El uso Inadecuado de Conceptos Matemáticos en las Escuelas de Ingeniería

Alejandro Muñoz
UPIBI, Instituto Politécnico Nacional
México
amunoz@acei.upibi.ipn.mx
Formación de Profesores - Nivel superior

Resumen

Se examina el efecto que tiene el uso inadecuado de conceptos de Matemáticas en una escuela de Ingeniería. Se abordan varios ejemplos de este uso inadecuado y como la falta de comprensión total o parcial de un concepto puede llevar a resultados parciales o equivocados, incluso a que el alumno no pueda abordar adecuadamente la resolución de un problema. En este trabajo sólo se ilustrará el tema con el uso que los alumnos de ingeniería hacen del concepto de infinito. El efecto más frecuente del uso inadecuado del concepto matemático es la elección de los caminos más difíciles para resolver los problemas o bien el dar respuestas simplistas que no tienen nada que ver con la verdadera solución. Se concluye que el uso inadecuado del concepto viene del poco énfasis que se da al aspecto formativo de la matemática porque sólo se le toma como una herramienta de trabajo.

Introducción

En la Física se usan extensivamente conceptos originados en la Matemática, la cual es herramienta fundamental tanto de la Física como de la Ingeniería. Sin embargo, existen conceptos que se usan en forma inadecuada, en parte porque no hay un entendimiento completo de los mismos, porque son conceptos difíciles de enseñar para los profesores o porque en los textos no se les da la importancia que merecen o bien suponen que el alumno entenderá sin mayor explicación la aplicación de tal concepto. En el caso de la enseñanza de la Física para los futuros ingenieros, lo anterior puede llegar a ser crítico, porque se ha insistido demasiado solamente en los aspectos herramentales o aplicativos de la Matemática, como si únicamente fuera importante la aplicación del concepto *per se*, sin preocuparse por entender el significado.

En este trabajo se analiza solamente un caso que trata de ilustrar las ideas anteriores, se trata del manejo que se hace del concepto de infinito en la enseñanza de la Física en las escuelas de Ingeniería. Se tiende a usar el concepto de infinito como sinónimo de otras ideas que tienen que ver con comportamientos asintóticos, con variables que crecen mucho o bien que tienden a cero o cuando una variable es mucho mayor (>>) que otra. Cuando el alumno encuentra que alguna variable Física tiende a infinito piensa que el trabajo está terminado, no hay nada más que hacer ni nada más que pensar acerca del problema. Sin embargo, cuando el alumno da como respuesta “infinito” a alguna pregunta, muchas veces no ha meditado bien las implicaciones de esta respuesta, y es frecuente que realmente no haya entendido bien el problema e incluso que no esté dispuesto a hacer algún experimento porque considera que la respuesta es obvia, porque: ¿Para qué molestarse en hacer el experimento si ya se sabe que la respuesta es “infinito”? Sería perder el tiempo. Cuando el alumno de ingeniería observa el símbolo de infinito en una expresión matemática que sirve para obtener los valores numéricos de una variable física, usualmente se desconcierta, esos problemas son los que los alumnos muchas veces no resuelven y el docente tampoco, son los que al final de la clase siempre quedan como ejercicio para realizar en casa.

Desarrollo del tema

Para ilustrar las ideas anteriores, se describirán algunas experiencias que alrededor del concepto de infinito el autor ha recopilado en clases de Física para alumnos de nivel superior en las carreras de Ingeniería.

Cuando a los alumnos se les pregunta: ¿Cuántos dobleces sucesivos a la mitad se pueden realizar en una hoja de papel? La respuesta usual (no generalizada) es que es muy grande, que es "infinito". Sin embargo, basta tomar una hoja de papel común y hacer el experimento para convencerse de que solamente pueden hacerse unos cuantos dobleces. No faltará el alumno que trate de conseguir una hoja de papel más delgado o bien más grande para mostrar que se puede hacer una cantidad mucho más grande de dobleces, al no lograrlo probablemente sugieran que si tuvieran un papel "infinitamente delgado" e "infinitamente grande" su respuesta de un número infinito de dobleces sería correcta, lo cual es cierto, pero conseguir un papel "infinitamente delgado" en la realidad no es posible, lo que sugiere que el alumno no entiende bien no solamente el concepto de infinito sino también otros conceptos. Lo importante de la experiencia es que la mayoría de los estudiantes se convencen que la respuesta de un número "infinito" de dobleces es una respuesta superficial y que dar una respuesta más adecuada requiere mayor esfuerzo, la realización del experimento ayuda a que el alumno pueda dar una mejor respuesta. Usando papeles de diferentes espesores se puede hacer que el alumno entienda mejor el concepto de límite, pero aunque en la mente del alumno parece que el número de dobleces es infinito, es importante que el alumno no pierda el contacto con la realidad, por ello, el experimento no debe dejar de hacerse.

Entender bien los conceptos, en este caso el de infinito, puede ayudar también a diseñar experimentos, como se ilustra en la siguiente experiencia.

Si se carga un capacitor de capacitancia C conectado en serie a un resistor de resistencia R usando una fuente de voltaje V_m entonces es fácil mostrar que el voltaje V en el capacitor varía en el tiempo de acuerdo con [1]:

$$V(t) = V_m(1 - e^{-t/\tau})$$

donde $\tau = RC$ es la constante de tiempo del circuito. Se consideró que inicialmente el voltaje en el capacitor era cero. Una vez que el capacitor está cargado se retira la fuente y el resistor se conecta directamente al capacitor, en este caso se dice que el capacitor se descarga a través del resistor y el voltaje en el capacitor está dado por:

$$V(t) = V_m e^{-t/\tau}$$

En esta experiencia se les proporciona a los alumnos capacitores y resistores con una gama amplia de valores comerciales, una fuente de voltaje, un voltímetro y un cronómetro ambos analógicos y cables para armar un circuito, se les pide que carguen el capacitor y que después al quitar la fuente conecten el resistor con el capacitor, en ambos casos (carga y descarga) el voltímetro está conectado al capacitor. El alumno tiene que obtener experimentalmente las curvas de carga y de descarga obteniendo valores de voltaje en el capacitor a diferentes tiempos, y luego graficar el voltaje del capacitor en el eje de las ordenadas y el tiempo en el eje de las abscisas [2].

Experimentos como este se hacen en prácticamente todos los laboratorios de Física en las escuelas de Ingeniería, la única diferencia es que en este caso el alumno debe seleccionar los valores del resistor y capacitor que usará, en principio la mayoría de los alumnos simplemente toman el primer par resistor-capacitor que se les ocurre y conectan. Sin embargo, el problema se presenta al medir el tiempo. Pongamos por ejemplo el caso de la descarga, si se observa la ecuación para el voltaje del capacitor en el caso de la descarga, el alumno sabe que inicialmente ($t = 0$) el voltaje en el capacitor es máximo y luego decrece, sabe también que cuando el tiempo tiende a infinito el valor del voltaje en el capacitor debe tender a cero. Pero, al comparar sus resultados con los demás compañeros que hacen el experimento, observa diferentes comportamientos en el voltímetro: a veces la aguja se mueve tan rápidamente que es prácticamente imposible tomar ninguna lectura; otras veces aunque si se puede tomar algunas lecturas la aguja se mueve tan rápido que en algunos segundos la aguja marca cero; otras veces la aguja parece comportarse como piensa el alumno, la aguja se mueve muy lentamente y parece que tardará mucho en llegar a cero.

Esto le lleva a examinar sus ideas, por un lado la teoría dice que cuando $t \rightarrow 0$, $V_m \rightarrow 0$, pero los resultados del experimento parece que muestran resultados en algunos casos diferentes. Cuando el docente les pide que usen la expresión para V considerando $V_m = 10$ volts y los valores de R y C para calcular el voltaje a diferentes tiempos (por ejemplo con una precisión de cuatro cifras), los alumnos obtienen resultados como estos:

		Voltaje en el capacitor (V)				
R	C	t=1 s	t=5 s	t=10 s	t=100 s	t=1000 s
1 KΩ	F	0	0	0	0	0
1 KΩ	F	3.6787	0.0067	0.0067	0	0
10 KΩ	$1x10^{-3}$ F	9.0483	6.0653	3.6788	0.4540	0
1 MΩ	$1x10^{-4}$ F	9.9004	9.5123	9.0483	3.6788	0.4540
1 MΩ	$1x10^{-3}$ F	9.9900	9.9501	9.9004	9.0484	3.6788

Al hacer los cálculos el alumno entiende la importancia de la constante $\tau = RC$, porque si esta constante es muy pequeña obtiene valores muy cercanos a cero; si por otro lado, su valor es muy grande, obtiene pocas variaciones en el voltaje, de tal manera que tendría que esperar un tiempo muy grande para obtener la curva de descarga.

Al mismo tiempo el alumno entiende la importancia del medidor, porque si fuera posible tener un medidor extremadamente sensible (y digital) entonces en los renglones que tienen un cero aparecerían valores muy pequeños, pero diferentes de cero. Si se cuenta con un osciloscopio de los más sensibles entonces pueden usarse prácticamente cualesquiera de los valores de resistencia y capacitancia disponibles.

En muchos problemas de aplicación de Física la idea de que una variable tiende al infinito debe de enseñarse en forma diferente, debe de interpretarse como que la variable es lo suficientemente grande con respecto a otra variable, de tal manera que al comparar una con la otra la segunda puede ser despreciada con respecto a la primera.

Algo muy parecido sucede con el problema de enfriamiento en su modelo más sencillo conocido como ley de enfriamiento de Newton. Cuando se enfría algo, el alumno aprende que según la expresión matemática hace falta un tiempo infinito para que la temperatura del café sea igual a la temperatura ambiente, pero nuestra experiencia y el experimento nos dicen que esto se realiza más bien en un tiempo lo suficientemente grande para que no seamos capaces de notar la diferencia, sea con el tacto o con un termómetro [3].

Por ello, el hecho de que el tiempo tienda a infinito en el circuito RC, debería entenderse como que el tiempo es muy grande en comparación con τ, y esta interpretación es muy importante cuando se encuentran problemas físicos en donde se usa el concepto de infinito, tómense como ejemplo los dos problemas siguientes:

En un libro muy usado en las escuelas de Ingeniería [4], se pide al alumno que calcule la distribución de temperatura de estado estacionario en una placa semi-infinita, algunos alumnos a los que se les ha planteado este problema han manifestado su desacuerdo porque dicen que las aplicaciones deben ser más realistas, es decir, obviamente no existen placas semi-infinitas, y si no existen, ¿para qué resolver problemas como este?. Desde luego que se les puede responder que el problema de la placa finita es más complicado y que se abordará después y que resolver el problema de la placa finita es un entrenamiento para cuando se resuelva el problema más complejo, pero la respuesta debe ser en el sentido de que la longitud de la placa es mucho mayor que el ancho de la misma por lo que para propósitos prácticos se pude considerar infinita, por ello debe aclarársele al alumno que los resultados que obtenga si se pueden aplicar cuando éstas condiciones se cumplan.

En otro problema de un libro también muy usado en los cursos de Física en las escuelas de Ingeniería [5] hay muchos problemas de aplicación en donde los conceptos anteriores se explican con bastante precisión, por ejemplo se considera un anillo delgado de radio R en el que existe una densidad lineal de carga uniforme λ en toda su circunferencia y se pide calcular el campo eléctrico en un punto P, a una distancia z del plano del anillo a lo largo de su eje central, el cual se encuentra que es:

$$E_z = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Si se pide al alumno que diga cual sería el valor del campo eléctrico en los puntos muy alejados del anillo, una respuesta muy superficial sería que como z tiende a infinito el campo es cero, esto es verdadero, pero la pregunta más bien se refiere a que $z >> R$, por lo cual lo más conveniente es despreciar el término R^2 con respecto a z^2, o sea z es mucho mayor que el radio R, en cuyo caso el resultado para el campo queda como:

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

Lo cual es la expresión para el campo de una carga puntual, efectivamente, a distancias muy grandes, el anillo aparecería como una carga puntual.

Entender bien éstos conceptos es importante no solamente para poder hacer aplicaciones y desarrollar o diseñar experimentos sino también para aprender a hacer cálculos que usualmente no se realizan aparentemente porque son tediosos cuando la razón principal es que no se entienden bien una serie de conceptos relacionados con el concepto de infinito. Tal como se verá en el siguiente ejemplo el uso de la computadora no resuelve el problema.

Si se considera una varilla metálica en la forma de un cilindro circular de radio unitario, si su longitud es mucho mayor que su radio entonces el cilindro se puede considerar de longitud infinita, si se supone que la superficie de la varilla se mantiene a 0º C y que inicialmente la temperatura en el interior de la varilla es de 100º C, entonces si se pide al alumno determinar la temperatura de la varilla en cualquier punto en cualquier tiempo, entonces se resolverá la ecuación de conducción calor en coordenadas cilíndricas para obtener como resultado que la temperatura está dada por [4]:

$$U(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200e^{-k\lambda_n^2 t}}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} J_0(\lambda_n r)$$

En la expresión anterior k es la difusividad del material, λ_n son las raíces positivas de la función Bessel de orden cero J_0, y J_1 es la función de Bessel de orden uno. Usualmente en este tipo de expresiones matemáticas no se realizan los cálculos porque son tediosos, pero tarde o temprano el ingeniero tendrá que hacer este tipo de cálculos o parecidos. Otra razón por la cual no se hacen los cálculos es porque no se sabe dónde cortar la serie infinita ya que es obvio que para poder dar algún valor de la temperatura habrá que evaluar la suma anterior con un número finito de términos. El procedimiento podría ser como sigue: Primero se encuentran (numéricamente o en tablas) las raíces λ_n de J_0, aunque el número de raíces es infinito una sencilla revisión de la expresión anterior convencerá al alumno de que el término exponencial se aproxima muy rápidamente a cero, por lo que tres o cuatro términos darán aproximaciones excelentes. Las expresiones para J_0 y J_1 se pueden obtener de la siguiente expresión con $n=0$ y $n=1$ respectivamente:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - ... \right\}$$

O sea que las expresiones de J_0 y J_1 son a su vez sumatorias con un número infinito de términos. No obstante, una vez que el alumno ha entendido lo anterior resulta que al proceder a hacer los cálculos notará que los términos son cada vez más pequeños, por lo que nuevamente se tiene que tomar la decisión de tomar unos cuantos términos, el número de términos estará determinado por la precisión que se requiera en el cálculo.

Por lo tanto, aunque la expresión exacta para la temperatura si es una sumatoria con un número infinito de términos, el alumno puede llegar a la conclusión de que no es necesario en este caso tomar una gran cantidad de términos, si este problema fuera una aplicación en la realidad tendría que calcular el número suficiente de términos para alcanzar la precisión que tiene su instrumento de medición, en este caso su termómetro, lo cual para la mayoría de los procesos industriales no va más allá de una décima de grado.

Otra actitud del alumno cuando se le pide que calcule la temperatura a partir de la expresión para $U(r,t)$ es usar la computadora, es decir, escribir un programa que evalúe la sumatoria, es común que el número de pasos del programa los escoja arbitrariamente, la tendencia es tomar un número de iteraciones grande (sugerido por el símbolo infinito de la sumatoria) para así asegurar que los cálculos tendrán la precisión adecuada. No obstante, al hacer esto probablemente se están calculando muchos términos que son muy pequeños y que hacen que el programa sea lento, por otro lado el alumno debería además de examinar si las series que evalúa de ese modo son convergentes, porque no siempre el tomar una gran cantidad de términos garantiza la convergencia [6].

Tal como puede observarse, si el alumno entiende bien el significado de infinito en los diferentes problemas a los que se enfrenta (sean o no de la Física), esto puede redundar en un mayor entendimiento del problema y por lo tanto en la simplificación del trabajo, desafortunadamente es muy común que se descuide el aspecto formativo de la matemática, incluso muchos profesores en las escuelas de ingeniería eligen los caminos más difíciles para resolver problemas debido a que ellos mismos no han entendido el concepto. Esto que se ha ilustrado con solo un concepto, el del infinito, puede mostrarse que se reproduce para muchos conceptos matemáticos de los cuales se hace uso inadecuado.

Conclusiones

Se han mostrado problemas de diferentes cursos de Física en los cuales es necesario que el alumno haga un uso adecuado del concepto de infinito y de lo que ese concepto significa en la Física. Entender bien el significado de infinito en cada problema particular ayuda al alumno a entender mejor el problema, pero también le ayuda a simplificar sus cálculos, a obtener resultados más precisos y le apoya también en la realización de experimentos. El uso inadecuado del concepto viene del poco énfasis que se pone en el aspecto formativo de la matemática y solamente tomar tales conceptos como herramientas.

La enseñanza de la Física enfrenta muchos problemas, para el alumno los problemas que el docente le plantea y le resuelve muchas veces no significan nada para él, una de las razones por las que esto es así, puede ser porque el docente hace uso de conceptos matemáticos sin dar mayor explicación, suponiendo que el alumno los comprende. El docente debe verificar que el alumno realmente entiende la parte conceptual de la matemática que está empleando y que no está haciendo un uso inadecuado de la misma, de lo contrario sucederá lo que se ha ilustrado en este trabajo con el concepto de infinito.

Referencias Bibliográficas

McKelvey, J. P. (1981). *Física para ciencias e ingeniería, Vol 2*. México: Harla.

Muñoz-Diosdado, A. y Gálvez-Coyt, G. (1999). *Manual de laboratorio de Física II*. México: UPIBI-IPN.

Zill, D. G. (1997). *A first course in differential equations with modeling applications*, (6th. ed.). USA: Brooks/Cole Publishing Company.

Spiegel, M. R. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. México: Prentice-Hall.

Resnick, R., Halliday, D. & Krane, K. S. (1994). *Física, Vol. 2*. México: CECSA.

Burden, K. L. y Faires, J. D. (1985). *Análisis numérico*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.