PROBABILIDAD VS PORCENTAJE EN LA FORMULACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Probability vs Percentage in the formulation of conditional probability problems.

Joaquín Arnau y M. Pedro Huerta

Universitat de València

Resumen

En este trabajo mostramos los resultados de una investigación realizada con futuros profesores de matemáticas de educación secundaria en resolución de problemas de probabilidad condicional. En particular se comparan las dificultades de los problemas pertenecientes a dos conjuntos de problemas que difieren en el formato de expresión de la cantidad preguntada: probabilidad o porcentaje. Se constata la extrema dificultad que presentan estos problemas para los futuros profesores, dificultad que se ve incrementada con la inclusión del término probabilidad en el enunciado. Se informa además de que las dificultades aparecen ya en la fase de cálculos, en la que se hace patente la confusión entre la probabilidad condicional y la probabilidad conjunta.

Palabras clave: *Probabilidad condicional, Problemas ternarios, Resolución de problemas, Dificultades de los problemas, Profesores de matemáticas en formación.*

Abstract

In this piece of work we show the results of a research with pre-service mathematics teachers solving conditional probability problems. In particular, difficulties of problems from two sets are compared. Problems differ in the way questions are expressed, in terms of probabilities or percentages. Difficulties of problems increase if the word probability is used in formulating the question in problems. We also report that these difficulties already appear in previous steps before giving an answer to the question, as in the calculations phase, where the confusion between the conditional probability and the joint probability might usually appear.

Keywords: *Conditional probability, Ternary Problems, Problem solving, Problems difficulties, Pre-service secondary school teachers.*

INTRODUCCIÓN

En la investigación sobre resolución de problemas, uno de los aspectos por los que se han interesado los investigadores ha sido la búsqueda de posibles relaciones entre lo que Kulm (1979) llama variables de la tarea y la dificultad del problema (Lesh y Zawojewski, 2007, p. 766). Este interés no ha pasado inadvertido en la investigación sobre resolución de problemas de probabilidad condicional. Así, Carles et al. (2009) y Huerta et al. (2011) consideran distintas dificultades – ahora en plural – a lo largo del proceso de resolución, para tener una idea más amplia de dificultad del problema que la simple medida del éxito en la respuesta. Estos autores estudian la influencia que sobre ellas tiene la estructura de datos y el contexto en el que se formula el problema. Por otra parte, Huerta y Cerdán (2010) estudian la influencia que sobre las dificultades puede tener el enfoque con el que el resolutor aborda la resolución del mismo, lo que los autores llaman lecturas – aritmética o algebraica – y mundo – aritmético o probabilístico –, para estudiantes del máster de formación del profesorado de matemáticas. Díaz y De la Fuente (2007) y Contreras et al. (2010) investigan otro tipo de dificultades, la de los resolutores, en particular la de los futuros profesores de educación primaria en el uso de las tablas de doble entrada relacionadas con la lectura e interpretación de los datos y con el cálculo de probabilidades.

Arnau, J. y Huerta, M. P. (2013). Probabilidad vs Porcentaje en la formulación de problemas de probabilidad condicional. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 165-173). Bilbao: SEIEM

Este trabajo es una continuación de otros anteriores que exploran qué influencia puede tener las distintas variables de la tarea (en el sentido de Kulm, 1979) sobre las dificultades de los problemas y sobre el comportamiento de los resolutores (Carles et al., 2009; Huerta, et al, 2011). En particular, aquí investigamos el efecto de formular la pregunta del problema en términos de porcentajes o de "probabilidades", permaneciendo el resto de variables de la tarea constantes. Los problemas siguientes son estructuralmente isomorfos, definidos en el mismo contexto, pero difieren en la forma en la que se formula la pregunta.

Problema 4a: *En un instituto, el 26% de los estudiantes no aprueba ni matemáticas ni filosofía y un 4% aprueba filosofía pero no aprueba matemáticas. Se sabe también que de los estudiantes que aprueban matemáticas el 80% aprueba filosofía. Entre los estudiantes que aprueban filosofía, ¿qué porcentaje aprueba matemáticas?* (Amorós, 2012)

Problema 4b: *En un instituto, el 26% de los estudiantes no aprueba ni matemáticas ni filosofía y un 4% aprueba filosofía pero no aprueba matemáticas. Se sabe también que de los estudiantes que aprueban matemáticas el 80% aprueba filosofía. Si un estudiante ha aprobado filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado matemáticas?* (Arnau, 2012*)*

Además, se informa de la influencia que pueda tener una u otra formulación sobre el enfoque de la resolución, aunque los enunciados inviten a considerar el enfoque aritmético, en el caso del problema 4a (Amorós, 2012), antes que probabilístico, en el caso del problema 4b (Arnau, 2012).

En Huerta et al (2011), completado en Amorós (2012), se muestra como los problemas isomorfos a los del anexo, aunque formulados en porcentajes, presentaron dificultades elevadas a futuros profesores a pesar de su formulación. Así, por ejemplo, dependiendo del problema, entre un 59,3% y un 80,4% de estudiantes no llegan a dar una respuesta numérica correcta al problema. Intentamos aquí informar, aunque parcialmente, en dónde pueden recaer dichas dificultades.

Así pues, trabajando con una muestra de estudiantes que puede equipararse a la usada en el estudio de Amorós (2012) y con un cuestionario equivalente al que se usó allí, pero cuyos problemas se formulan en la versión de probabilidad, en este trabajo trataremos de dar respuesta fundamentalmente a dos preguntas:

1. ¿Qué influencia tiene, tanto en el enfoque de resolución como en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional, formular la pregunta usando la palabra "probabilidad" frente a formularla usando otros formatos, como el porcentaje?

2. ¿Es posible identificar en los cálculos intermedios y finales el origen de las dificultades de los problemas de probabilidad condicional?

MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

Los problemas a los que nos referimos en este trabajo son los que Cerdán y Huerta (2007) llaman problemas ternarios de probabilidad condicional, en los que se implican a dos sucesos básicos y a sus respectivos complementarios (Huerta, 2009). Son problemas escolares (Lonjedo, Huerta y Carles, 2012), de enunciado verbal, formulados con tres cantidades conocidas y una desconocida por la que se pregunta. Una, al menos, de estas cantidades se corresponde con una probabilidad condicional.

Lo que es característico de estos problemas, y pertinente decir aquí, es que es posible hallar una solución a cualquiera de estos problemas mediante el empleo de relaciones ternarias, al menos teóricamente. Éstas pueden ser de dos tipos: aditivas, como por ejemplo: $P(A) + P(\bar{A})=1$, $P(A|B) + P(\bar{A}|B)=1$ y $P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B) = P(B)$ $p\ A\ + p\ A\ = 1$; y multiplicativas, directamente relacionada con la definición de probabilidad condicionada, como esta: $P(A|B) \times P(B) = P(A\cap B)$$p(A\ B\ \times p\ B\ = p(A \cap B)$.

Una resolución de un problema puede verse como un entretejido de relaciones ternarias entre cantidades conocidas y desconocidas como las descritas. Dependiendo de si, para dar respuesta al problema, basta o no con las cantidades conocidas disponibles en el enunciado, o si, por el contrario, hay que sobredimensionarlo introduciendo cantidades desconocidas como incógnitas, el entretejido lo calificamos de aritmético o algebraico, respectivamente. Decimos entonces que un problema tiene una lectura teórica aritmética si es posible resolverlo mediante un entretejido de relaciones aritmético. En caso contrario, decimos que tiene una lectura teórica algebraica. La complejidad teórica de un problema puede entonces asociarse con la complejidad de la red teórica de relaciones ternarias requeridas para su resolución constituida por el menor número de dichas relaciones. La dificultad de un problema, en cambio, se define en función de lo que los resolutores hacen al resolver el problema (por ejemplo, la razón entre el número de aquellos que no llegan a dar una respuesta de entre los que lo abordan, nos da una idea de la dificultad de contestar a la pregunta planteada). La complejidad de un problema es teórica mientras que su dificultad es experimental y calculada.

En la investigación en resolución de problemas se suelen distinguir un conjunto de variables independientes o de la tarea del conjunto de variables dependientes sobre el que las primeras pueden ejercer algún tipo de influencia (Kulm, 1979). En este trabajo las variables independientes que se consideran son la variable de la estructura, cuyos valores vienen dados por la familia a la que pertenece cada problema, la variable del contexto en el que se ha formulado cada problema y la variable del formato en el que se ha expresado las cantidades conocidas y desconocidas, porcentajes para unas y para otras en Amorós (2012) y porcentajes para las cantidades conocidas y probabilidades para las desconocidas en Arnau (2012). En este sentido, las cantidades se consideran ternas (x, S, f) en las que x es un número, S es la proposición que describe a x (abusando del leguaje decimos que x mide a S) y f el formato de expresión para las cantidades, que en los problemas de probabilidad pueden ser frecuencias, porcentajes o razones y probabilidades en el intervalo [0, 1].

Esta idea de cantidad es especialmente relevante para el análisis de las dificultades que tiene cada problema de ser respondido correctamente, dificultades que calculamos mediante la consideración y comparación de variables dependientes que relacionan el número de estudiantes que lo abordan (ABORDADOS), con el número de estudiantes que emiten una respuesta (RESULTADO), del tipo que sea, con el número de estudiantes que dan como respuesta un número correcto (NÚMERO), con el número de estudiantes que dan una descripción correcta de la respuesta (DRESC), que hemos distinguido en descripción correcta e incorrecta. Estas variables nos permiten medir, respectivamente, las dificultades siguientes: apreciada (DAP), del problema (DP), de la solución del problema (DPS) y de la descripción correcta (DDRESC). Todas las medidas se expresan en porcentajes, siendo la dificultad máxima 100 y la dificultad mínima 0 (para más detalles ver, por ejemplo, Carles et al (2009) o Huerta et al. (2011).

METODOLOGÍA

La muestra de resolutores la forman 39 estudiantes del Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria en la Universitat de València. Predominan aquéllos con Licenciatura en Matemáticas pero son minoritarios respecto de la suma del resto de titulaciones (Tabla 1).

Mientras que a los estudiantes graduados en Matemáticas se les supone una formación básica y completa en probabilidades y estadística, a los estudiantes de otras titulaciones se les solicita acreditar dicha formación con un mínimo número de créditos en sus respectivos planes de estudio. Por ello suponemos a toda la muestra participante en esta investigación lo suficientemente preparada en matemáticas para abordar problemas escolares de probabilidad condicional como los presentados y no requerir inicialmente enseñanza específica en este tema.

Tabla 1: **Muestra de estudiantes según su titulación.**

Titulación de acceso	F	%
Licenciados en matemáticas	16	41’0
Ingenieros	8	20’5
Arquitectos	12	30’8
Otros (no identificados)	3	7’7
Total	39	100

Los estudiantes resolvieron un cuestionario formado por 7 problemas (anexo), escogidos de tal manera que fueran lo suficientemente representativos de las diferentes complejidades que pueden presentarse en esta familia de problemas (Huerta, 2009) y que están determinadas, básicamente, por el número de probabilidades condicionadas presentes en su enunciado, por sus lecturas analíticas teóricas asociadas (aritméticas o algebraicas) y por la complejidad de la red teórica de relaciones entre las cantidades. El tiempo para completarlo no fue un obstáculo, disponiendo de tiempo suficiente con un máximo de 2 horas.

Las resoluciones escritas se analizan siguiendo el esquema de codificación que proponen Huerta, et al. (2013) y que es usado en las investigaciones anteriores ya referidas en este trabajo.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

En la tabla siguiente (Tabla 2), mostramos los valores que toman las dificultades en cada una de las investigaciones. A la izquierda, la pregunta es un porcentaje (Amorós, 2012); a la derecha, una probabilidad (Arnau 2012).

Tabla 2: En gris, las dificultades por problema cuando se pregunta por un porcentaje. En blanco, esas mismas dificultades cuando se pregunta por una probabilidad.

Problema	DAP		DPR		DSP		DDRESC	
1	1,90	5,13	17	29,73	69,80	86,49	45,50	56,52
2	0	5,13	5,60	37,84	59,30	83,78	52,90	56,52
3	0	16,67	37	35,00	75,90	85,00	23,50	10,00
4	0	12,82	35,20	41,18	63	79,41	37,10	45,45
5	1,90	10,26	15,10	25,71	73,60	85,71	48,90	60,00
6	3,50	25,00	34,60	44,44	65,40	72,22	26,50	12,50
7	5,60	15,38	47,10	69,70	80,40	96,97	51,90	87,50
$\overline{X}$	1,84	12,91	27,37	40,51	69,63	84,23	40,90	46,93
σ	2,12	7,01	14,88	14,34	7,52	7,50	12,07	27,54

En general, e independientemente del problema del que se trate, aun con mínimas excepciones, los valores asociados a las dificultades de los problemas crecen si la palabra probabilidad está presente. También crecen los valores promedios de las dificultades, lo que nos permite comparar la dificultad de un cuestionario frente al otro.

En particular, problema a problema se observa un incremento en la dificultad apreciada y en la dificultad de la solución del problema. Es decir, por una parte, los estudiantes aprecian un mayor dificultad inicial en los problemas en los que la palabra probabilidad está presente y, por otra, al mismo tiempo, muestran una mayor dificultad a la hora de proporcionar una respuesta numéricamente correcta. Con el fin de apreciar si las diferencias son estadísticamente significativas, se realizó un contraste de estos valores mediante intervalos de confianza (Tabla 3), resultando que el incremento en los valores de DA es significativo para los problemas 3, 4 y 6, mientras que las diferencias en DSP son significativas en los problemas 1, 2 y 7. La dificultad de dar una respuesta (DPR) al problema crece significativamente en los problemas 2 y 7. Un examen más detallado de estas diferencias significativas debería ser llevado a cabo, relacionando qué variables de la tarea hacen que esto sea así.

Tabla 3: Intervalos de confianza para el contraste de los valores de las dificultades en ambos trabajos. Los intervalos resaltados indican que se rechaza la hipótesis nula y se puede afirmar que hay diferencias significativas.

Problema	DAP	DPR	DSP	DDRESC
1	[-0.11 , 0.5]	[-0.31 , 0.05]	[-0.33 , -0.001]	[-0.38 , 0.16]
2	[-0.12 , 0.02]	[-0.49 , -0.15]	[-0.42 , -0.07]	[-0.33 , 0.26]
3	[-0.28 , -0.05]	[-0.23 , 0.27]	[-0.28 , 0.10]	[-0.11 , 0.38]
4	[-0.23 , -0.02]	[-0.27 , 0.15]	[-0.35 , 0.02]	[-0.43 , 0.26]
5	[-0.19 , 0.02]	[-0.28 , 0.07]	[-0.29 , 0.04]	[-0.42 , 0.19]
6	[-0.36 , -0.07]	[-0.36 , 0.17]	[-0.31 , 0.18]	[-0.15 , 0.43]
7	[-0.23 , 0.03]	[-0.43 , -0.02]	[-0.29 , -0.04]	[-0.67 , -0.04]

Por otra parte, hemos realizado una comparación sobre el enfoque de la resolución de los problemas, cuyos resultados pueden verse en la Tabla 4:

Tabla 4 : Porcentaje de resoluciones ubicadas en el mundo teórico de la probabilidad en ambas investigaciones.

Problema	En porcentaje	En probabilidad
1	24,5	48,6
2	27,8	40,5
3	29,6	34,3
4	22,2	35,3
5	24,5	40,0
6	26,9	33,3
7	23,5	33,3

A pesar de apreciar un incremento, para todos los problemas, de un enfoque probabilístico de las resoluciones, observemos no obstante que en ningún caso éste supera el 50%, lo que indica que la mayoría de resolutores prefieren enfocar la resolución de los problemas en el propio contexto en que se formulan, sin que para ello necesiten realizar una traducción del problema original al mundo teórico de la probabilidad.

La razón podría estar en la diferente formación inicial de los resolutores. Para ello, consideramos de manera separada a los resolutores según provenían de una licenciatura en Matemáticas o de una titulación de Arquitectura o Ingenierías. Sin ningún tipo de hipótesis previa a favor de uno u otro grupo, nos preguntamos si la titulación universitaria tenía influencia en las dificultades de los problemas y en el enfoque – aritmético o probabilístico – que los resolutores daban a la resolución del problema. Los resultados sobre las dificultades no mostraron diferencias estadísticamente significativas, por lo que podemos decir que las dificultades de los problemas son, en general, comparables para ambas muestras de estudiantes, es decir, son igualmente "difíciles" para unos que para otros. Sin embargo, sí que observamos que los licenciados en matemáticas recurrían en mayor porcentaje al mundo teórico de la probabilidad (el 93,3% lo hizo así en al menos uno de los problemas), frente a los ingenieros y arquitectos que resolvían mayoritariamente los problemas en el propio contexto en que estaban formulados (el 64,7% no ubicó ninguna resolución en el mundo de la probabilidad).

En nuestro segundo objetivo de investigación nos proponemos identificar en los cálculos intermedios y finales el origen de las elevadas dificultades de estos problemas. Para ello, hemos analizado de qué naturaleza son las relaciones entre cantidades usadas por los resolutores en la fase de cálculo. Hemos identificado siete tipos o géneros de relaciones aditivas, y un tipo de relación multiplicativa. La Tabla 5 recoge un representante de cada tipo de relación.

Tabla 5: Géneros de relaciones usadas por los estudiantes al resolver los problemas

	Género	Representante
Relaciones aditivas	g1	$P(A) + P(\bar{A})=1$
	g2	$P(A\|B) + P(\bar{A}\|B)=1$
	g3	$P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B) = P(B)$
	g4	$P(A\cup B) =P(A) + P(\bar{A}\cap B)$
	g5	$P(A\cup B) + P(\bar{A}\cap \bar{B}) = 1$
	g6	$P(A\cup B) =P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
	g7	$P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B) + P(A\cap \bar{B}) + P(\bar{A}\cap \bar{B}) = 1$
Relaciones multiplicativas (RM)		$P(A\|B) \times P(B) = P(A\cap B)$

La tabla 6, por su parte, muestra la frecuencia de uso y de error de los diferentes tipos de relaciones empleadas para cada problema.

Tabla 6: Distribución de las frecuencias de uso (F) y de error (e) de los distintos géneros de relaciones usadas en los problemas del cuestionario.

	g_1		g_2		g_3		g_4		g_5		g_6		g_7		RM	
Problema	F	e	F	e	F	e	F	e	F	e	F	e	F	e	F	e
1	18	0	5	2	19	4	2	0	10	1	3	0	0	0	30	18
2	37	3	38	1	23	11	0	0	0	0	0	0	0	0	64	17
3	17	0	44	2	31	12	0	0	0	0	0	0	0	0	42	12
4	12	0	4	0	29	2	7	1	13	2	1	0	1	0	40	18
5	18	2	19	0	21	5	1	0	0	0	1	0	0	0	60	12
6	9	1	22	5	16	3	1	1	2	1	0	0	1	1	25	3
7	14	1	18	2	14	5	0	0	2	2	1	1	0	0	52	13
Total:	125	7	150	12	153	42	11	2	27	6	6	1	2	1	313	93

Podemos observar que, de una parte, el 89,9% de las relaciones aditivas usadas corresponde a los tipos de relaciones g_1, g_2 y g_3, suficientes para resolver cualquiera de los problemas; pero, de otra, un no despreciable 10,1% se corresponden con relaciones aditivas que, o bien no son ternarias, o bien involucran a la unión de sucesos, como es el caso de las relaciones g_4, $g_5 g_4, g_5$ y $g_6 g_6$. En la Tabla 6 se aprecia que la presencia de éstas ocurre, principalmente, para los Problemas 1, a continuación, y 4 (ver introducción):

Problema 1: *El 20% de los ciudadanos se vacunan para prevenir el contagio de la gripe común. Por otra parte, el 15% de los ciudadanos contrae la gripe común y un 70% ni se vacuna ni contrae la gripe común. Si un ciudadano se vacuna, ¿qué probabilidad tiene de contraer la gripe común?*

Estos problemas son, precisamente, los únicos del cuestionario en los que una cantidad conocida es interpretable como la probabilidad conjunta $\bar{A}\cap \bar{B}$. $A \cap B$Esta forma de presentar la cantidad en los enunciados lleva a algunos resolutores a considerar el suceso contrario, $A\cup B A \cup B$, y calcular su probabilidad mediante la relación g_5, $P(A\cup B) + P(\bar{A}\cap \bar{B}) = 1 P\ A \cup B\ + P\ A \cap B\ = 1$, como ilustran los siguientes fragmentos de resoluciones (Figura 1), para, a continuación, hallar otras cantidades intermedias mediante el uso de relaciones que implican a esta unión de sucesos. Vemos así como variables de tipo semántico pueden ejercer su influencia en los resolutores sobre la elección de la relación pertinente entre cantidades.

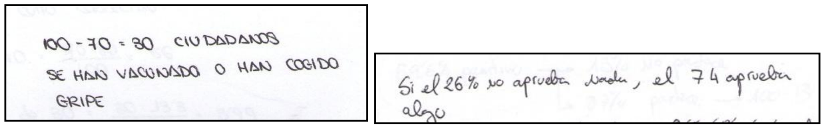

Figura 1: Fragmentos de resoluciones por parte de estudiantes diferentes de los problemas 1 y 4.

Por otra parte (Tabla 6), el mayor porcentaje de error en el uso de las relaciones ocurre con las relaciones multiplicativas (29,7%) y las aditivas de género g_3, (27,5%). La siguiente resolución del problema 4 (Figura 2) es representativa de un error frecuente entre los estudiantes de nuestra muestra). La cantidad que es ofrecida como respuesta al problema, 56%, corresponde a la intersección de sucesos “aprobar matemáticas” y “aprobar filosofía”, pero no a la probabilidad condicionada de “haber aprobado matemáticas si el estudiante ha aprobado filosofía” (Figura 2). Esta interpretación equivocada de una probabilidad condicionada por una probabilidad conjunta o de la intersección resulta ser una fuente habitual de error para los estudiantes de nuestra muestra, observación que coincide con otras investigaciones (ver por ejemplo, Borovcnik, 2012 y Estrada, Díaz y De la Fuente, 2006) a pesar de realizarse en contexto diferentes. Recíprocamente, también se dan casos de interpretación de una probabilidad conjunta por una condicionada (Arnau, 2012), dando lugar a usos inadecuados de la relación aditiva en la que esta está implicada (g_3).

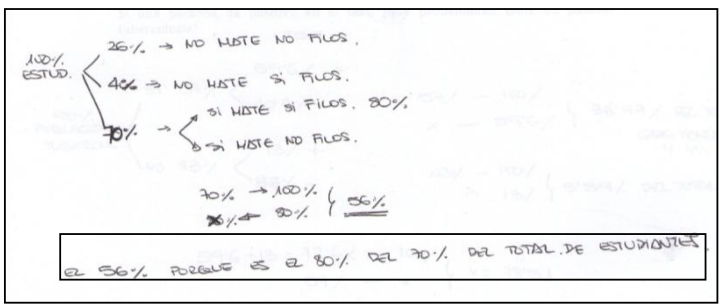

Figura 2: Resolución del problema 4 en la que existe error en el uso de una relación multiplicativa.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos mostrado cómo la inclusión de la palabra “probabilidad” ha supuesto, en líneas generales, un incremento en las dificultades de los problemas. También ha influido, aunque moderadamente, en el enfoque que los resolutores dan a sus resoluciones. Así, aumenta el número de resoluciones ubicadas en el mundo de la probabilidad, aunque siguen siendo mayoría los resolutores que no lo hacen así.

Al explorar con algún detalle la tipología de relaciones entre cantidades usadas en las resoluciones, encontramos que algunos estudiantes utilizan relaciones que no son las teóricamente previstas y que involucran a la unión de sucesos. El uso de éstas puede estar relacionado con otros aspectos de tipo semántico del texto del problema, lo que nos lleva a sugerir para el futuro el estudio con detalle de la influencia que este tipo de variables pueden tener en el proceso de resolución. Por otro lado, la elevada frecuencia de uso incorrecto de relaciones multiplicativas, y de un tipo concreto de relaciones aditivas en las que está presente la probabilidad conjunta, ha revelado que los resolutores tienen dificultades a la hora de identificar y distinguir correctamente las probabilidades condicionales de las conjuntas, lo que ha sido fuente de errores. Otra vez, aquí, el lenguaje puede ser una fuente no despreciable de dificultades para los resolutores.

Tratándose de futuros profesores de matemáticas, estos resultados son preocupantes. Una buena formación en matemáticas, por sí sola, no es garantía de éxito ni de ausencia de dificultades en la resolución de problemas como los que hemos usado en esta investigación. Los resultados que hemos mostrado aquí invitan, pues, cuanto menos a la reflexión, poniendo de manifiesto, una vez más, la necesidad de una adecuada formación en resolución de problemas de probabilidad condicional en todos los niveles.

REFERENCIAS

Amorós, R. (2012). *Un ejemplo de análisis de datos mediante la inferencia bayesiana en resolución de problemas de probabilidad condicionada*. Memoria de investigación. Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València.

Arnau, J. (2012). *Un estudio exploratorio de la resolución de problemas de probabilidad condicional centrado en la fase de cálculo*. Memoria de investigación. Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 5-27.

Carles, M., Cerdán, F., Huerta, M. P., Lonjedo, Mª A. y Edo, P. (2009). Influencia de la estructura y el contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel N_0. Un estudio exploratorio con estudiantes sin enseñanza previa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, (pp. 173-185). Santander: SEIEM.

Cerdán, F. y Huerta, M. P. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*, 19 (1), 27-62.

Contreras, J.M., Estrada, A., Díaz, C. y Batanero, C. (2010). Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 271-280). Lleida: SEIEM.

Diaz, C. y De la Fuente, I. (2007). Assessing students' difficulties with conditional probability and Bayesian Reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2, 3, pp. 128-143.

Estrada, A., Díaz, C. y De la Fuente, I. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.) *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* (pp. 277-284). Huesca: SEIEM.

Huerta, M. P. (2009). On Conditional Probability Problem Solving Research —Structures and Context. En M. Borovcnik y R. Kapadia (2009), Special issue on "Research and Developments in Probability Education". *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4 (3), 163-194.

Huerta, M. P. y Cerdán, F. (2010). El cálculo de probabilidades en la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 353-364). Lleida: SEIEM.

Huerta, M. P., Cerdán, F., Lonjedo, Mª. A. y Edo, P. (2011). Assessing difficulties of conditional probability problems. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 807-817. University of Rzeszów, Poland.

Huerta, M. P., Edo, P., Amorós, R. y Arnau, J. (2013). Un esquema de codificación para el análisis de resoluciones de los problemas de probabilidad condicional. (En ejecución)

Kulm, G. (1979). The classification of Problem-Solving Research Variables. In G. A. Golding & C. E. McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving*, 1-22. ERIC.

Lesh, R. y Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester, Jr. (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763-804). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lonjedo, Mª A., Huerta, M. P. y Carles, M. (2012). Conditional probability problems in textbooks: An example from Spain. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15, 3, 319-338.

ANEXO.

Problema 2: El 70% de las piezas manufacturadas en una fábrica son correctas. De las piezas que son correctas, un dispositivo detecta como correctas el 80% y de las defectuosas, el dispositivo detecta como correctas el 13.3%. Si el dispositivo detecta una pieza como defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que dicha pieza sea correcta?

Problema 3: De las chicas del instituto, el 37.5% usa gafas. De los chicos, el 28.6% usa gafas. De los que no usan gafas, el 50% son chicos. Si se escoge a un estudiante al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea chica?

Problema 5: Una población de riesgo de sufrir tuberculosis se somete al test de la tuberculina. Diferentes estudios muestran que el 57% de dicha población padece de tuberculosis y que de los que padecen la tuberculosis el 59.6% dan positivo en el test. Además se sabe que un 13% no padece tuberculosis pero da positivo en el test. Si una persona da positivo en el test, ¿qué probabilidad tiene de padecer tuberculosis?

Problema 6: Una encuesta entre los ciudadanos que son lectores diarios u ocasionales de periódicos da como resultado que un 14% leen diariamente los periódicos pero no leen el periódico El País. De los que leen diariamente el 80% leen El País y de los que leen ocasionalmente el 86% no leen el País. ¿Qué probabilidad hay de que un ciudadano, lector diario u ocasional de periódicos, lea el periódico El País?

Problema 7: Una población sufre una infección en los ojos. De ellos, el 42% son tratados con un antibiótico nuevo experimental. Los resultados muestran que de los tratados con el antibiótico el 83.3% se han curado y que de las personas que no se han curado el 14.9% se han tratado con el antibiótico. Si una persona se ha curado, ¿qué probabilidad hay de que no se haya tratado con el antibiótico nuevo?