

Ingeniería Didáctica en Física-Matemática

Marta J. Marcolini

Universidad de Jaén, Departamento de Matemáticas

España

mmarcoli@ujaen.es

Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales – Superior

Resumen

El objetivo de esta investigación ha sido estudiar, utilizando la metodología de la ingeniería didáctica, las causas de las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial. Para ello hemos usado como soporte las Ciencias Experimentales. Buscamos dichas causas no sólo en las formas en que transmitimos el conocimiento sino fundamentalmente en la manera en que se articula el contenido que se enseña. Para ello hemos tratado de desarrollar en el alumno la idea de variación, que nos posibilite abordar con éxito la noción de predicción, noción ésta propia de las Ciencias Experimentales. La idea de variación, en el contexto de la Cinemática, se presenta a través de las derivadas sucesivas, considerándolas como una sucesión de derivadas. En el caso de la noción de predicción nuestra herramienta ha sido la serie de Taylor, siempre en el contexto de las Ciencias Experimentales.

Introducción

La noción de derivada no se constituye en objeto estable del saber en un primer curso de Cálculo. Nosotros hemos observado que los alumnos asimilan la técnica pero no reconocen, por ejemplo, las derivadas sucesivas como nuevas funciones. Esto ocurre por diversas causas entre las que podemos destacar:

- La falta de estudio y de análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos al cambio.
- El no haber logrado articular la noción de derivada con la noción de derivadas sucesivas.

Estas razones nos llevan a sostener que la derivada no se debe entender sólo como la primera derivada, sino que es algo que permite organizar las derivadas sucesivas, porque las nociones matemáticas no pueden reducirse a su definición. Esto es, debería entenderse a las derivadas no como un algoritmo ni una simple iteración, como suele ser considerada en la mayoría de los textos de Cálculo, sino como una “sucesión” de funciones donde cada una provee de información muy rica en significaciones, especialmente en el contexto de las Ciencias Experimentales. De esta manera, conjeturamos que sólo entonces adquieren significación propia los términos de la serie de Taylor. Así surge el concepto de función analítica, asociado con la noción de predicción, para predecir el estado ulterior de un sistema físico donde se conoce su estado inicial, que es la idea germinal (Cantoral, 2000).

Con esta idea proponemos discutir con cuidado el proceso de reconocimiento de la Matemática en los fenómenos físicos y no sólo aplicar la Matemática en la Física.

Objetivos

El objetivo general de este trabajo ha sido diseñar una ingeniería didáctica que permita estudiar las causas de las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial cuando se enseña a estudiantes universitarios de Ciencias e Ingeniería, buscando dichas causas no sólo en las formas en que se trasmite el conocimiento sino fundamentalmente en la manera en que se articula el contenido matemático que se enseña.

Los objetivos específicos que se plantean son los siguientes:

- a) Favorecer en el alumno el pensamiento y el lenguaje variacional que le posibilite abordar con éxito los problemas propios de las Ciencias Experimentales.
- b) Desarrollar en los estudiantes los mecanismos que permitan transitar desde la *predicción*, noción propia de las Ciencias Experimentales, a lo *analítico*, noción propia de las Matemáticas, utilizando para ello estrategias del pensamiento y del lenguaje variacional.

Para lograr estos objetivos se parte de los siguientes supuestos:

- 1.- Para que las derivadas sucesivas tengan entidad propia se les debería dar significado a cada una y a su conjunto, mostrándolas como una “sucesión” o una “n-upla” de derivadas, es decir $(f, f', f'', f''', \dots, f^{(n)}, \dots)$.
- 2.- Para abordar, a través de funciones analíticas, los problemas que requieren de la noción de predicción es más propicia la concepción sobre derivadas sucesivas antes indicada.

Metodología

Nuestra investigación sigue las pautas de la metodología de la “Ingeniería Didáctica”, fundamentándose en las teorías de Situaciones Didácticas y de Transposición Didáctica, para la cual se diseñó e implementó una particular situación didáctica dirigida a los alumnos de primer curso de universidad. Una de las finalidades de este diseño fue la de resignificar¹ el concepto de derivada de una función a través de las derivadas sucesivas situándonos en el marco gráfico. A partir de aquí, se considera la derivada, en un sentido genérico, como la organización de las derivadas sucesivas en relación con la Serie de Taylor, para tratar con problemas planteados desde el contexto de las Ciencias Experimentales. Situándonos de este modo en el paradigma pre-cauchiano para el Cálculo, donde la serie de Taylor es la herramienta para predecir los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza.

Como la metodología de investigación utilizada es la relativa a la ingeniería didáctica, se tuvieron en cuenta sus distintas fases.

Para ello se hizo una revisión de programas y de manuales escolares de Matemáticas y Física y se implementaron dos experiencias piloto con alumnos de Ingeniería Técnica Industrial y de la Licenciatura en Química. En el diseño de las situaciones-problemas² intervienen las nociones de variación y predicción a través de las derivadas sucesivas y de la serie de Taylor, respectivamente, en el contexto de las Ciencias Experimentales.

¹ Con el término *resignificar* queremos destacar que el concepto de derivada adquiere significaciones que evolucionan con el progreso del alumno en su estudio. Así, al principio, puede reducirse a la aplicación de una regla, después puede entenderse como razón de cambio y, más tarde, como un factor en la serie de Taylor. También, en otras ocasiones, habrá que entenderlo conjuntamente con sus derivadas sucesivas.

² El concepto de situación es tomado en el sentido de Vergnaud (1990); es decir, los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones a las que se enfrenta.

Presentamos dos situaciones-problemas representativas de las que conforman las situaciones didácticas utilizadas en la parte experimental.

□ **SITUACIÓN 1**

Un móvil se desplaza con movimiento rectilíneo no uniforme. En la siguiente tabla se muestran las posiciones (en metros, desde el origen de coordenadas) en ciertos instantes.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	3	2	5	-2	0	3

- A partir de estos datos, determina (razonando tu respuesta) para cuántos valores de t , como mínimo, el móvil tiene velocidad instantánea cero.*
- ¿Para cuántos valores de t , como mínimo, la aceleración es cero? ¿Por qué?*
- ¿Se puede asegurar que la variación instantánea de la aceleración $s'''(t)$, conocida como tirón, toma el valor cero en algún instante dentro del intervalo considerado? Explica con detalle los motivos y razones de tu respuesta.*

□ **SITUACIÓN 2**

Desde la terraza de un edificio de altura s_0 se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial v_0 . Esta situación viene descrita por la siguiente ecuación diferencial:

$s'' = -g$, donde g es la aceleración de la gravedad.

Predecir la posición de la pelota para cualquier instante t , es decir, hallar la expresión de $s(t)$. Utilizar como herramienta de predicción la serie de Taylor.

Estas situaciones problemas son analizadas individualmente atendiendo a lo siguiente:

- Las razones de su elección
- Importancia de la situación problema para los alumnos
- Los comportamientos que se quieren provocar
- Medios de que disponen los alumnos
- Los marcos utilizados
- Variables del problema y elecciones didácticas

Las mismas son validadas por un grupo de expertos. En base a este material se realiza el análisis a priori.

En la parte experimental implementamos dos experiencias con alumnos de primer curso de la Licenciatura en Biología.

En ellas, las etapas de aprendizaje seguidas han sido: acción, formulación y validación e institucionalización.

En la etapa de acción los alumnos trabajan en forma individual cada uno de los problemas que conforman la situación didáctica. En las etapas de formulación y validación los alumnos trabajan por equipos realizando un aprendizaje colaborativo. Sus producciones son recogidas en cinta de audio.

La etapa de institucionalización se trabaja en forma grupal con activa participación del docente investigador en la primera experiencia, y a través de entrevistas personales en la segunda.

Se fundamenta el análisis a posteriori en el conjunto de datos recogidos en estas etapas, como las observaciones realizadas de las secuencias de aprendizaje y de las producciones de los estudiantes.

Si bien la metodología de la ingeniería didáctica es cualitativa, se han obtenidos algunos resultados cuantitativos. Para ello, en la etapa de acción, agrupamos las producciones de los estudiantes en distintas categorías atendiendo a argumentaciones similares. Para obtener una valoración de estas producciones las catalogamos y le asignamos el siguiente puntaje (Cajaraville, 1996):

CATALOGACIÓN DE LA RESPUESTA	PUNTAJE
En blanco o totalmente errónea.	1
Uso de conceptos o procedimientos próximos sin éxito.	2
Uso de conceptos y procedimientos próximos y/o adecuados, con éxito limitado o con lagunas en la argumentación.	3
Respuesta correcta.	4

Tabla 1: Formas de catalogar las respuestas.

Para el análisis de las verbalizaciones que se producen en el aprendizaje colaborativo de las etapas de formulación y validación, nos hemos basado en la existencia de una correlación positiva y significativa entre algunas de las interacciones y el aprendizaje (Rodríguez y Escudero, 2000). Esto se esquematiza en la tabla 2.

Conclusiones

Como resumen de algunas conclusiones se destacan:

- 1) Los estudiantes tienden a abordar los problemas a partir del contexto que se les plantea sin explorar en otros contextos y marcos.
- 2) Si bien el marco gráfico por sí sólo es insatisfactorio, provee de una intuición global cualitativa que es fundamental para lograr un movimiento versátil entre distintos marcos y contextos.
- 3) Es interesante comentar que la fórmula: “la velocidad es igual al espacio dividido por el tiempo”, que caracteriza el esquema conceptual de la mayoría de los alumnos, resulta ser tan estable que dificulta e incluso impide la construcción del esquema conceptual de la noción de velocidad instantánea, actuando como un obstáculo.
- 4) El presentar los conceptos involucrados en la Cinemática, para el caso del movimiento rectilíneo con aceleración variable, desde diferentes marcos, ha favorecido en el alumno un desarrollo más amplio de la noción de velocidad, aceleración y “tirón”. Esto, a la luz de los resultados que hemos mostrado, clarifica los conceptos de la Cinemática, pero además amplía la noción de función derivada, al darle significación a cada una de las derivadas sucesivas, que en la mayoría de los casos se restringe a un mero algoritmo.

- 5) El uso de la ingeniería didáctica en un contexto interdisciplinario logra extender su margen de aplicabilidad.
- 6) La metodología empleada permitió analizar informaciones cualitativas características al estudiar un número reducido de casos, sin abandonar el ámbito académico, para interpretar y comprender ciertos aspectos de la forma de razonar de los alumnos ante tareas específicas.

DE CARÁCTER COGNITIVO			DE CARÁCTER ORGANIZATIVO
<i>Emisiones</i>	<i>Recepciones</i>	<i>Práctica posterior</i>	
Dar ayuda (DA), (1) Pedir ayuda (PA), (0) Cometer errores (E), (0)	Recibir ayuda con petición (RA), (1) Contestarse a sí mismo (AR), (0)	Poner en práctica la ayuda recibida (UAR), (1) Expresar aprobación (EA), (0)	Integradoras (I)(0) Directivas (D)(0)

Tabla 2: Sistema de categorías y puntaje para el análisis del habla.

Referencias Bibliográficas

- Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.
- Azcárate, C. (1990). *La velocidad: Introducción al concepto de derivada*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Cajaraville Pegito, J. A. (1996). *Evaluación del significado del Cálculo Diferencial para estudiantes preuniversitarios. Su evolución como consecuencia de una Ingeniería Didáctica alternativa*. Tesis Doctoral. Universidad de Santiago de Compostela.
- Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría elemental de las funciones analíticas*. Tesis Doctoral. Centro de investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al Análisis*. Epsilon, N° 42, V. 14(3), número monográfico. Sevilla, pp. 353-369.
- Rodríguez Barreiro, L. M. y Escudero Escorza, T. (2000). *Interacción entre iguales y aprendizaje de conceptos científicos*. Enseñanza de las Ciencias, 18(2), pp. 255-274.