores (Duval, 1998; Hiebert & Carpenter, 1992; Kaput, 1987; Rico, 2009) entre representaciones externas (al individuo) y representaciones internas (o mentales). Entendemos por representación externa a una determinada configuración que reproduce, o *significa*, algo más. Dicha configuración puede, por ejemplo, “actuar en lugar de, ser interpretada como, estar ligada a, corresponder a, denotar, describir, encarnar, codificar, etiquetar, vincular a, significar, producir, referirse a, guardar similitud con, servir como metáfora de, indicar, querer decir, ser un sustituto de, sugerir o simbolizar aquello que representa” (Goldin, 2002, p. 208). Las segundas hacen referencia a la imagen o idea del objeto tal y como se presenta u opera en la mente del individuo (Hershkowitz, 1990; Vinner, 1983).

A principios del siglo pasado Poincaré (1902) señalaba las diferencias entre el *espacio geométrico*, que es continuo, infinito, tridimensional y homogéneo, y el *espacio representativo*, es decir, el marco de nuestras sensaciones y representaciones y que posee una triple dimensión: visual, táctil y motriz. Añadía que las “representaciones son solo la reproducción de nuestras sensaciones; no pueden, pues, colocarse sino en el mismo marco que ellas, es decir, en el espacio representativo. [...] El espacio representativo no es más que una imagen del espacio geométrico, imagen deformada por una especie de perspectiva; y no podemos representarnos los objetos sin someterlos a las leyes de dicha perspectiva” (Poincaré, op. cit. p. 109).

Esta distinción es básica y la asumen diversos autores formulada en estos términos o en similares. Así Fischbein (1993) se refiere a la dualidad *figural/conceptual*, según la cual los objetos geométricos constan de una vertiente figural, ligada a la propia representación y a las operaciones que implica, y otra conceptual, que se deriva de la idea abstracta y formalizada propia de cualquier concepto. Laborde (2005), por su parte, distingue entre el *dominio teórico* de los objetos y sus relaciones y el *dominio gráfico-espacial* de las entidades gráficas sobre las que es posible ejecutar acciones físicas. A esta dualidad también se refiere Mesquita (1998) al hablar del “doble estatus de las representaciones externas”: cuando se representa cierto objeto o relación geométrica, éste presenta dos dimensiones: a) como perteneciente a un conjunto finito de formas externas en su temporalidad espacial; b) como forma geométrica “ideal” independiente de cualquier corsé referido a su representación externa.

Según Rico (2009), las representaciones externas (signos o gráficos) son herramientas que hacen presente objetos matemáticos ausentes, confirmando de esta manera su ausencia, y que sirven a los individuos para interactuar con el conocimiento matemático, es decir, para registrar y comunicar su conocimiento en matemáticas: trabajando con las representaciones se asignan significados y se comprenden las estructuras matemáticas, de ahí su interés didáctico. El mismo autor señala la necesidad del empleo y juego combinado de diversos sistemas de representación externa, incluidas conversiones recíprocas, para captar en toda su complejidad los conceptos y estructuras matemáticas. Según él, cada uno de los modos de representación y las reglas que lo acompañan caracterizan de manera diferente los objetos representados, subrayando algunos aspectos o propiedades y encubriendo otros. Este fenómeno, que Rico denomina “dualidad univocidad-pluralidad”, da pie a una serie de interrogantes que son de particular interés en educación matemática: “¿cómo seleccionar los sistemas de representación adecuados para cada concepto y en cada edad? ¿Cómo abordar determinadas dificultades de comprensión mediante el juego de las representaciones? ¿Cómo profundizar sobre los conceptos? ¿Qué oculta y qué muestra cada sistema de representación?” (Rico, 2009, p. 11).

La adquisición de destrezas de representación (en adelante, si no se especifica lo contrario, nos estaremos refiriendo a las de tipo externo) es un elemento central en el aprendizaje de las

matemáticas (NCTM, 2003, 2006; RS, 2001). El sentido de estas destrezas no se traduce solamente en exteriorizar gráficamente imágenes mentales o en reproducir con exactitud objetos geométricos; tampoco nos referimos a destrezas de construcción y de dibujo algorítmicas sin intervención del razonamiento matemático (no nos interesa ese tipo de destrezas mecánicas). Por el contrario, entendemos la representación como un medio privilegiado para el desarrollo del razonamiento geométrico en el sentido más amplio.

La representación de figuras va más allá del hecho constructivo en sí mismo o de la exteriorización de conceptos e imágenes conceptuales internas. Hoffer (1981) destaca la necesidad de desarrollar las habilidades de dibujo en cursos de geometría como actividad previa de preparación para que los estudiantes aprendan posteriormente relaciones geométricas: “el trabajo previo de construir con regla y compás ayuda a los estudiantes a entender las propiedades de las figuras. El uso de la cuadrícula ayuda a los estudiantes a realizar dibujos cuidados y satisfactorios de figuras en dos y tres dimensiones” (Hoffer, op. cit. p. 12). Añade además el autor que hay ocasiones en que tenemos mayor necesidad de realizar un dibujo de una situación geométrica que de demostrar un teorema.

En cuanto comunicación gráfica, el dibujo geométrico ocupa un lugar central en la resolución de problemas. Según señalan Bravo, del Sol y Arteaga (2001), su aportación no se reduce únicamente a ilustrar o visualizar razonamientos durante el proceso de resolución, sino que “en muchas ocasiones resulta que un dibujo hecho acertadamente es lo que puede dar la idea sobre el empleo de un concepto o proposición matemática, o sobre la necesidad de trazar líneas auxiliares —regla heurística general de singular importancia en la solución de problemas geométricos— o de realizar una construcción adicional.” (Bravo et al., op. cit. p. 12).

Para Alsina, Burgués y Fortuny (1988), el dibujo en geometría reviste un doble interés: “como lenguaje para meditar, ejemplificar o representar conceptos y propiedades y como finalidad de representación fiel y rigurosa” (Alsina et al., op. cit. p. 105). Consideran que “llegar a dominar materialmente los trazados con instrumentos de dibujo es un objetivo ineludible” en los niveles obligatorios de la enseñanza que se debe alcanzar “en forma progresiva pero persistente”. Precisan también que el objetivo último de los trazados con instrumentos de dibujo “no es tanto llegar a la representación perfecta como poner en juego el rigor y el orden con que proceder a realizar los trazados. No interesa tanto el «fin» como los «medios»” (Alsina et al., op. cit. pp. 105-106).

Battista (2008) señala los diversos usos que pueden tener las representaciones externas y los dibujos en particular: p. ej., ante una proposición, un estudiante de manera natural puede dibujar ejemplos, o contraejemplos, para entender el significado de la proposición y buscar “indicios” sobre su posible validez; puede dibujar un único ejemplo genérico que condense de alguna manera todos los elementos pertinentes de una determinada situación y de esta manera reducir su esfuerzo de reflexión y análisis sobre ese ejemplo particular.

Existe un interés extendido sobre las conexiones entre las representaciones mentales y las representaciones externas (Font, Godino, & D'Amore, 2007; Goldin, 1998, 2002; Hiebert & Carpenter, 1992; Janvier, 1987; Kaput, 1998; Vergnaud, 1998): “Para pensar y comunicar ideas matemáticas tenemos que representarlas de alguna manera. La comunicación requiere que la representación sea externa, adoptando la forma del lenguaje hablado, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos [...]. Para pensar ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente de tal forma que la mente pueda operar con ellas. Dado que las representaciones mentales no son observables, las discusiones sobre cómo las ideas se representan en el cerebro están basadas en niveles altos de inferencia” (Hiebert & Carpenter, 1992, p. 66).

Desde una perspectiva cognitiva, Duval (1998) se refiere a las “representaciones semióticas” como aquellas producciones constituidas por signos que pertenecen a un determinado sistema de representación, con sus leyes y sus limitaciones de significado y de funcionamiento. En la actividad matemática se movilizarían diversos registros de representación semiótica (figuras, gráficas, escritura simbólica, lenguaje natural, etc.) que adquieren un papel fundamental por ser la distinción

entre objeto y representación un punto estratégico para la comprensión matemática. El autor afirma que las representaciones semióticas no son simplemente un medio de exteriorización de las representaciones mentales para hacerlas visibles o accesibles a los demás, sino que son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. Entre las funciones cognitivas sobre las que operan las representaciones semióticas distingue, entre otras, la de “*objetivización* (expresión privada, con vistas a probar la validez ante uno mismo)” y la de “*comunicación* (expresión externa, para dar a conocer a los demás estructuras y operaciones mentales)” (Duval, 1998). Existirá, además, una relación bidireccional de reforzamiento mutuo entre el desarrollo de las representaciones externas (“semióticas”) y las imágenes mentales de los objetos y conceptos.

Freudenthal (1983), sin embargo, muestra cierta cautela a la hora de establecer un vínculo operativo entre la destrezas de representación externa e interna de objetos geométricos. Afirma que dibujos imperfectos no pueden considerarse sin más como indicativos de objetos mentales defectuosos: “al contrario, esta manera de reproducir puede indicar una mejor visión de los objetos mentales que la reproducción por medio de la perspectiva adquirida por imitación” (Freudenthal, op. cit. p. 244). Esta aparente paradoja la explica refiriéndose a reproducciones de tipo simbólico o icónico: aun no guardando similitud “geométrica” con el original, puestas en contexto lo pueden representar sin ambigüedad y con fuerte poder de convicción. En efecto, una buena caricatura, p. ej., requiere una aguda capacidad de observación y puede sugerir un mayor parecido que un retrato figurativo mediocre.

También desde la psicología cognitiva, son interesantes las aportaciones de la *teoría de la tipicidad* (Mesquita, 1998), según la cual determinados elementos “típicos” de una categoría parecen ser percibidos por los individuos como “mejores” ejemplos que otros para representar la categoría a la que pertenecen (p. ej., una silla de cuatro patas es más “típica” que una silla de tres patas). En la misma línea debe analizarse la influencia que los juicios prototípicos (Hershkowitz, 1990), los distractores de orientación, los de configuración y, en general, las imágenes conceptuales y las concepciones erróneas de los objetos geométricos (Vinner & Hershkowitz, 1983) tienen en los procesos de construcción de conceptos y de sus representaciones.

Representación externa: material, soporte y herramientas

Alsina, Burgés y Fortuny (1988, p. 58) enmarcan la utilización instrumental de material de construcción en un diseño pedagógico que centra el aprendizaje en el paso de lo concreto a lo abstracto. Así, secuencian tres etapas de construcción: a) *etapa manipulativa*, de construcción material; b) *etapa representativa*, de construcción gráfica; y c) *etapa deductiva*, de construcción formal.

Así, hablamos de destrezas *manipulativas* en sentido clásico cuando operamos con objetos que son a la vez elementos físicos y modelos geométricos: construimos figuras recortando o plegando material; reproducimos figuras calcando un modelo; componemos o descomponemos figuras mediante palillos, tiras o material similar; creamos figuras con elementos elásticos sobre un geoplano; componemos con el tangram nuevas figuras a partir de otras, o bien las descomponemos, etc.

Según Clements y Battista (1992), la manipulación de objetos permite a los estudiantes poner a prueba sus ideas, examinarlas, reflexionar sobre ellas y modificarlas. Además la experiencia física parece alimentar el interés de los estudiantes, les ayudar a formular definiciones y conjeturas y contribuye a que adquieran la comprensión sobre nuevas relaciones geométricas. No obstante, señalan los autores, el uso de recursos manipulativos no es suficiente y no garantiza por sí mismo un aprendizaje significativo (la manipulación puede ser mecánica o memorística): “la naturaleza física [de los objetos manipulativos] no incorpora el significado de la idea matemática. Pueden usarse de manera mecánica [...]. Los estudiantes pueden requerir materiales concretos para construir inicialmente el significado, pero deben *reflexionar sobre sus acciones* mientras los manipulan” (Clements, 1999, p. 47).

González y Larios (2001) señalan la importancia del plegado de papel como instrumento para desarrollar el razonamiento geométrico y como herramienta de descubrimiento en geometría. Esto es así especialmente en Primaria y en los niveles iniciales de Enseñanza Media, cuando el estudiante necesita percibir las propiedades geométricas de manera más plástica e intuitiva que rigurosa. En este sentido los autores destacan el carácter dinámico y accesible (de rápido aprendizaje) de la manipulación y plegado de papel frente al uso de la regla y el compás, cuyos trazos carecen de dinamismo.

Las destrezas *gráficas* representan un salto en cuanto a pensamiento geométrico, ya que el modelo físico es sustituido por una representación, generalmente visual y bidimensional, de carácter abstracto y “no-concreto”. Entre esas representaciones es necesario diferenciar, al menos, entre las construcciones “clásicas” con regla y compás y las construcciones mediante otros instrumentos de dibujo, o incluso de medición. Diferenciar entre los tipos de instrumentos de dibujo está justificado (a) por las diferentes formas de razonar geoméricamente que corresponde a cada uno de los tipos, (b) por la diferente naturaleza de la representación que se quiera obtener (precisa o aproximada), (c) por los diferentes valores propedéuticos (p. ej., se pueden derivar propiedades algebraicas importantes del estudio de las construcciones con regla y compás) y (d) por el tratamiento curricular diferenciado que reciben.

Aprender a utilizar la regla y el compás resulta de particular importancia para aclarar la distinción entre la exactitud teórica y la experiencia práctica: “El trabajo correcto con regla y compás da por resultado figuras teóricamente exactas, mientras que el uso del transportador, p. ej., introduce inevitablemente el error en la construcción buscada. El hecho de que la construcción práctica con regla y compás no sea perfecta (desde que la regla y el compás materiales dan lugar a errores en la construcción), no le resta valor. En el mundo ideal de los objetos geométricos, la construcción con un compás y regla ideal es exacta. En tanto que toda construcción dependiente de la medida será intrínsecamente imprecisa.” (Bressan, Bogisic, & Crego, 2000, p. 58).

Se ha señalado la importancia de que los estudiantes de entre 11 y 14 años (*Key Stage 3*, en el sistema educativo del Reino Unido) sepan “distinguir entre la imprecisión de construcciones por medio de la regla y transportador y la ‘exactitud teórica’ que proporcionan las construcciones estándar solo con regla y compás” (RS, 2001, p. 49). En estos casos el razonamiento geométrico que debe acompañar a las construcciones puede mostrar a los alumnos, p. ej., la razón por la que funciona el método de construcción de la mediatriz de un segmento o el de la bisectriz de un ángulo.

METODOLOGÍA

La investigación consta de dos partes: por un lado, se identifica el nivel y grado de adquisición predominante de VH de cada uno de los individuos de una muestra representativa compuesta por 523 estudiantes desde Primaria hasta la Universidad; por otro lado, se estudian las destrezas de representación que esos mismos individuos manifiestan. Los datos de cada individuo se cruzarán con el fin de encontrar posibles patrones comunes, o pautas que se repiten, entre las destrezas de representación y el nivel de VH en relación a las figuras planas. Estas dos partes se concretan a continuación.

Identificación del vector de los grados de adquisición de los niveles de VH

Se parte de los datos obtenidos en un estudio previo sobre la prevalencia de los niveles de razonamiento entre estudiantes de las diversas etapas educativas (Sarasua, Ruiz de Gauna, & Arrieta, 2013). A cada individuo de esta muestra se le asigna un vector con los grados de adquisición de cada nivel según el paradigma propuesto por Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991). Para hacer operativo el cruce de datos, se fija posteriormente un nivel y un grado de adquisición predominante para cada individuo (Sarasua et al., 2013).

Evaluación de las destrezas de representación

A continuación, se trataría de analizar el tipo de destrezas de representación que corresponderían a cada nivel, si es que hubiera tal correspondencia. Para ello, se llevó a cabo un trabajo de campo sobre la misma muestra de estudiantes de los que se había determinado el nivel y grado predominantes de VH.

Los autores no tienen conocimiento de la existencia de ningún cuestionario diseñado para evaluar las destrezas de representación que se adapte a las características de esta investigación, por lo que se optó por diseñar un cuestionario específico. Para ello, se elaboró una batería de 61 ítems, o tareas de representación lo más significativas posibles, organizadas de acuerdo a los siguientes aspectos: (i) objetivos didácticos; (ii) materiales, soportes e instrumentos de representación y (iii) modo de construcción. Cada ítem corresponde a una o varias destrezas de representación.

A pesar de las restricciones del cuestionario escrito, se pudo incorporar un buen número de ítems manipulativos (plegar, recortar y calcar). Las construcciones sobre geoplano se sustituyeron por trazados a mano alzada sobre cuadrícula. Se incluyó también un conjunto amplio de ítems para dibujar a mano alzada y mediante diversos instrumentos de dibujo o de medición. Se acompañó cada cuestionario de un estuche con el siguiente material: lapicero, goma de borrar, tijeras pequeñas, pegamento de barra, regla, compás y transportador.

A partir de la batería general de ítems, se elaboraron siete cuestionarios distintos adaptados a los diferentes cursos o etapas educativas: A1, A2, B1, B2, C1, C2 y D. Dicha adaptación se realizó asignando a la resolución de cada ítem un nivel de VH teórico (o varios niveles en los casos habituales de asignación incierta o de ítems que podían ser respondidos de acuerdo a diferentes niveles). Esta asignación teórica se realizó extrapolando de los descriptores generales de los niveles información que pudiera relacionarse con destrezas de representación (Corberán et al., 1994).

Excepto para el cuestionario D, a cada grupo-clase de estudiantes se le administraron simultáneamente dos variantes X1 y X2, con X=A, B o C: i.e., a la mitad de la clase se le administró aleatoriamente el modelo X1, y a la otra mitad el X2. Ambos modelos, X1 y X2, constan de ítems diferentes pero complementarios y equivalentes en cuanto al nivel de VH esperado. La razón de administrar cuestionarios distintos fue poder evaluar un número mayor de ítems (y, por tanto, de destrezas); en contrapartida, hubo que tomar una muestra más amplia de individuos. En la Tabla 1 se muestra la distribución de ítems según los cuestionarios.

Tabla 1. Distribución de los ítems según los cuestionarios

Cuestionario	Etapas o curso	Nivel de VH esperado	% de ítems de nivel esperado 1	% de ítems de nivel esperado 2	% de ítems de nivel esperado 3
A1	Primaria	1	50%	30%	20%
A2					
B1	ESO	1-2	35%	45%	20%
B2					
C1	Bachillerato y 2º de Magisterio	2-3	20%	40%	40%
C2					
D	3º de Magisterio	2-3	0%	70%	30%

Antes de la administración definitiva, se realizó una prueba piloto en varios centros. Tras esta prueba se introdujeron algunas mejoras, particularmente en los siguientes aspectos:

- Diferenciación entre métodos de construcción algorítmicos memorizados de aquellos donde intervenía el razonamiento matemático. Se añadió esta pregunta en numerosos ítems:

¿Habías estudiado este procedimiento con anterioridad?

Sí

No

Si la respuesta ha sido afirmativa, ¿te acordabas de él?

Sí

No

- Especificación de los instrumentos de dibujo utilizados (en ciertos casos habría sido más complicado averiguarlo del análisis directo del trazado).
- Se preguntó a los individuos sobre sus creencias acerca de la necesidad de utilizar ciertos instrumentos de dibujo. P. ej.:

Marca con una X la opción que creas correcta para este ejercicio:

NO es necesario usar el compás, con la regla es suficiente.

ES necesario usar el compás, con la regla NO es suficiente.

Administración de los cuestionarios

Dado el amplio número de ítems a evaluar, se consideraron los cursos alternos a partir 6º de Primaria: 6º de Primaria, 2º de ESO, 4º de ESO, 2º de Bachillerato y Universidad. No se consideraron los dos primeros ciclos de Primaria, entre otras razones, por la ausencia de instrumentos fiables para la identificación de los niveles de VH a esas edades.

Se buscó que los centros donde se administraran los cuestionarios fueran mixtos y estuvieran situados en entornos de características socioeconómicas heterogéneas. También se quiso que la muestra incluyera tanto colegios públicos como privados. A cada grupo se le administró el cuestionario en el idioma en que cursaban la asignatura de Matemáticas: vasco o español.

El trabajo de campo se desarrolló en el País Vasco: en tres centros públicos de Bizakia (uno de Primaria y dos de Primaria, ESO y Bachillerato), en tres privados de Bizkaia (los tres de Primaria, ESO y Bachillerato) y en la Escuela de Magistero de Vitoria-Gasteiz. El número total de individuos de la muestra fue 523. Como se ha dicho anteriormente, el estudio consistió en la administración de dos cuestionarios (el test de identificación de VH y el específico de representación de figuras) en dos sesiones de 50' cada una con un intervalo máximo de una semana entre ambas. Los investigadores estuvieron presentes en todas las sesiones para aclarar dudas.

Evaluación de los cuestionarios de representación: correspondencia con los niveles de VH

Se pretende estudiar si existe *correspondencia* entre el progreso de los niveles de razonamiento y de las destrezas de representación. Se entenderá por *correspondencia* que destrezas de representación se desarrollen de manera creciente, progresiva, continua (sin saltos inversos) y paralelamente a la adquisición de los niveles de razonamiento (y, aún mejor, dentro de cada nivel en paralelo al progreso del grado de adquisición). Si esto fuera así, se fijarán los límites de esa relación y se intentará determinar qué tipo de destrezas de representación caracterizan cada nivel de razonamiento.

Tras codificar los datos con SPSS (v. 15), se analizó qué ítems eran capaces de resolver (y cómo los resolvían) los estudiantes pertenecientes a un mismo nivel y grado de adquisición predominante. Se determinó la siguiente tabla para cada ítem (Tabla 2):

Tabla 2. Correspondencias entre las respuestas para cada ítem y los niveles y grados de adquisición

			Respuestas al ítem en %		
			Correctas	Incorrectas	En blanco
Nivel 1	Grado	bajo	a_1	a'_1	a''_1
		medio	a_2	a'_2	a''_2
		alto	a_3	a'_3	a''_3
	Total del nivel	a	a'	a''	
Nivel 2	Grado	bajo	b_1	b'_1	b''_1
		medio	b_2	b'_2	b''_2
		alto	b_3	b'_3	b''_3
	Total del nivel	b	b'	b''	
Nivel 3	Grado	bajo	c_1	c'_1	c''_1
		medio	c_2	c'_2	c''_2
		alto	c_3	c'_3	c''_3
	Total del nivel	c	c'	c''	

Para que la destreza de representación asociada a determinado ítem (o su carencia) se considerara como característica de cierto nivel de razonamiento, se requirió como normal general que se verificaran las condiciones siguientes:

- a) Que se observara una relación clara entre dicha destreza y el nivel de razonamiento: i.e., que aumente de forma progresiva el número de respuestas correctas a medida que aumenta el nivel de razonamiento de los estudiantes (a mayor nivel, mayor porcentaje de respuestas correctas), sin saltos hacia atrás entre niveles, y también dentro de cada nivel a medida que aumenta su grado de adquisición. I.e., con respecto a los valores de la tabla:

$$a \leq b \leq c, a' \geq b' \geq c'; a_i \leq a_{i+1}, b_i \leq b_{i+1}, c_i \leq c_{i+1} \text{ y } a'_i \geq a'_{i+1}, b'_i \geq b'_{i+1}, c'_i \geq c'_{i+1}, \forall i=1, 2$$

Se tuvieron en cuenta los casos particulares en que la progresión se interrumpía entre los grados de adquisición de un mismo nivel y esa interrupción era despreciable o podía explicarse por alguna deficiencia de la muestra (p. ej., por ser insuficiente el conjunto de estudiantes de alguno de los grados del nivel).

- b) Llamando y al porcentaje de respuestas correctas a un cierto ítem, para que su destreza asociada correspondiera al nivel x , se requirió, en este orden:
- que x fuera el primer nivel en el que $y \geq 75\%$ como media del nivel (en los niveles superiores a x también se superará el 75%), i.e., como media entre todos los estudiantes del nivel x en sus tres grados de adquisición (bajo, alto y medio).

O si esto no se cumpliera:

- que x fuera el primer nivel en el que $60\% \leq y < 75\%$ como media del nivel (en los niveles superiores a x también se superará el 75%), i.e., como media entre todos los estudiantes del nivel x en sus tres grados de adquisición (bajo, alto y medio), y además que $y \geq 80\%$ para los estudiantes de nivel x con grado de adquisición alto.

Para formularlo negativamente (i.e., la carencia de dicha destreza como característica de nivel), se requirió que a lo sumo un 25% de los estudiantes del nivel fueran capaces de responder correctamente el ítem. Todos estos criterios están sintetizados en la Tabla 3.

Tabla 3. Criterios para decidir si una destreza es característica o no de cierto nivel

Ítem – Destreza				
y = % de respuestas correctas a cierto ítem			Característica	
Nivel x	1 ^{er} criterio	$y \geq 75\%$	Media del nivel x (adquisición baja, media y alta)	
	2 ^o criterio	$60\% \leq y < 75\%$	Media del nivel x (adquisición baja, media y alta)	
		$y \geq 80\%$	Media de la adquisición alta del nivel x	
	$y \leq 25\%$			Negativa del nivel x

RESULTADOS

En las Figuras 1, 2, 3 y 4 se muestran, a modo de ejemplo, respuestas a algunos de los ítems.

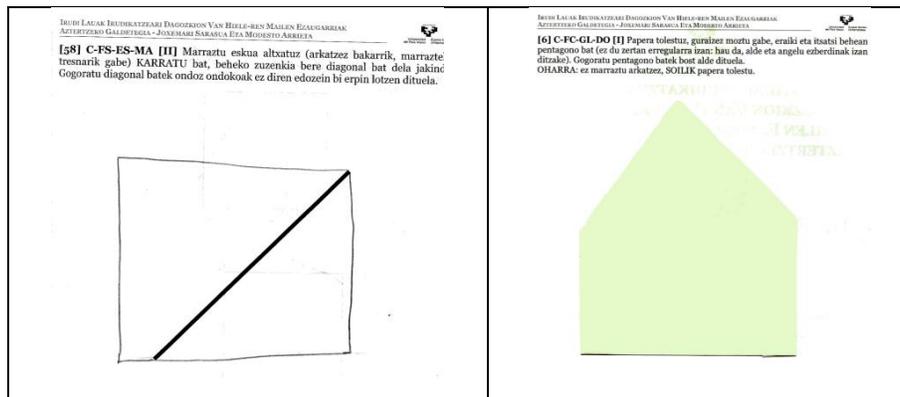


Figura 1. Ítem 58: cuadrado dibujado a mano alzada a partir de una diagonal dada

Figura 2. Ítem 6: construcción de un polígono mediante doblado de papel

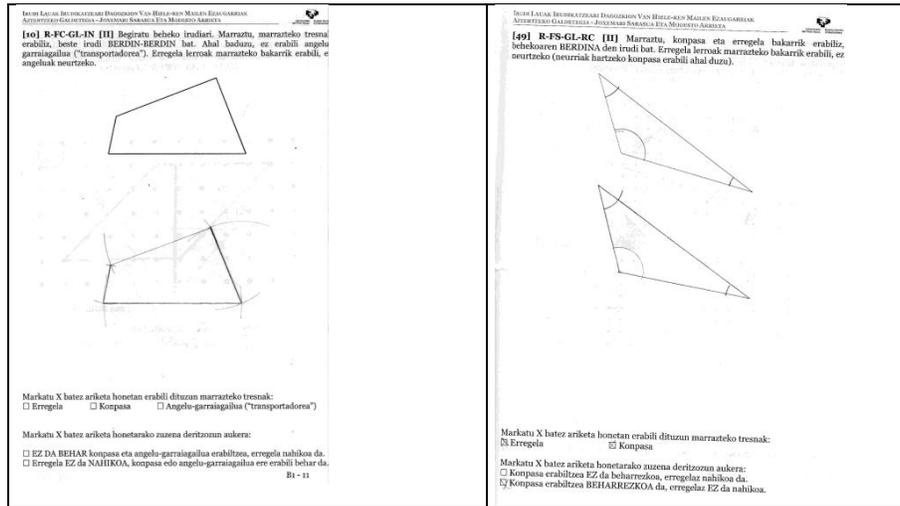


Figura 3. Ítem 10: reproducción de un cuadrilátero dado (con regla y compás)

Figura 4. Ítem 49: uso (irrelevante) del compás para reproducir un triángulo dado

En la Tabla 4 se ofrecen de forma sintética los resultados cuantitativos porcentuales de todos los ítems evaluados. Se muestra para cada ítem:

- a) Sus características generales según las siguientes categorías:
- Material, soporte o instrumentos utilizados (Mat.):
 - MP: actividades manipulativas (recortar, doblar, calcar, pegar)
 - TR: dibujo a mano alzada sobre una cuadrícula
 - MA: dibujo a mano alzada sobre papel en blanco
 - IN: con instrumentos de dibujo (regla, compás y transportador)
 - RC: solo con regla y compás
 - Modo de construcción (Mod1/Mod2):
 - R: dado un modelo, reproducir globalmente (GL)
 - C: creando globalmente a partir de una definición (GL), a partir de elementos básicos (EB), como lados o ángulos, o a partir de elementos secundarios (ES), p. ej. diagonales
 - CR: comprobar propiedades o relaciones geométricas simples (SI) o complejas (CO)
 - Tipos de figuras (Fig.):
 - FS: figuras simples (triángulos, rectángulos, cuadrados)
 - FC: figuras complejas (resto de cuadriláteros y otros polígonos)
- b) Destreza que se pretende evaluar.
- c) Resultados cuantitativos de la evaluación. Para el conjunto de estudiantes de cada nivel de VH que han contestado a un determinado ítem:

- Número de estudiantes de cada nivel que han respondido (correcta o incorrectamente) al ítem. Se excluyen las respuestas en blanco o nulas.
- Porcentaje de respuestas correctas al ítem. El resto corresponde a respuestas negativas.

Los números precedidos por (a) se refieren al tamaño de la muestra y al porcentaje de respuestas correctas limitados a los estudiantes con un grado de adquisición alta del nivel correspondiente.

Tabla 4. Respuestas a los ítems en función del nivel predominante de razonamiento

Ítem	Mat.	Mod1	Fig.	Mod2	Destreza a evaluar	nvh-1		nvh-2		nvh-3	
						tamaño muestra	% correcto	tamaño muestra	% correcto	tamaño muestra	% correcto
i_19	IN	C	FS	EB	Dado un cateto "inclinado", es capaz de dibujar un triángulo rectángulo con instrumentos de dibujo.	16	24%	40	53%	27	85%
i_23	IN	C	FS	ES	Dada una diagonal "horizontal", es capaz de dibujar un cuadrado con instrumentos de dibujo.	15	0%	52	17%	16	31%
i_32	IN	C	FC	GL	Es capaz de dibujar un pentágono con los lados iguales usando instrumentos de dibujo a partir de su definición.	72	11%	82	20%	26	42%
i_27	IN	C	FC	EB	Dados un lado "inclinado" y la definición, es capaz de dibujar un paralelogramo no rectángulo con instrumentos de dibujo.	63	5%	86	16%	58	43%
i_15	IN	CR		CO	Es capaz de comprobar una propiedad (las bisectrices de un triángulo intersecan en un punto) mediante instrumentos de dibujo.	79	13%	99	25%	17	77%
i_16	IN	CR		CO	Es capaz de comprobar una propiedad (las mediatrices de un triángulo intersecan en un punto) mediante instrumentos de dibujo.	71	11%	78	18%	73	70%
i_13	IN	R	FS	GL	Dado un cuadrado, es capaz de dibujar otro igual mediante instrumentos de dibujo.	56	2%	41	12%		
i_10	IN	R	FC	GL	Si se le muestra un cuadrilátero no trapecio es capaz de dibujar otro igual con instrumentos de dibujo.	63	10%	47	19%		
i_60	MA	C	FS	GL	Dada la definición de triángulo isósceles, es capaz de dibujarlo a mano alzada.	56	91%	42	100%		
i_4	MA	C	FS	GL	Es capaz de dibujar un cuadrado a mano alzada a partir de su nombre y de su definición.	64	64%	47	77%		
i_18	MA	C	FS	EB	Dado un lado "inclinado", es capaz de dibujar un rectángulo no cuadrado a mano alzada.	74	32%	82 (a) 9	65% (a) 82%	29	86%
i_21	MA	C	FS	ES	Dada una diagonal "vertical" y su definición, es capaz de dibujar un cuadrado a mano alzada.	64	22%	47	51%	39 (a) 6	69% (a) 83%
i_21a	MA	C	FS	ES	Dada una diagonal "vertical" y su definición, es capaz de dibujar un cuadrilátero que tiene dicha diagonal.	64	75%	47	92%		
i_58	MA	C	FS	ES	Dado una diagonal "inclinada" y su definición, es capaz de dibujar un cuadrado a mano alzada.	57	54%	41	76%	38	87%
i_58a	MA	C	FS	ES	Dada una diagonal "inclinada" y su definición, es capaz de dibujar un cuadrilátero que tiene dicha diagonal.	57	75%	41	83%		
i_44	MA	R	FC	GL	Es capaz de reproducir a mano alzada un pentágono no estándar en presencia de su modelo.	63	86%	47	89%		

Tabla 4 (continuación). Respuestas a los ítems en función del nivel predominante de razonamiento

Ítem	Mat.	Mod1	Fig.	Mod2	Destreza a evaluar	nvh-1		nvh-2		nvh-3	
						tamaño muestra	% correcto	tamaño muestra	% correcto	tamaño muestra	% correcto
i_6	MP	C	FC	GL	Es capaz de construir un polígono cualquiera mediante doblado de papel a partir de su nombre y de su definición.	58	86%	42	95%		
i_31	MA	C	FC	ES	Es capaz de dibujar a mano alzada un hexágono a partir de una diagonal y un ángulo y dada su definición.	15	53%	52 (a) 10	69% (a) 83	16	81%
i_11	MP	CR		CO	Es capaz de comprobar una propiedad (las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto) mediante doblado de papel.	79	41%	99	75%	17	88%
i_35	MP	CR		CO	Es capaz de comprobar una propiedad (los ángulos interiores de un trapecio suman 360°) recortando con tijeras.	58	81%	42	86%		
i_61	MP	CR		CO	Es capaz de comprobar una propiedad (los ángulos interiores de un triángulo suman un ángulo llano) recortando con tijeras.	64	75%	47	92%		
i_54	MP	CR		CO	Es capaz de comprobar una propiedad (los ángulos interiores de un triángulo suman un ángulo llano) doblando el papel.	74	23%	82	31%	29	45%
i_2	MP	R	FC	GL	Dado un polígono "no estándar" es capaz de reproducir otro igual calcando.	49	98%				
i_43	MP	R	FC	GL	Dado un modelo (polígono "no estándar") es capaz de construir una figura similar doblando papel.	64	64%	47	70%		
i_43a	MP	R	FC	GL	Es capaz de reproducir globalmente, a partir de una figura que se le ha mostrado como modelo y mediante doblado de papel, otra figura no idéntica pero sí con el mismo número de lados y ángulos, que aparecen bien definidos, aun cuando la métrica de estos elementos o su relación proporcional pueda no corresponder exactamente con modelo.	40	88%	14	89%		
i_8	RC	C	FS	GL	Es capaz de dibujar un rectángulo sólo con regla y compás	15	7%	51	8%	60	37%
i_9	RC	C	FS	GL	Es capaz de dibujar un triángulo equilátero sólo con regla y compás a partir de su nombre y de su definición.	64	48%	73	62%	27	85%
i_14	RC	C	FS	EB	Es capaz de dibujar un cuadrado sólo con regla y compás a partir de un lado de cierta medida que se le enuncia pero no se le dibuja.	49	2%	33	0%	45	42%
i_50	RC	C	FC	ES	Dada la diagonal menor (horizontal) y la medida de la mayor, es capaz de dibujar un rombo sólo con regla y compás.	55	13%	40	10%	46 (a) 6	61% (a) 100%
i_51	RC	C	FC	EB	Dados tres vértices, es capaz de dibujar un paralelogramo sólo con regla y compás.	16	13%	40	25%	27 (a) 2	63% (a) 100%

Tabla 4 (continuación). Respuestas a los ítems en función del nivel predominante de razonamiento

Ítem	Mat.	Mod1	Fig.	Mod2	Destreza a evaluar	nvh-1		nvh-2		nvh-3	
						tamaño muestra	% correcto	tamaño muestra	% correcto	tamaño muestra	% correcto
i_53	RC	C	FC	GL	Dada la definición, es capaz de dibujar un hexágono regular sólo con regla y compás.	133	9%		nulo		nulo
i_39	RC	CR	SI		Es capaz de comprobar una propiedad (igualdad de lados de un paralelogramo) usando regla y compás.	16	81%	40	75%	27	96%
i_49	RC	R	FS	GL	Dado un triángulo obtusángulo, es capaz de dibujar otro igual sólo con regla y compás.	63	13%	47	23%	45	76%
i_48	RC	R	FC	GL	Dado un rombo, es capaz de dibujar otro igual con regla y compás.	55	9%	41	19%	46	83%
i_59	TR	C	FS	EB	Dado un lado en posición "horizontal", es capaz de dibujar un cuadrado a mano alzada sobre una cuadrícula.	58	91%	42	100%		
i_17	TR	C	FS	EB	Dado un lado "inclinado" y la definición de cuadrado, es capaz de dibujar un cuadrado a mano alzada sobre una cuadrícula.	79	87%	99	90%	17	94%
i_7	TR	C	FS	GL	Es capaz de dibujar un triángulo obtusángulo a mano alzada sobre una cuadrícula a partir de su nombre y de su definición.	57	59%	42	83%		
i_28	TR	C	FC	ES	Dada una diagonal "inclinada" y la definición, es capaz de dibujar un trapecio no rectángulo a mano alzada sobre una cuadrícula.	74	10%	82	37%	29	76%
i_24	TR	C	FC	EB	Dado un lado y la definición, es capaz de dibujar un rombo no cuadrado a mano alzada sobre una cuadrícula.	79	67%	98	81%	17	94%
i_41	TR	CR		SI	Es capaz de comprobar y razonar una propiedad elemental (igualdad de lados paralelos en un paralelogramo) midiendo puntos sobre una cuadrícula.	63	25%	47 (a) 10	68% (a) 80%	35	91%
i_42	TR	CR		CO	Es capaz de comprobar y razonar una propiedad no elemental (las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio) midiendo puntos sobre una cuadrícula.	58	9%	42	24%	31	77%
i_3	TR	CR		CO	Es capaz de comprobar una propiedad compleja (el teorema de Pitágoras) sobre una cuadrícula.	70	3%	98	2%	17	18%
i_1	TR	R	FC	GL	Dado un heptágono "no estándar" es capaz de dibujar otro igual a mano alzada sobre una cuadrícula.	64	83%	47	92%		

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y PROPUESTA DE NUEVOS DESCRIPTORES PARA LOS NIVELES DE VH

Los resultados obtenidos sugieren que existe correspondencia entre el desarrollo de las destrezas de representación consideradas y los niveles de VH; esta correspondencia también se manifestaría según los grados de adquisición de cada nivel. I.e., a medida que progresa el nivel de VH, y dentro de cada nivel su grado de adquisición, progresan también las destrezas de representación de los estudiantes, más concretamente las relativas a: i) representaciones de figuras planas mediante plegado de papel, recorte con tijeras y calcado; ii) dibujos a mano alzada sobre cuadrícula o sobre papel en blanco; iii) dibujos con regla, compás y transportador o de precisión con solo regla y compás; iv) la comprobación manipulativa o gráfica de ciertas propiedades y relaciones, elementales y complejas, de figuras planas o de sus elementos.

Cabe plantearse, por tanto, la caracterización, aunque sea parcial, de los niveles de VH en términos de las formas de razonar geoméricamente correspondientes a la representación.

Agrupando destrezas de características similares e induciendo de ellas descriptores de validez más general, se ha sintetizado la siguiente propuesta final de descriptores de nivel para la de representación (Tablas 5, 6 y 7). Dada la naturaleza jerárquica de los niveles, cuando un descriptor formulado negativamente corresponda a cierto nivel, se debe entender que también corresponde negativamente a los niveles inferiores, cuando éstos existan.

Tabla 5. Descriptores de **NIVEL 1** referidos a destrezas de representación externa de figuras planas

Modo	Descriptor	Ítems
Manipulativo	<ul style="list-style-type: none"> • Es capaz de reproducir una figura plana calcándola o de construirla globalmente mediante doblado de papel en presencia de un modelo o dada una definición comprensible. 	6, 43a, 2
	<ul style="list-style-type: none"> • Es capaz de comprobar algunas propiedades simples (p. ej. sumas de ángulos interiores de figuras planas) recortando con tijeras, pero no mediante doblado de papel. 	35, 54, 61
Sobre cuadrícula	<ul style="list-style-type: none"> • Es capaz de reproducir sobre una cuadrícula una figura plana en presencia de un modelo o una figura plana identificable dado algún elemento básico suyo: p. ej. un cuadrado dado un lado, horizontal o inclinado. 	1, 17, 59, 24
	<ul style="list-style-type: none"> • No es capaz de comprobar y razonar propiedades elementales (p. ej., igualdad de lados paralelos en un paralelogramo) ni otras no elementales (p. ej. que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio) contando unidades sobre una cuadrícula. 	41, 42
A mano alzada	<ul style="list-style-type: none"> • Es capaz de dibujar globalmente a mano alzada una figura plana en presencia de un modelo o dada una definición comprensible. 	4, 44, 60
	<ul style="list-style-type: none"> • Es capaz de dibujar a mano alzada algunas figuras (p. ej. cuadriláteros no cuadrados) a partir de elementos secundarios (p. ej., una diagonal). 	21, 21a, 58, 58a
Con instrumentos de dibujo (R/C o R/C y transportador)	<ul style="list-style-type: none"> • Es capaz de comprobar propiedades simples (p. ej. igualdad de lados en un paralelogramo) usando regla y compás. 	39
	<ul style="list-style-type: none"> • No es capaz de dibujar con instrumentos de dibujo (regla, compás y transportador) figuras planas en general, incluidos cuadriláteros, ni a partir de su definición, ni a partir de sus elementos y de la definición de éstos, ni en presencia de un modelo. Utiliza para dibujar solo la regla, y no creen que sea necesario el uso efectivo ni del compás ni del transportador. 	19, 23, 32, 27, 13, 10, 8, 14, 14a, 50, 51, 53, 49, 48

Tabla 6. Descriptores de **NIVEL 2** referidos a destrezas de representación externa de figuras planas

Modo	Descriptor	Ítems
Manipulativo	<ul style="list-style-type: none"> • Es capaz de comprobar mediante doblado de papel ciertas propiedades no inmediatas (p. ej. que las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto). 	11
Sobre cuadrícula	<ul style="list-style-type: none"> • Es capaz de dibujar algunas figuras (p. ej. un triángulo obtusángulo) a mano alzada sobre una cuadrícula dado su nombre y su definición. Sin embargo, tiene dificultades para dibujar sobre una cuadrícula figuras más complejas a partir de elementos secundarios (p. ej. un trapecio dada una diagonal). 	7, 28
	<ul style="list-style-type: none"> • Es capaz de comprobar y razonar, contando unidades sobre una cuadrícula, propiedades elementales (p. ej. igualdad de lados paralelos en un paralelogramo), pero no propiedades más complejas (p. ej. que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio o el teorema de Pitágoras). 	41, 42, 3
A mano alzada	<ul style="list-style-type: none"> • Es capaz de dibujar a mano alzada figuras sencillas a partir de sus elementos, básicos o secundarios, con alguna limitación con respecto a la posición de éstos (p. ej. dibuja un cuadrado a partir de su diagonal en posición prototípica). 	4, 21, 58a, 18, 31
Con instrumentos de dibujo (R/C o R/C y transportador)	<ul style="list-style-type: none"> • No es capaz de dibujar con instrumentos de dibujo (regla, compás y transportador) figuras planas en general, incluidos cuadriláteros, ni a partir de su definición, ni a partir de sus elementos y de la definición de éstos, ni en presencia de un modelo. • No es consciente de los requerimientos del dibujo de precisión con regla y compás. Utiliza para dibujar solo la regla y no cree necesario el uso ni del compás ni del transportador. 	23, 32, 27, 13, 10, 8, 14, 14a, 50, 51, 49, 48
	<ul style="list-style-type: none"> • No es capaz de comprobar mediante instrumentos de dibujo propiedades no inmediatas (p. ej. que bisectrices y mediatrices de un triángulo intersecan en un punto). 	15, 16

Tabla 7. Descriptores de **NIVEL 3** referidos a destrezas de representación externa de figuras planas

Modo	Descriptor	Ítems
Sobre cuadrícula	<ul style="list-style-type: none"> • Es capaz de comprobar y razonar, contando unidades sobre una cuadrícula, ciertas propiedades elementales y no elementales (p. ej. igualdad de lados paralelos en un paralelogramo o que sus diagonales se cortan en el punto medio). • No es capaz de comprobar sobre una cuadrícula el teorema de Pitágoras. 	41, 42, 3
Con instrumentos de dibujo (R/C o R/C y transportador)	<ul style="list-style-type: none"> • Es consciente de la naturaleza y de los requerimientos del dibujo de precisión con regla y compás. • Es capaz de dibujar algunas figuras (triángulos en general, paralelogramos no rectángulos y rombos no cuadrados) mediante regla y compás a partir de su definición, dado un modelo o a partir de elementos suyos (diagonales, vértices, lados). Tiene dificultades con los rectángulos, probablemente por falta de destreza para dibujar ángulos rectos con regla y compás. 	9, 19, 48, 49, 53
	<ul style="list-style-type: none"> • Es capaz de comprobar mediante instrumentos de dibujo propiedades no inmediatas (p. ej. que bisectrices y mediatrices de un triángulo intersecan en un punto). 	15, 16

Se ordenan a continuación las destrezas de representación analizadas en relación a los niveles de VH:

- i) Las destrezas manipulativas de construcción global (plegado de papel, calco, recorte con tijeras) se desarrollan en su práctica totalidad a lo largo del 1º nivel. Como cabía esperar, el razonamiento geométrico que las acompaña es de carácter visual, basado en la percepción e identificación global de las figuras como unidades que carecen de elementos y propiedades significativas. Sin embargo, con el apoyo de instrumentos manipulativos sencillos, como p. ej. unas tijeras, el estudiante es capaz de iniciarse ya desde el 1º nivel en procesos de comprobación o de formulación de conjeturas sobre propiedades simples (p. ej., la suma de ángulos interiores de un triángulo o de un cuadrilátero), al mismo tiempo que descompone las figuras en partes y puede reflexionar sobre sus propiedades. Este aspecto parece importante también por su recorrido didáctico, no solo como característica de identificación de nivel. La comprobación manipulativa de otras propiedades no inmediatas corresponde al 2º nivel de VH.
- ii) Las destrezas de representación a mano alzada sobre cuadrícula y papel en blanco se desarrollan progresivamente entre los dos primeros niveles. Influyen aspectos como, p. ej., si se parte de un modelo para reproducir (1º nivel), o se da una definición comprensible de la figura (1º nivel), o un elemento básico de ella, p. ej. un lado, (1º nivel); o por el contrario si se trata de dibujar a partir de elementos secundarios (p. ej. una diagonal), aunque con ciertas limitaciones según la posición u orientación de éstos (2º nivel). Un estudiante de 2º nivel muestra dificultades para dibujar, tanto a mano alzada como sobre cuadrícula, figuras más complejas a partir de elementos secundarios

(p. ej., un trapecio dada una diagonal). Este tipo de dibujos pueden requerir de razonamiento analítico en diverso grado, dependiendo del tipo de propiedades o partes de las figuras sobre las que se basen; no obstante, éste puede estar ya implícito en el 1º nivel, puesto que el estudiante lo utiliza para dibujar ciertas figuras a partir de algunos de sus componentes. Otras veces, sin embargo, puede no ser necesario: p. ej. cuando se reproducen formas en presencia de un modelo o algunas figuras conocidas (cuadrados, triángulos equiláteros, etc.) a partir de una definición comprensible. En estos casos, en el 1º nivel las representaciones son globales y con características que reflejan un razonamiento puramente visual: polígonos con lados curvos, ángulos redondeados o sin vértices, cuadrados de lados y ángulos desiguales, etc. Los distractores de posición y, en general, las imágenes prototípicas que tienen formadas los estudiantes influyen también en la relación entre las destrezas de representación a mano alzada y el nivel de VH.

- iii) Las destrezas que implican el uso de la regla y el compás comienzan a mostrarse de forma relevante en el primer nivel (p. ej., para comprobar propiedades muy sencillas), de lo que se deduce que los estudiantes pueden dominar los rudimentos de su manejo desde muy pronto. Desde los primeros niveles también pueden *manejar* algorítmicamente la regla y el compás (destrezas de uso mecánico, sin razonamiento matemático). Otra cuestión es sentir su necesidad o comprender su función: ni en el 1º nivel ni en el 2º un estudiante es consciente de la naturaleza y de las exigencias del dibujo de precisión; así mismo, tampoco es capaz de dibujar figuras planas en general usando instrumentos de dibujo ni a partir de su definición, ni en presencia de un modelo, ni a partir de sus componentes, ni a partir de sus propiedades. Apenas utilizan el transportador en ninguno de los niveles, ni siquiera como instrumento de medida sustitutivo de la regla y el compás: en los dos primeros niveles no lo consideran necesario (la regla es suficiente) y en el 3º nivel prefieren optar directamente por la regla y el compás. Las evidencias que hemos encontrado sugieren que sólo en el 3º nivel, y no antes, los estudiantes optan por la regla y el compás, y los usan correctamente, tanto para dibujar figuras con precisión (triángulos, rombos no cuadrados, paralelogramos no rectángulos) como para comprobar propiedades no inmediatas (p. ej., intersección en un punto de bisectrices y mediatrices de un triángulo). No parece que la incapacidad de apreciar y usar de forma efectiva la regla y el compás, incapacidad que se extiende hasta el 3º nivel, pueda explicarse únicamente en términos de desconocimiento de manejo instrumental. Si fuera así, muchos estudiantes en el 2º nivel también tendrían dificultades para reproducir procedimientos aprendidos, como es el caso de las construcciones del hexágono regular o del triángulo equilátero, figuras que muchos de ellos han sido capaces de dibujar mecánicamente. Esto lleva a sugerir que la forma de razonamiento geométrico requerido para apreciar el dibujo de precisión en sus diversas funciones (no sólo orientado a la construcción exacta de figuras), sentir su necesidad y ser capaz de utilizar eficazmente la regla y el compás parece estar vinculado al desarrollo de habilidades propias del 3º nivel de VH (éstas son fundamentalmente lógicas y de demostración).

RESUMEN Y CONCLUSIONES

Tras determinar el nivel de VH de una muestra de 523 estudiantes desde 6º de Primaria hasta la Universidad para el tema de las figuras planas, se les ha administrado un cuestionario para analizar cómo progresan, en función del nivel de VH, en la adquisición de determinadas destrezas de representación externa.

Los resultados sugieren que existe relación entre el desarrollo de las destrezas de representación estudiadas y los niveles de VH: dicho de otra manera, a medida que se progresa en el nivel de VH, mejoran progresivamente las destrezas de representación.

El siguiente paso ha sido formular una propuesta de nuevos descriptores de los niveles en relación a la representación externa de figuras planas. Estos nuevos descriptores pueden contribuir a comprender mejor los límites de cada nivel, a facilitar la integración curricular del modelo de VH y pueden servir también como punto de partida para explorar la formulación de nuevos descriptores, en relación a la representación externa, para otros grupos contenidos geométricos (sólidos, isometrías, etc.).

Con todo, es necesario profundizar en los procesos de razonamiento geométrico implicados cuando se trabaja con representaciones externas: ¿qué piensan los estudiantes cuando resuelven una actividad?, ¿cómo organizan y relacionan los elementos que manejan durante su resolución?, ¿dónde está la frontera entre las destrezas manuales-instrumentales y el razonamiento lógico-matemático cuando hablamos de representar externamente?

Por último, dado lo extenso de la muestra y el formato elegido para el trabajo de campo (cuestionario escrito), han quedado fuera diversas formas de representación con objetos manipulativos físicos (*tangram*, construcciones con palillos, etc.) y mediante software dinámico. En particular, sería interesante abordar un análisis específico de la relación entre los niveles de VH y las destrezas de representación en entornos de geometría dinámica.

REFERENCIAS

- Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J. M. (1988). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, N.C.: Information Age Publishing. NCTM.
- Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In M. Kathleen & G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 341-362). Charlotte: IAG.
- Bravo, M. d. L., Del Sol, J. L., & Arteaga, E. (2001). El dibujo geométrico en la resolución de problemas. *Xixim: Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas*, 2(1), 10-13.
- Bressan, A. M., Bogisic, B., & Crego, K. (2000). *Razones para enseñar geometría en la Educación Básica*. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.
- Clements, D. H. (1999). 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1(1), 45-60.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young Children's Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192-212. doi: 10.2307/749610
- Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M. P., Jaime, A., Margarit, J. B., Peñas, A., & Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Dindyal, J. (2010). *Use of Algebraic Thinking in Geometry*. Saarbrücken: VDM Verlag Dr. Müller.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. In F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática educativa* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
- Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representation in mathematics education. *For the learning of Mathematics*, 27(2), 2-7.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

- Goldin, G. A. (1998). The PME Working Group on Representations. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 283-301.
- Goldin, G. A. (2002). Representation in Mathematical Learning and Problem Solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates
- González, N., & Larios, V. (2001). El doblado de papel: una experiencia en la enseñanza de la geometría. *Xixim: Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas*, 1(2), 10-17.
- Gutiérrez, A. (2009). Perspectiva de la Investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Investigación en la Escuela*(69), 61-72.
- Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the VH levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 237-251. doi: 10.2307/749076
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning Geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by te IGPME* (pp. 70-148). Cambridge: Cambridge UP.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher*, 74(1), 11-18.
- Huerta, M. P. (1999). Los niveles de Van Hiele y la taxonomía SOLO: un análisis comparado, una integración necesaria. *Enseñanza de las ciencias*, 17(2), 291-309.
- Janvier, C. (1987). Conceptions and representations. In C. Janvier (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-158). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associated.
- Kaput, J. J. (1987). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: MacMillan Publishing Company.
- Kaput, J. J. (1998). Representations, Inscriptions, Descriptions and Learning: A Kaleidoscope of Windows. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 265-281.
- Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Shovmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 159-179). New York: Springer.
- Mesquita, A. L. (1998). On Conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195.
- NCTM. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- NCTM. (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pegg, J., & Davey, G. (1998). Interpreting student understanding of geometry: A synthesis of two models. In R. Lehrer & D. E. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 109-135). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- Pegg, J., Gutiérrez, A., & Huerta, M. P. (1998). Assessing Reasoning Abilities in Geometry. In V. Villani & C. Mammana (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry por the 21st Century* (pp. 275-295). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Poincaré, H. (1902). *Ciencia e hipótesis (Edición y traducción de 2002)*. Madrid: Espasa.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- RS. (2001). Teaching and Learning Geometry 11-19 (Report of a Royal Society / Joint Mathematical Council working group). London: Royal Society/Joint Mathematical Council.
- Saads, S., & Davis, G. (1997a). Spatial Abilities, Van Hiele levels, & language use in three dimensional geometry. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 104-111). Lahti.
- Saads, S., & Davis, G. (1997b). Visual perception and image formation in three dimensional geometry. (*En enero de 2010: <http://www.crme.soton.ac.uk/publications/gdpubs/Saads&Davis.html>*).
- Sarasua, J. (2011). *Hacia una categorización de los objetivos geométricos. Propuesta de nuevos descriptores de los niveles de Van Hiele para la representación externa de figuras planas (Tesis Doctoral)*. Tesis Doctoral, Euskal Herriko Unibertsitatea - Universidad del País Vasco, Vitoria-Gasteiz.

- Sarasua, J., Ruiz de Gauna, J. G., & Arrieta, M. (2013). Prevalence of Geometric Thinking Levels over Different Stages of Education. *Revista de Psicodidáctica*, 18(2), 311-327. doi: 10.1387/RevPsicodidact.6466
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight*. London: Academic Press.
- Vergnaud, G. (1998). A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *Journal for Mathematical Behavior*, 17(2), 167-181.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.
- Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 83(1), 20-25.
- Weng San, L. (2010). *First-year university students' algebraic thinking and its relationship to geometric conceptual understanding (Tesis Doctoral)*. University of the Witwatersrand, Johannesburg.