RAZONAMIENTO PROPORCIONAL: CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE CONTENIDO MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE PRIMARIA

Proportional reasoning: Pre-service primary school teachers' specialized content knowledge for teaching

Àngela Buforn y Ceneida Fernández

Universidad de Alicante

Resumen

Este estudio examina el conocimiento especializado de contenido matemático de un grupo de estudiantes para maestro de Educación Primaria en el ámbito del razonamiento proporcional. Los resultados muestran que los estudiantes para maestro tienen dificultades en identificar situaciones no proporcionales, en reconocer la unidad en contextos de medida con el significado parte-todo y en usar el significado multiplicativo de la idea de operador. Estos resultados aportan información de las características del conocimiento especializado sobre el razonamiento proporcional de los estudiantes para maestro que pueden influir en el desarrollo de diferentes ámbitos de la competencia docente.

Palabras clave: *Razonamiento proporcional, estudiantes para maestro de primaria, conocimiento especializado de contenido matemático.*

Abstract

This study focuses on examining pre-service primary school teachers' mathematical content knowledge related to proportional reasoning. Results show pre-service teachers' difficulties in identifying non-proportional situations, in the development of the up and down reasoning and in the use of the meaning of operator. These results provide information about characteristics of pre-service teachers' specialized content knowledge related to the proportional reasoning that could influence on the development of different areas of the teaching competence.

Keywords: *Proportional reasoning, pre-service primary school teachers, specialized mathematical content knowledge.*

INTRODUCCIÓN

El desarrollo del razonamiento proporcional entendido como la "habilidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y de extender dicha relación a otro par de cantidades" (Lamon, 2005) es un objetivo en el currículo de Educación Primaria y Secundaria que conlleva varios procesos cognitivos interrelacionados que van desde el pensamiento cualitativo hasta el razonamiento multiplicativo (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992).

Recientemente se ha empezado a reconocer que la enseñanza de la idea de razón y proporción que subyacen en el desarrollo del razonamiento proporcional no es una tarea fácil para los maestros. Las investigaciones han empezado a mostrar algunas características del conocimiento de matemáticas necesarias para la enseñanza de la idea de razón y proporción (Livy y Vale, 2011; Pitta-Pantazi y Christou, 2011) que se consideran clave para la realización de tareas profesionales como la planificación de la enseñanza o la interpretación de cómo los estudiantes de primaria aprenden las matemáticas. En la realización de estas tareas interviene el conocimiento de matemáticas

Buforn, A. y Fernández, C. (2013). Razonamiento proporcional: Conocimiento especializado de contenido matemático en estudiantes para maestro de primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 185-192). Bilbao: SEIEM

especializado que está configurando una agenda internacional de investigación apoyada en la noción de "conocimiento matemático para enseñar" (mathematical knowledge for teaching, MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Las investigaciones centradas en el conocimiento de matemáticas para enseñar (MKT) ponen de manifiesto algunas características de cómo los estudiantes para maestro comprenden el conocimiento matemático. Livy y Vale (2011) indican que solo un 5% de los estudiantes para maestro de su estudio fueron capaces de resolver correctamente dos tareas relacionadas con el concepto de razón donde se realizaba una comparación todo-todo en un contexto de escalas. Por otra parte, Valverde y Castro (2009) señalan el predominio de un razonamiento pre-proporcional en las actuaciones de un grupo de estudiantes para maestro en tareas de proporcionalidad de valor perdido. Los estudiantes para maestro de este estudio aplicaban estrategias y procedimientos correctos pero se percibía cierta falta de reconocimiento de la relación funcional entre las cantidades y de argumentos que permitan establecer la relación entre dos razones sin necesidad de hallar el valor de la razón. En esta misma dirección, Rivas, Godino y Castro (2012) indican que estudiantes para maestro tienen limitaciones para reconocer los significados de los objetos matemáticos que intervienen en la resolución de un problema de proporcionalidad y como consecuencia, no interpretaban de manera apropiada las respuestas de alumnos de Educación Primaria a problemas de proporcionalidad. Este último estudio muestra cómo el conocimiento especializado de contenido matemático (specialized content knowledge, SCK) como parte del conocimiento de matemáticas para enseñar (mathematics content knowledge, MKT) interviene en la realización de la tarea profesional del maestro de analizar las producciones de sus alumnos. En este contexto, esta investigación se centra en el conocimiento especializado de contenido matemático en el ámbito del razonamiento proporcional en estudiantes para maestros como fundamento del desarrollo de otras tareas de enseñanza y competencias.

MARCO TEÓRICO

El razonamiento proporcional y sus componentes

Lamon (2005, 2007) señala que el razonamiento proporcional es multifacético e integra diferentes componentes: los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional) y las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento "up and down" y "unitizing"). En la interpretación del número racional se consideran cinco subconstructos: razón, operador, parte-todo, medida y cociente.

De acuerdo con Lamon (2005, 2007) las formas de razonar con estos subconstructos generan diferentes niveles de desarrollo del razonamiento proporcional. El razonamiento "up and down" implica una manera de razonar para resolver problemas cuando la unidad está implícita. El proceso de generar unidades contables ("unitizing") implica la construcción de una unidad de referencia a partir de la relación entre las cantidades y usar esta nueva unidad para contar. El pensamiento relacional describe la capacidad de analizar cambios en términos relativos al relacionar el número de partes en las que se divide un todo y el tamaño de cada parte en relación al total. La idea de covarianza tiene que ver con la manera en la que los estudiantes entienden que dos cantidades están relacionadas de tal manera que, cuando cambia una cantidad, la otra también cambia (covarianza) de una manera particular con respecto a la primera cantidad.

A partir de esta caracterización del razonamiento proporcional propuesta por Lamon (2005, 2007), Pitta-Pantazi y Christou (2011) consideran que las tareas de determinar si los contextos son proporcionales o no y las tareas proporcionales de valor perdido pueden proporcionar información relevante sobre el conocimiento de matemáticas relativo al razonamiento proporcional puesto de manifiesto por los resolutores.

Conocimiento especializado del contenido para la enseñanza del razonamiento proporcional

La idea del conocimiento de matemáticas para enseñar intenta enfatizar la relación entre el conocimiento de contenido matemático y el conocimiento pedagógico de contenido. Ball et al. (2008) consideran tres subcategorías dentro del conocimiento de contenido matemático: conocimiento común del contenido (common content knowledge), conocimiento especializado del contenido (specialised content knowledge) y conocimiento del horizonte matemático (horizon content knowledge). Este modelo considera el conocimiento especializado de contenido matemático (SCK) como el conocimiento de matemáticas que permite a los profesores implicarse en tareas específicas de la enseñanza, que incluyen cómo representar las ideas matemáticas a los estudiantes, proporcionar explicaciones matemáticas para las reglas y procedimientos y examinar y comprender métodos de resolución no usuales a los problemas. Es decir, es el conocimiento de matemáticas implicado, entre otras, en la competencia docente denominada “mirada profesional” (professional noticing) (Sherin, Jacobs y Philipp, 2010).

Puesto que Lamon (2005; 2007) señala que el razonamiento proporcional integra los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional) y las formas de razonar con estos significados, este es el conocimiento que debe tener un maestro que le permita implicarse en las tareas de enseñanza como comprender métodos de resolución (distintas formas de razonar) o cómo representar las distintas ideas o significados (objetos matemáticos). Por tanto, en nuestro estudio, el conocimiento especializado de contenido matemático sobre el razonamiento proporcional implica considerar los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional) y las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento “up and down”, “unitizing”, resolución de situaciones proporcionales de valor perdido y discriminación de situaciones no proporcionales). Teniendo en cuenta los estudios previos, el objetivo de esta investigación es identificar características del conocimiento especializado de contenido matemático de un grupo de estudiantes para maestros de Educación Primaria en el dominio del razonamiento proporcional.

MÉTODO

Los participantes fueron 85 estudiantes para maestro (EPM) de Educación Primaria. Los EPM respondieron un cuestionario formado por 13 tareas: 7 tareas evaluaban el conocimiento relativo a los significados vinculados a los subconstructos parte-todo, medida, razón, cociente y operador y al papel de algunos modos de representación (discreto-continuo en la interpretación parte-todo y la recta numérica en el contexto medida) y 6 tareas vinculadas a las formas de razonar en situaciones de proporcionalidad (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento “up and down”, “unitizing”, e identificación de situaciones proporcionales y no proporcionales). Para diseñar el cuestionario se tuvo en cuenta las componentes que caracterizaban el conocimiento especializado de contenido matemático del razonamiento proporcional derivado del análisis previo (Lamon, 2005; Pitta-Pantazi y Christou, 2011). La figura 1 muestra tareas propuestas en el cuestionario.

El cuestionario constaba de dos tareas relacionadas con la componente parte-todo que examinan las habilidades de los EPM en identificar la relación parte-todo en contexto discreto y continuo (la tarea 1 es un ejemplo en el contexto discreto). Una tarea relacionada con la componente razón (tarea 2) que exige a los EPM indicar la relación entre dos cantidades (en nuestro caso la relación era parte-parte) considerada como un índice comparativo. Una tarea relacionada con la componente operador (tarea 3) que pedía reducir o ampliar a escala una figura poniendo de manifiesto el carácter multiplicativo del operador. Una tarea relacionada con el subconstructo medida-recta numérica (tarea 4) que examina la capacidad de localizar fracciones en la recta numérica considerando la idea de fracción unitaria como unidad iterativa. Una tarea relacionada con la interpretación cociente (tarea 5) y una tarea relacionada con el subconstructo medida-densidad (tarea 6) donde los EPM deben buscar fracciones comprendidas entre dos fracciones dadas.

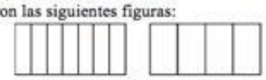
1. Contesta la siguiente cuestión usando la figura: ¿Cuántos puntos son 2/3 del conjunto dado? (Lamon ,1999, p. 73)  Subconstructo: Parte-todo	2. Hay 100 asientos en un teatro, 30 en el balcón y 70 en el patio principal. Se han vendido ochenta entradas para el primer pase incluyendo todos los asientos del patio principal. ¿Cuál es la razón entre los asientos del balcón y los del patio principal? (Lamon, 2005, p. 198) Subconstructo: Razón
3. El profesor le dijo a Nicolás que hiciese unas fotocopias. Nicolás cometió un error y apretó el botón que reduce el tamaño de cada copia a 3/4. ¿Cuánto debe aumentar Nicolás el tamaño de las copias reducidas para conseguir el tamaño original? (Pitta-Pantazi y Christou, 2011) Subconstructo: Operador	4. Localiza ¾ en la recta numérica:  (Pitta-Pantazi y Christou, 2011) Subconstructo: Medida, Recta numérica
5. Cuatro personas van a compartir 3 pizzas idénticas de peperoni. ¿Cuánto le tocará a cada persona si todos comerán la misma proporción de pizza? Haz un dibujo que muestre que proporción le toca a cada persona. (Pitta-Pantazi y Christou, 2011) Subconstructo: Cociente	6. Escribe dos fracciones que estén entre 1/6 y 1/5. Explica como lo has hecho. (Lamon, 2005, p. 122) Componente: Medida, densidad
7. La caja con 16kg de cereales A cuesta 3.36€ y la caja con 12kg de cereales B cuesta 2.64€. ¿Qué caja de cereales es más barata? (modificado de Lamon, 2005, p. 81) Componente: Unitizing	8. Sam y Jason, dos estudiantes de tercero, comentaron las siguientes figuras:  Sam dijo que 7/7 es más grande porque hay más piezas. Jason dijo que 4/4 es más grande porque las piezas son más grandes. ¿Tú qué piensas? (Lamon, 1999, p. 18-19) Componente: Pensamiento relacional
9. Diana corre vueltas todos los días. Si hoy ha recorrido menos vueltas en el mismo tiempo que lo hizo ayer. Justifica tu respuesta: (modificado de Pitta-Pantazi y Christou, 2011) i. Hoy ha corrido más rápido que ayer. ii. Ayer corrió más rápido que hoy. iii. Hoy ha corrido tan rápido como ayer. iv. La información dada no es suficiente para responder a la pregunta. Componente: Covarianza	10. La parte sombreada de esta figura representa 3 $\frac{2}{3}$. ¿Qué parte de la figura representa 4 rectángulos pequeños? (Lamon, 2005, p. 73)  Componente: Razonamiento "up and down"
11. John necesita 15 botes de pintura para pintar 18 sillas. ¿Cuántas sillas pintará con 25 botes de pintura? (Pitta-Pantazi y Christou, 2011) Problema de valor perdido (proporcional)	12. Víctor y Ana corren alrededor de una pista. Corren a la misma velocidad pero Ana ha empezado más tarde. Cuando Ana ha dado 5 vueltas, Víctor ha dado 15 vueltas. Cuando Ana haya dado 30 vueltas, ¿cuántas habrá dado Víctor? (Fernández, Llinares y Valls, 2008) Problema de valor perdido (no proporcional)

Figura 1. Tareas para cada una de las componentes del razonamiento proporcional

En la tarea 7, relacionada con la componente unitizing, los EPM deben comprobar cuál de los dos productos dados era más barato, por lo que las razones debían ser consideradas como unidades que se comparaban. La tarea 8, relacionada con la componente pensamiento relacional, examina si los EPM son capaces de identificar la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte. La tarea 9, correspondiente a la componente covarianza, requiere identificar la relación entre dos cantidades y realizar comparaciones sin datos numéricos específicos para reconocer cómo los cambios en una cantidad se relacionan con la otra. En cuanto a la tarea 10, relacionada con la componente razonamiento "up & down", evalúa la capacidad de reconstruir la unidad y utilizar ésta para obtener qué parte de la figura representa los rectángulos pedidos. Por último, se propone un problema proporcional de valor perdido (tarea 11) y un problema no proporcional de valor perdido que se modeliza mediante la función $f(x) = x + b$, (tarea 12) para evaluar la capacidad de identificar las situaciones no proporcionales.

Para el análisis de los datos, las respuestas correctas e incorrectas en cada tarea se codificaron como 1 o 0 según el siguiente criterio:

- Si se ha resuelto y justificado correctamente la tarea, se codificaba con un 1, independientemente de si había cometido un error de cálculo.
- Si se ha resuelto de forma incorrecta la tarea o estaba en blanco, se codificaba con un 0. También se codificaron con un 0 las respuestas que siendo correctas la justificación era incorrecta.

Primeramente se obtuvieron los porcentajes de éxito para cada una de las tareas y en segundo lugar realizamos un análisis Cluster usando el programa estadístico SPSS versión 18.0, para identificar diferentes grupos de estudiantes para maestro (perfiles) que nos pudieran proporcionar características del conocimiento especializado de contenido matemático en el ámbito del razonamiento proporcional.

RESULTADOS

Nivel de éxito en la resolución de las tareas

La tabla 1 muestra el porcentaje de éxito en cada una de las componentes. Más de la mitad de los estudiantes para maestro resolvieron correctamente las tareas relacionadas con las componentes medida-recta numérica, cociente, problema de valor perdido, covarianza, pensamiento relacional y parte-todo (de esta última, se muestra la media de ambas tareas (contexto discreto y continuo) ya que no hubo diferencias significativas entre ambas).

Tabla 1. Porcentaje de EPM que resolvieron correctamente las tareas relacionadas con cada una de las componentes del razonamiento proporcional

Componente	Porcentaje de éxito
Operador	2.35
Razonamiento “up and down”	9.41
Medida-densidad	17.65
Problema de valor perdido (no proporcional)	24.71
Razón	30.59
Proceso “unitizing”	32.94
Problema de valor perdido (proporcional)	72.94
Cociente	72.94
Medida-recta numérica	72.94
Covarianza	78.82
Pensamiento relacional	83.53
Parte-todo	91.77

La tarea más difícil fue la relacionada con la componente operador (tarea 3) (2.35%). Los EPM justificaban que si se había reducido ¾, faltaba ¼ para tener el tamaño original o bien que había que aumentar lo mismo mostrando una aproximación aditiva errónea en vez de multiplicativa. La siguiente tarea en nivel de dificultad fue la relacionada con el razonamiento “up and down” (tarea 10) (9.41%). Los EPM no la resolvieron o aplicaron argumentos sin sentido dado que no reconocieron la unidad. Respecto a la tarea relacionada con la componente medida-densidad (tarea 6) (17.65%) muchos EPM la dejaron en blanco y otros comentaron que no cabían más fracciones entre estas dos en lugar de buscar otras equivalentes con denominador mayor. En la tarea de valor perdido no proporcional (tarea 12) (24.71%) la mayoría de los EPM la resolvieron aplicando de manera errónea estrategias proporcionales como la regla de tres. En la tarea correspondiente a la componente razón (tarea 2) (30.59%) muchos de los EPM escribieron la relación parte-todo en lugar de parte-parte mostrando la dificultad adicional que genera la relación parte-parte. Finalmente, en la tarea relativa al proceso "unitizing" (tarea 7) (32.94%) los EPM no realizaron ninguna operación, razonando de forma cualitativa que una caja era más barata porque contenía más kg en lugar de identificar las razones y compararlas. Estos resultados muestran las dificultades de los EPM en la identificación de las razones como "unidad" y su carácter multiplicativo (operador y "unitizing") y en el reconocimiento de la unidad en contextos de medida con el significado parte-todo (razonamiento "up and down").

Perfiles en el conocimiento de matemáticas especializado

El análisis cluster agrupó al 78% de los EPM en 5 grupos (66 de los 85 participantes). La tabla 2 muestra las componentes del razonamiento proporcional en las que los diferentes grupos actuaron de forma correcta en más del 90% de los casos. Teniendo en cuenta cómo fueron agrupados los EPM, hay cuatro componentes de conocimiento y formas de razonar que no discriminan. En primer lugar, la componente parte-todo ya que forma parte de todos los grupos. En segundo lugar, las componentes operador, razonamiento "up and down" y la identificación de situaciones no proporcionales tampoco discriminan ya que no aparecen en ningún grupo con un nivel de éxito mayor del 90%. Estas tres componentes que no aparecen en ningún grupo se convierten en las referencias a las que debe aspirar el desarrollo del conocimiento especializado de contenido matemático en el ámbito del razonamiento proporcional según el análisis teórico previo.

Tabla 2 - Identificación de cinco grupos de estudiantes para maestro de primaria

	Grupo 1 N=26	Grupo 2 N=16	Grupo 3 N=14	Grupo 4 N=6	Grupo 5 N=4
Parte-todo	X	X	X	X	X
Razón			X		X
Operador					
Medida-Recta numérica		X			X
Cociente			X	X	X
Medida-densidad				X	X
Proceso "unitizing"					X
Pensamiento relacional	X		X		X
Covarianza	X			X	X
Razonamiento "up & down"					
Valor perdido proporcional		X		X	X
Valor perdido no proporcional					

Los resultados muestran cuatro perfiles en el comportamiento de los EPM: aproximación cualitativa caracterizada por las componentes pensamiento relacional y covarianza (Grupo 1), aproximación centrada en el cálculo que se evidencia en la resolución del problema proporcional de valor perdido a partir del algoritmo de la regla de tres en la mayoría de los casos (Grupo2), aproximación centrada en los significados de la idea de fracción (relación entre número de partes y el tamaño de las partes, situar fracciones entre dos fracciones en contexto parte-todo, razón, cociente, medida-densidad) (Grupo 3), y, por último, aproximaciones centradas en la integración paulatina de las componentes del razonamiento proporcional (razón, medida-densidad, razonamiento "unitizing" y covarianza) (Grupos 4 y 5). La idea de considerar el Grupo 4 y 5 en el mismo perfil se apoya en que, en cierta medida, el comportamiento de los EPM en el Grupo 5 complementa el desarrollo inicial de la componente del razonamiento proporcional puesto de manifiesto en los comportamientos del Grupo 4.

DISCUSIÓN

Este estudio se ha centrado en examinar el conocimiento especializado de contenido matemático de un grupo de EPM en el ámbito del razonamiento proporcional integrando las interpretaciones del número racional (significados de los objetos matemáticos) y las formas de razonar con estos significados: pensamiento relacional, covarianza, y en el reconocimiento de la unidad en contextos de medida con el significado parte-todo (razonamiento "up and down"), el proceso de generar unidades contables que implica la construcción de una unidad de referencia a partir de la relación entre las cantidades y usar esta nueva unidad para contar ("unitizing"), la resolución de situaciones proporcionales de valor perdido y la identificación de situaciones no proporcionales. Los resultados muestran que los EPM tienen un conocimiento especializado sobre el razonamiento proporcional limitado puesto de manifiesto por la dificultad en identificar situaciones no proporcionales, en reconocer la unidad en contextos de medida con el significado parte-todo y en manejar el significado multiplicativo de la idea de operador en contextos multiplicativos (estas tres componentes no aparecen en ninguno de los clusters). Estos resultados indican que estas tres componentes del conocimiento especializado de contenido matemático para la enseñanza del razonamiento proporcional constituyen referentes en su caracterización.

Una comprensión no adecuada de estas componentes del razonamiento proporcional limita el desarrollo de otras tareas de enseñanza y competencias como la competencia docente "mirar con sentido" el aprendizaje matemático de los estudiantes. La relación entre el conocimiento especializado de contenido matemático y la competencia docente "mirar con sentido" se muestra en investigaciones que examinan cómo los estudiantes para maestro identifican e interpretan la comprensión de los estudiantes de primaria sobre el razonamiento proporcional. Fernández, Llinares y Valls (2012) indican que cuando los estudiantes para maestro no eran capaces de discriminar situaciones proporcionales de las no proporcionales tenían dificultades en identificar si las estrategias utilizadas por los estudiantes de primaria eran correctas o no en diferentes situaciones proporcionales y no proporcionales.

Finalmente, la forma en la que se han constituido los diferentes clusters muestra, en cierta medida, las características que definen el desarrollo del conocimiento especializado de contenido matemático en el ámbito del razonamiento proporcional. El Grupo 1 se caracteriza porque los EPM razonaron de forma cualitativa y por tanto, estarían en una etapa inicial del desarrollo del razonamiento proporcional ya que éste se desarrolla desde el pensamiento cualitativo hasta el razonamiento multiplicativo (Behr et al., 1992). El Grupo 2 viene caracterizado por el cálculo. Los EPM de este grupo tienen una comprensión superficial de la idea de medida en el contexto de la recta numérica y se centran en la aplicación mecánica de la regla de tres en situaciones que se asumen de proporcionalidad. Los EPM que están en el Grupo 3 tienen adquirida las interpretaciones de la fracciones (a excepción de la interpretación como operador). Por último, los Grupos 4 y 5 muestran el inicio del desarrollo del razonamiento proporcional. Estos resultados indican que un alto porcentaje de EPM estarían en un nivel de razonamiento pre-proporcional centrado en las relaciones cualitativas (Valverde y Castro, 2009) o únicamente centrado en los significados de los números racionales o en reglas algorítmicas como la regla de tres, sin tener adquiridas las formas de razonar con estos significados.

RECONOCIMIENTOS

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyectos I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación. España. Y del Proyecto emergente GRE10-10 de la Universidad de Alicante. España.

REFERENCIAS

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM. The Journal of Mathematics Education, 44*(6), 747-759.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S.J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework. En F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-668). NCTM-Information Age Publishing, Charlotte, NC.

Livy, S. y Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development, 1*(2), 22-43.

Pitta-Pantazi,D. y Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(2), 149–169.

Rivas, M.A., Godino, J.D. y Castro, W.F. (2012) Desarrollo del conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros profesores de Primaria. *Bolema, 26*(42B), 559-588.

Sherin, M.G., Jacobs, V.R. y Philipp, A. (2010) (eds.). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.

Valverde, A. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González, J. Murillo (Eds.), *Actas del XIII Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática* (pp. 523-532). Santader: SEIEM y Universidad de Cantabri