

## Uso de Hojas Electrónicas en la Enseñanza de la Distribución Normal

**Enrique Hugues**

Universidad de Sonora

México

ehugues@gauss.mat.uson.mx

Probabilidad, Estadística y Combinatoria – Nivel Superior

### Resumen

El reconocimiento social de la importancia de la Estadística, la expectativa de que la educación en Estadística básica trascienda el plano operativo y la postura de que el uso de la tecnología constituye un apoyo potencial para su alcance, orientan una propuesta de enseñanza de la distribución normal en un ambiente proporcionado por hojas electrónicas. Para arribar a ella hemos realizado una revisión documental del tópico desde diferentes perspectivas y adoptado algunos tipos de problemas como situaciones cuya solución incorpora las prácticas que caracterizan a la distribución normal como objeto matemático de enseñanza. Mostramos algunas actividades desarrolladas en torno a los tipos de problemas identificados y la experiencia tenida con ellas en nuestra práctica docente.

### Introducción

El reconocimiento social a la importancia de la Estadística, lo constatan su creciente presencia en comunicaciones de índole periodística, en el mercado laboral y en el ambiente cultural. En el caso de este último, se ha generado la expectativa de que la educación Estadística trascienda al plano operativo orientándose a uno de naturaleza instrumental basado en comprensiones de las ideas básicas y en habilidades que permitan al individuo tanto el tratamiento de la información como su eficiente interpretación y con esto poder llevar a cabo razonamientos estadísticos básicos.

En esta dirección, se considera que el uso de tecnología es muy prometedor como medio complementario para alcanzar tal expectativa, al brindar un ambiente de exploración abierto a la actividad del usuario y a la construcción de concepciones personales, vía sus bondades operativas y de interjuego entre diversas representaciones.

Consideraciones como estas nos han llevado a plantearnos el objetivo de estructurar una propuesta de enseñanza para la distribución normal apoyada en un ambiente proporcionado por hojas electrónicas que, dirigida a estudiantes universitarios de ingeniería, persiga generar en el individuo una comprensión de este objeto matemático.

### Marco Referencial

Desde la perspectiva de la enseñanza y del aprendizaje hemos emprendido una revisión sobre un tópico de interés: la distribución normal. Esta distribución interesa especialmente por constituir el modelo más importante en la Estadística y sus aplicaciones, de hecho constituye el

principal referente en el trabajo estadístico, aunque no resulte ser ni el más sencillo ni el mejor comprendido.

Alrededor de esta distribución observamos que presenta una dificultad ineludible en su introducción al ámbito escolar: si bien se cuenta con una expresión analítica para su densidad no se tiene algo semejante para su distribución, y la deducción formal de buena parte de sus características y propiedades queda fuera del alcance de la madurez matemática de gran parte de los estudiantes, por las herramientas y tipo de razonamientos que ello implica.

Aunado a esto, es un hecho que las prácticas educativas vigentes sobrevaloran la adquisición de destrezas operatorias en los estudiantes y tienen como consecuencia el que los estudiantes sean incapaces de enfrentar situaciones problemas distintas a las más básicas manejadas en libros de textos pero que resultan sustanciales en su formación. Ejemplos de estas situaciones serían: las que requieren determinar el valor de un parámetro de la distribución teniendo información restringida, situaciones en que se involucra más de una variable aleatoria (sea su suma o su promedio), aquellas en que se usa como modelo aproximativo de otras distribuciones, cuando se trata de analizar el ajuste como modelo a datos provenientes de una situación práctica o aquellas que requieren de una interpretación contextual o explicación que vaya más allá de los simples cálculos.

Paralelamente, de la revisión al programa de estudio para el curso de Probabilidad y Estadística ofrecido en la carrera de Ingeniería Industrial de nuestra Universidad, si bien encontramos a la distribución normal como punto temático sin mayor descripción que su sola mención y sin orientaciones específicas para su tratamiento, algunas deducciones alrededor de esto pueden ser alcanzadas<sup>1</sup>. Una de esas deducciones es que el introducir la distribución normal plantea la necesidad de contar con situaciones problemáticas que intuitivamente den lugar a la distribución y a algunos de los resultados relacionados con ella. De hecho, didácticamente resultan pertinentes situaciones problemáticas que además involucren elementos de caracterización de la distribución y usos que a la postre le son dados como modelo: supuesto, aproximativo de otro modelo o aproximativo de la distribución de alguna función de variables aleatorias, vía el teorema del límite central.

En la tarea de buscar situaciones problemáticas que respondan a lo señalado, hemos tratado de tomar como una de nuestras fuentes a la literatura en educación matemática acerca de la distribución normal<sup>2</sup>. En este último sentido, el trabajo doctoral desarrollado por L. Tauber (2001) y publicaciones relacionadas en colaboración con algunos de sus colegas (Batanero, Tauber y Sánchez; 2001), que nos parecen sumamente trascendentes para las cuestiones de nuestro interés, han tomado cuatro situaciones problemáticas fundamentales.

Dichas situaciones de algún modo las hemos considerado (Hugues, 1997) y resultan congruentes con nuestra visión de otras fuentes: la emergencia de la distribución normal y los libros de texto utilizados en nuestro ámbito escolar. Así, considerando lo anterior, tomamos

---

<sup>1</sup> Debe hacerse notar que la mayoría de los estudiantes que ingresan a la Universidad de Sonora no abordaron contenidos propios de estas disciplinas en el nivel educativo previo.

<sup>2</sup> Literatura algo escasa y más aún si buscamos propuestas de tratamiento que consideren tanto el uso de tecnología como las dificultades que presentan los estudiantes universitarios para la comprensión de la distribución normal.

como los tipos de problemas para nuestro tratamiento de la distribución normal los siguientes: Ajuste de una distribución normal a un conjunto de datos; La aproximación de probabilidades binomiales mediante normales; El cálculo de probabilidades y puntajes asociados con una distribución normal; y, La aproximación de probabilidades de una distribución de medias muestrales mediante normales.

El análisis de los abordajes a problemas específicos de los cuatro tipos anteriores, desde nuestro punto de vista, muestra algunas características de la distribución normal que inicialmente la configuran como objeto matemático a ser enseñado y aprendido, entre las que resaltamos: a la simetría respecto a la media, a la asintoticidad, el apuntalamiento y la unimodalidad; como elementos específicos y de suma trascendencia para una tratamiento didáctico favorable de la distribución normal.

### **Metodología**

El objetivo fundamental de nuestro trabajo fue estructurar una propuesta de enseñanza para la distribución normal que respondiese a una serie de consideraciones previas. Estas se confirman y/o profundizan en una revisión del tópico desde las perspectivas: disciplinar, curricular y de las investigaciones en didáctica; dando lugar a una caracterización de la distribución normal como objeto matemático a ser enseñado y aprendido.

Esta revisión también se utiliza en la clarificación de elementos que se integran en la propuesta, digamos la adopción de problemas como parte de la estrategia didáctica o la selección de situaciones y de la tecnología que se incorporan, en este último caso el apoyo de una hoja electrónica que ha proliferado bastante: *Excel* de Microsoft.

Elaborada la propuesta, se implementa en el salón de clase como un complemento a la educación apoyada en los medios tradicionales y se realiza la observación cuidadosa de las reacciones de los estudiantes por parte del profesor. El grupo en que se instrumenta es de estudiantes de un curso de Probabilidad y Estadística que regularmente se imparte en el tercer semestre de la carrera de Ingeniería Industrial en nuestra Universidad.

### **Actividades Propuestas**

La propuesta de tratamiento de la distribución normal se estructura en actividades de aprendizaje. La elección de las situaciones que dan lugar a las actividades con que trabajamos responde primeramente a los tipos de problemas identificados y a consideraciones adicionales que hemos hecho. A manera de ejemplo y muy sucintamente, algunas actividades se presentan a continuación.

*Actividad 1.* Comportamiento de la distribución binomial para diferentes valores de los parámetros.

En las figuras 1 y 2 se muestra dos de las hojas elaboradas por el profesor, mediante las cuales se intenta resumir una serie de ideas identificadas por los estudiantes a través de la elaboración de casos particulares de distribuciones binomiales. Inicialmente se le solicita al estudiante

prepare hojas donde se trabajen distribuciones binomiales para valores fijos del parámetro  $n$  y que automáticamente actualicen cambios en el parámetro  $p$ . También se cuestiona la forma que siguen las diferentes distribuciones binomiales y los casos en que éstas son aproximadamente simétricas.

En un momento posterior se cuestiona sobre un modelo que aproxima distribuciones binomiales. En los casos en que se tiene una simetría aproximada se espera que se recurra a una distribución normal y a su estandarización<sup>3</sup>, pero también a que se concluya cómo se argumenta, cómo quedaría determinada por completo tal distribución y cómo se utilizaría en la aproximación de probabilidades binomiales requeridas.

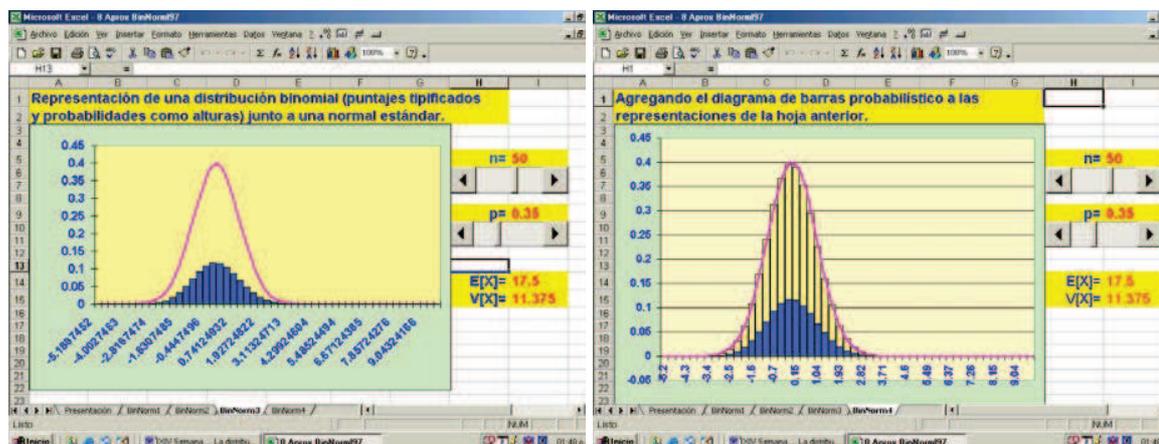


Figura 1

Figura 2

*Actividad 2.* Abordar gráficamente el estudio de la distribución normal para diferentes valores de los parámetros.

Esta actividad presupone que la distribución normal y sus caracterizaciones han sido presentadas, y pretende proporcionar un ambiente sencillo en que se visualice parte de esto, vía la comparación entre una distribución normal estándar (que queda fija) y otras distribuciones normales (que pueden ser modificadas sencillamente a través de los botones de entrada). Para ello el profesor proporciona hojas electrónicas en que ha preparado esto (figuras 3 y 4).

<sup>3</sup> Razón por la cual aparece, como referencia, insertada en las figuras 1 y 2 la gráfica de una normal estándar.

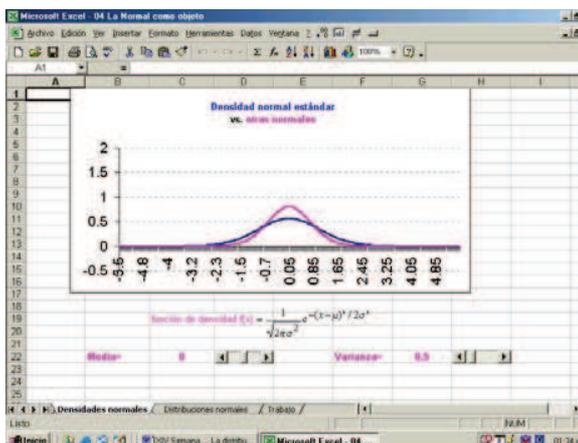


Figura 3

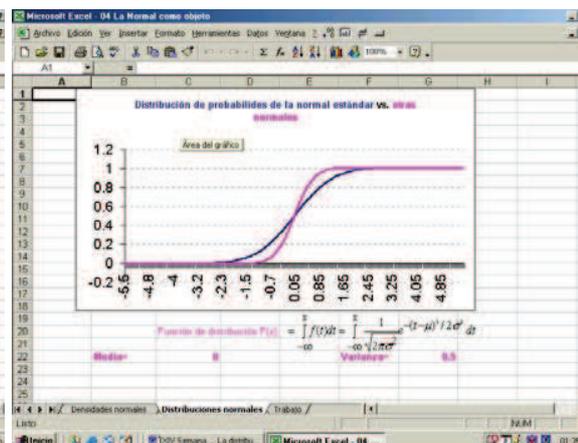


Figura 4

Al estudiante se le cuestiona acerca de los efectos relativos que tienen, sobre la función de densidad o de distribución modificable, cambios en los valores de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ . Recíprocamente sobre lo que ha de ocurrir con los parámetros para que la distribución modificable resulte más a la izquierda (derecha) o más delgada (ancha) que la de referencia.

*Actividad 3.* Trabajo en tablas de la distribución normal: el cálculo de probabilidades y puntajes asociados a una distribución normal.

En este caso la actividad presupone que ha habido un acercamiento en papel a tablas de la distribución normal estándar así como a su uso en el cálculo de probabilidades y puntajes asociados a una variable aleatoria normal (tanto en el caso estándar y como en otros).

Se propone al estudiante construir en hojas electrónicas tablas para la determinación de áreas bajo la función de densidad de una normal y para la inversa de la distribución, primero en el caso de una estándar y luego generalizada a otras normales que al modificar parámetros (figuras 5 y 6) arroje con ello nuevas tablas, cuestionándoseles posteriormente sobre las relaciones entre tablas obtenidas y propiedades que se espera hayan sido configuradas, como la preservación de áreas bajo la transformación de estandarizar.

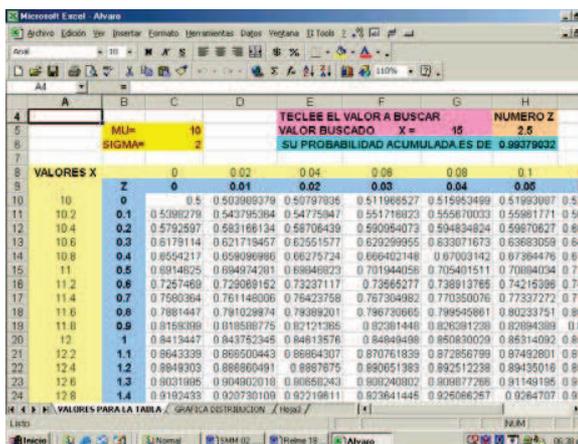


Figura 5

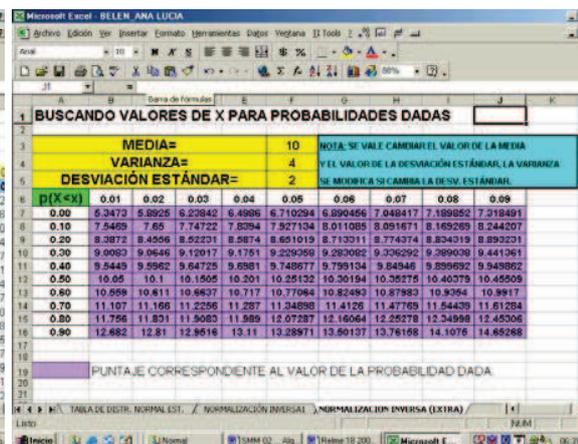


Figura 6

## **Resultados**

Nuestra propuesta de tratamiento de la distribución normal fue implementada en un grupo de veinticinco estudiantes tomando un curso de Probabilidad y Estadística con apoyo de una hoja electrónica, de tal modo que los estudiantes habían sido iniciados en esta ruta<sup>4</sup>.

Los estudiantes involucrados, aunque en principio no mostraron familiaridad alguna con la hoja electrónica elegida, tampoco presentaron mayores dificultades para realizar las actividades propuestas que requirieron el apoyo de ese medio, como esperábamos, y en breve tiempo fueron capaces de realizar en computadora lo que el profesor les fue planteando. En general podemos señalar que lo pretendido por medio de las actividades en gran medida fue alcanzado.

En su trabajo en computadora, los estudiantes dieron muestras de poder identificar: el papel de los parámetros de una normal en la forma de su distribución; los parámetros pertinentes en la distribución normal para aproximar una binomial; la relación entre puntajes y probabilidades; y, por supuesto, propiedades en una normal como la simetría.

Así mismo, en su trabajo a lápiz y papel, observamos que los estudiantes fueron capaces de utilizar diferentes tablas de la distribución normal (probabilidades acumuladas desde menos infinito o bien desde cero), fueron capaces de bosquejar en dibujos las diferencias entre dos distribuciones normales debidas a alguna diferencia en los parámetros o a plantear adecuadamente la estandarización necesaria para el cálculo de una probabilidad asociada a una binomial o a media muestral.

Adicionalmente es de notarse que la faceta computacional de la propuesta resultó bastante atractiva para los estudiantes y que llegaron a incorporar en sus reportes detalles no solicitados por el profesor, por ejemplo:

- En las primeras filas de la figura 5, se presentan celdas que permiten obtener la estandarización de un puntaje y la probabilidad acumulada hasta él, lo que no incluye una tabla común.
- Al revisar la figura 6 se puede observar que es una tabla de doble entrada, lo que constituye una aportación de los estudiantes pues les fue solicitado una tabla más sencilla con sólo una columna de probabilidades.

## **Conclusiones**

Por supuesto que también observamos inconvenientes que empiezan por el deseo (no cumplido) de los mismos estudiantes a contar más ampliamente con equipos de cómputo, tanto para actividades de clase planteadas en el ambiente de lápiz y papel como para la realización de exámenes. O la falta de tratamiento en las actividades, en computadora, sobre la corrección por continuidad en la aproximación de una probabilidad binomial, que parece haberles representado dificultades a los estudiantes.

---

<sup>4</sup> En una sesión introductoria fueron expuestos a los rudimentos de la hoja electrónica y la restante información técnica sobre su funcionamiento fue proporcionada gradualmente conforme fue siendo necesario.

No pretendemos contar con una larga lista de bondades encontradas tras nuestra propuesta. Sin embargo, señalaríamos que nos parece muy importante renovar actividades que enfatizan lo operativo por encima de lo conceptual y vemos que el uso de las hojas electrónicas tiene un posible lugar en eso. De hecho descargar el énfasis operativo en un medio tecnológico como ese, significa una ganancia de tiempo que puede ser invertida en mejorar intuiciones y comprensiones, en complementar los alcances de los medios educativos tradicionales, así como en reafirmar y concretizar algunos de los aspectos que difícilmente se puede alcanzar con estos últimos medios.

### **Referencias Bibliográficas**

- Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, V. (2001). Significado y comprensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos. *Cuadrante*, 10(1), 59-91.
- Hugues, E. (1997). *Comprensión de la distribución normal y conceptos implicados en ello: Una propuesta didáctica*. Proyecto de investigación para acceder al programa de doctorado, Cinvestav, México.
- Tauber, L. (2001). *La Construcción de la Distribución Normal a partir de Actividades de Análisis de Datos*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, España.