

## Matemáticas y Nuevas Tecnologías en Costa Rica

**Edison De Faria**

Universidad de Costa Rica

Costa Rica

[edefaria@cariari.ucr.ac.cr](mailto:edefaria@cariari.ucr.ac.cr)

Tecnología Avanzada – Nivel Superior

### Resumen

Costa Rica es un país que apuesta al desarrollo tecnológico como una vía alternativa para el desarrollo social, económico y educativo y se encuentra ubicada entre los países latinoamericanos líderes potenciales de adelanto tecnológico. A partir 1980 se llevaron a cabo importantes investigaciones y programas relacionados con el uso de calculadoras y de computadoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje en todos los ámbitos educativos costarricenses. En este artículo describiremos algunas experiencias relacionadas con el uso de calculadoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

### Introducción

Costa Rica es uno de los países que ha dado importantes pasos dirigidos hacia la utilización de tecnologías digitales con fines educativos. En la década de los noventa se llevaron a cabo importantes investigaciones relacionadas con el uso de calculadoras y de computadoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje en todos los ámbitos educativos.

Peralta, Berty, Buján y Jiménez C. (1991), en un proyecto adscrito al Instituto de Investigaciones para el Mejoramiento de la Enseñanza en Ciencias de la Universidad de Costa Rica (I.I.M.E.C), realizaron un estudio con 155 estudiantes de tercero y quinto grados en seis escuelas del Primero y Segundo Ciclos de la Educación General Básica en Costa Rica. Se aplicaron cuatro tratamientos: un grupo trabajó sólo con material concreto, otro lo hizo sólo con calculadora, un tercer grupo realizó la mitad de las actividades con calculadora y la otra mitad con material concreto y un cuarto grupo, considerado como grupo control, no participó de ninguna de las actividades. En la investigación se aplicó una prueba de actitud hacia la matemática, una prueba de habilidad espacial y una prueba de procesos mentales. Entre sus conclusiones destacamos las siguientes:

- Los estudiantes que trabajaron a la vez con calculadora y material concreto son los que presentaron resultados más altos en las pruebas de discriminación, habilidad espacial y aritmética y excepto en el caso del tema de patrones, no hay diferencias significativas en los resultados obtenidos en estas pruebas por los estudiantes que usaron sólo calculadora o sólo material concreto.
- En el análisis basado en el puntaje total de la prueba de aritmética se obtuvo que los estudiantes del grupo control presentaron un rendimiento significativamente menor que los estudiantes de los otros tres grupos (sólo calculadora, calculadora y material concreto y sólo material concreto).
- En relación con la actitud hacia la matemática, no hay diferencias significativas en los resultados presentados por los estudiantes que participaron en los diferentes tratamientos.

La investigación mencionada es una de las pioneras en esta temática en Costa Rica, y revela ciertas ventajas o efectos positivos obtenidos al utilizar calculadoras en la enseñanza primaria, principalmente si su uso se combina con el de otros materiales concretos.

## **El uso de Calculadoras**

En el primer ciclo lectivo de 1993, la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica puso en marcha un proyecto piloto para la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral I y del Álgebra Lineal, utilizando la calculadora Hewlett Packard (HP 48), con el objetivo de mejorar la calidad de la docencia y la formación matemática de los estudiantes (De Faria 1993). Fueron seleccionados cuatro grupos de Cálculo Diferencial e Integral I y dos grupos de Álgebra Lineal. El texto y los exámenes parciales fueron los mismos para los grupos de prueba y para los grupos control, y no se permitía utilizar la calculadora en dichas pruebas. La medición del efecto de la calculadora en los grupos de prueba fue realizada mediante actividades organizadas por los profesores, como exámenes cortos, tareas y proyectos. Los resultados obtenidos en los exámenes parciales no revelaron diferencias significativas entre los grupos de prueba y los de control, pero en los grupos de prueba pudimos utilizar la calculadora para explorar, experimentar, conjeturar y resolver problemas más complejos. Consideramos que este primer intento fue bastante tímido y que no produjo resultados satisfactorios debido a la forma en que fue concebido y conducido. Estamos convencidos de que sin un cambio curricular, metodológico y en la forma de evaluar, no podemos esperar cambios en las actitudes, aprendizajes y promociones de los estudiantes. Pero la experiencia fue importante pues permitió apreciar que la presencia de una nueva herramienta abría espacios para la creación de nuevas situaciones de aprendizaje como la exploración, búsqueda de patrones y resolución de problemas más complejos.

Un proyecto bastante ambicioso denominado “Innovaciones Tecnológicas en la Educación Matemática en Costa Rica: Laboratorios con calculadoras graficadoras TI92 y CBL”, (PITEM), asociado al Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas de la Universidad de Costa Rica, inició el primer semestre de 1998. En este proyecto estuvieron involucradas las cuatro universidades estatales de Costa Rica y 5 (de los 6 existentes en la época) colegios científicos costarricenses. El Colegio Científico Costarricense de San Ramón no fue incluido en el proyecto debido a que ya estaba llevando a cabo un proyecto piloto con las calculadoras HP 48. La meta del proyecto era la de determinar metodologías apropiadas para la incorporación de las calculadoras graficadoras y los aparatos de recolección de datos (CBL) en lecciones de matemáticas y sus objetivos eran: explorar y experimentar con ideas matemáticas tales como patrones, propiedades numéricas, algebraicas y funciones; desarrollar y reforzar habilidades tales como cálculos, gráficas, y análisis de datos; enfatizar el proceso de resolución de problemas con datos reales, en lugar de concentrarse en los cálculos asociados con los problemas; acceder a ideas matemáticas y experiencias que van más allá de los niveles limitados por los cálculos tradicionales con papel y lápiz, permitiendo elevar el nivel de abstracción y generalización.

En el Colegio Científico Costarricense localizado en la sede del Instituto Tecnológico de Costa Rica en San Carlos, al inicio del curso lectivo se les explicó a los estudiantes que se estaba en un proceso de investigación, en el que se aplicarían diferentes metodologías y que ellos serían los que seleccionarían aquellas que consideraran las más pertinentes, tomando en cuenta la motivación, responsabilidad, retos y posibilidades para un aprendizaje más eficiente. Estas variables que pasaron a formar parte del contrato didáctico (Brousseau, 1993) se medían por el grado de participación de los estudiantes, por entrevistas o por consulta directa grupal. Las actividades de la clase eran minuciosamente planeadas, tomándose en consideración los conocimientos previos de los estudiantes, parte esencial para un aprendizaje significativo (Ausubel, Novak & Hanesian 1993) y durante su ejecución se tomaba nota de aspectos relevantes tales como actitudes de los estudiantes, grado de participación, preguntas, conclusiones a las que los estudiantes llegaban y trabajo en

proyectos. Las respuestas dadas por los y las estudiantes nos han motivado a seguir con el proyecto y a buscar nuevas opciones para su implementación. Abajo transcribimos algunas de las respuestas dadas por los estudiantes entrevistados del Colegio Científico Costarricense de San Carlos, respecto a la metodología utilizada, a la evaluación y al uso de calculadoras graficadoras.

#### **Respecto a la metodología:**

“Anteriormente a este curso lectivo, resolvía los ejercicios de manera rutinaria y ahora analizo. Al inicio la metodología me costó porque tenía que estar concentrado porque sino me perdía y antes no necesitaba poner atención, con solo copiar un ejemplo, en la casa podía hacer el resto, porque las cosas eran más simples, y si aquí uno se concentra y pone atención, lo encuentra más fácil de cuando estaba en el otro colegio. El sistema de proyectos es mejor que ver a un profesor trabajando. El tipo de ejercicios es motivante porque hay que matarse tratando de encontrar la respuesta. Uno nota más avance con algo que le costó hacer y lo entendió cuando lo terminó. A veces hasta resulta interesante equivocarse con las cosas, porque aprende de eso. Los ejercicios fáciles son aburridos y da pereza hacerlos.”

“Antes uno se sentaba a esperar que el profesor le explicara y luego llegar a la casa a resolver los ejercicios. Ahora a uno le toca enfrentarse a los ejercicios y poder aclarar dudas. El trabajo en clase es más aplicar la lógica. El trabajo en proyectos me parece una de las mejores, con plazo asignado y opciones para aclarar dudas.”

#### **Respecto a la evaluación:**

“Al inicio uno se siente muy inseguro al insistir el profesor en que no nos preocupemos por notas de examen o pruebas cortas, que primero pensemos en aprender. Yo no entendía a que se refería con que iba a evaluar el proceso, pues entendía pero no podía comprenderlo, pero ahora ya sé a que se refería y me da más confianza.”

“Me costó acostumbrarme a no pensar ¿y el examen? Antes estudiaba para el examen, ahora tengo que estudiar siempre sino uno no puede resolver los ejercicios y en el trabajo en grupo uno está perdido o se nota que uno no estudió, usted se da cuenta rapidito quien no estudia por las preguntas que le hacen.”

#### **Respecto al uso de las calculadoras:**

“El uso de tecnología le permite a uno comprobar lo realizado. En los ejercicios hechos del proyecto # 1, las calculadoras permiten darse casos. Me gustó mucho usar calculadora al hacer los ejercicios ya que también permitía saber el porqué y casi no se ha olvidado. Siento que si aprendí algo, antes no. Llegaba a matemática aburrido. Ya no es aburrido.”

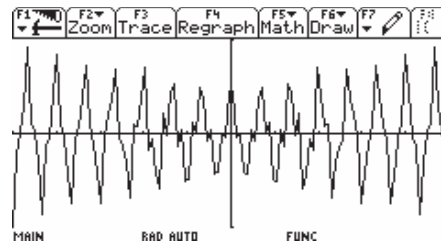
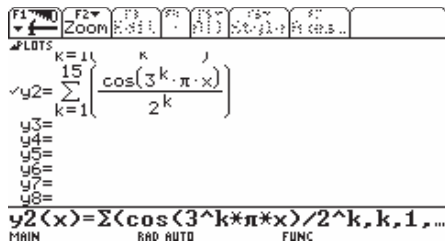
“Las calculadoras son bastante útiles, ya yo no sé cómo hacen otros para ver estos gráficos.”

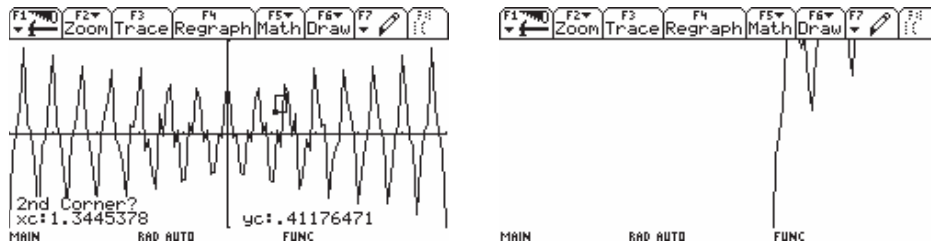
Otra experiencia bastante valiosa se llevó a cabo en la Universidad de Costa Rica. Utilizamos la calculadora graficadora para corregir errores conceptuales y superar obstáculos epistemológicos de estudiantes del curso de Matemática 3 para computación cuya sigla es MA0329. Este es el tercer curso de matemática que llevan los estudiantes de la carrera de computación de la Universidad de Costa Rica y entre sus contenidos están los temas: sucesiones, series, polinomios de Taylor, derivadas parciales e integración múltiple. La metodología utilizada en esta investigación en el aula consistió en: detectar de errores conceptuales u obstáculos epistemológicos en los estudiantes (Brousseau, 1983), mediante la técnica de preguntas y de instrumentos de evaluación diseñados por el docente (De Faria 2002); elaborar de guías didácticas que posibilitaran el uso de distintos registros de representación (Duval, 1992), con miras a superar los obstáculos detectados y corregir los errores conceptuales. Se trabajaba individualmente en cada guía y posteriormente en grupos. En este punto es muy importante el uso de la calculadora graficadora, por su potencial para utilizar distintos registros de representación y por permitir articulaciones de un registro a otro (Kutzler, 1999, Cordero & Solís, 1995, Moreno, 1999, Tall, 1996, De Faria, 2000). Las calculadoras graficadoras permiten que los estudiantes utilicen otros sistemas de representaciones para explorar la validez o la falsedad de argumentaciones, funcionando como andamiaje en algunos de los pasos utilizados en la resolución de una situación problemática; discutir con todo el grupo sobre las experiencias adquiridas.

Además, utilizamos las calculadoras como soporte para conjeturar y argumentar sobre la veracidad de las conjeturas planteadas y para analizar el comportamiento de ciertas funciones extrañas y de sucesiones que duplican el periodo hasta producir caos. Por ejemplo para la función definida mediante la serie trigonométrica por Weierstrass en la Academia de Berlín en 1872.

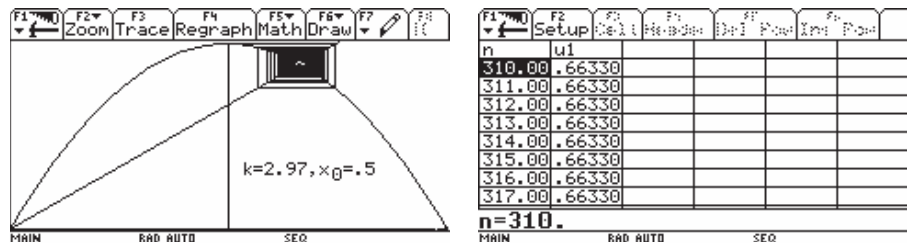
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), a \text{ entero impar}, b \in ]0,1[, ab \text{ mayor que } 1 + 3\pi/2$$

podemos graficar algunos sumas parciales y hacer acercamientos en vecindarios de puntos de su gráfica para observar que las ampliaciones correspondientes no se parecen a un trozo de recta. Esto nos lleva a conjeturar lo que afirmó Weierstrass: la función dada es continua pero no derivable.

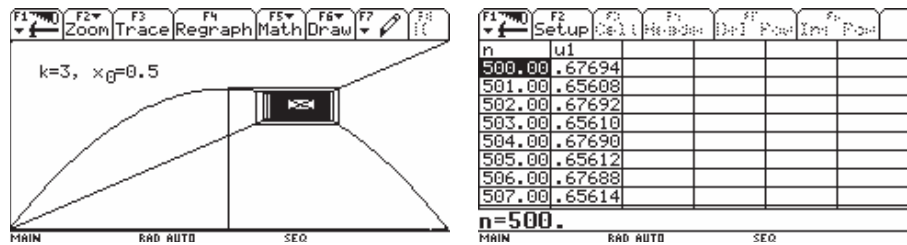




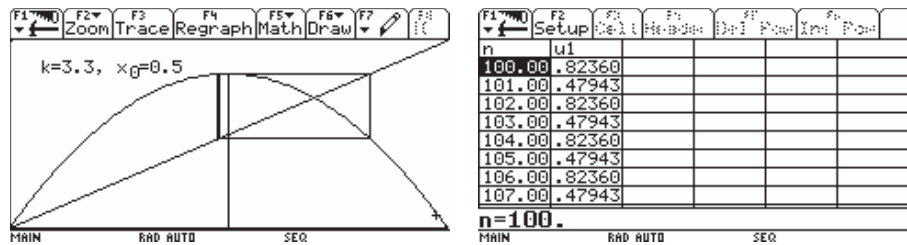
También logramos analizar temas que sin la ayuda de recursos computacionales digitales sería bastante difícil de tratar en este nivel como, por ejemplo, el comportamiento de sucesiones caótico de ciertas sucesiones numéricas mediante el uso de tablas y gráficas para detectar las duplicaciones de periodo y de gráficas para visualizar dichas duplicaciones, hasta la producción del caos. Para la sucesión logística  $x_{n+1} = kx_n(1-x_n)$ ,  $x_0$  dado. Las figuras que siguen ilustran las duplicaciones de periodo de la solución hasta obtener el caos, en los dos registros de representación mencionados. Para otros ejemplos de sucesiones numéricas con el apoyo tecnológico consultar Cantoral & Reséndiz (1995).



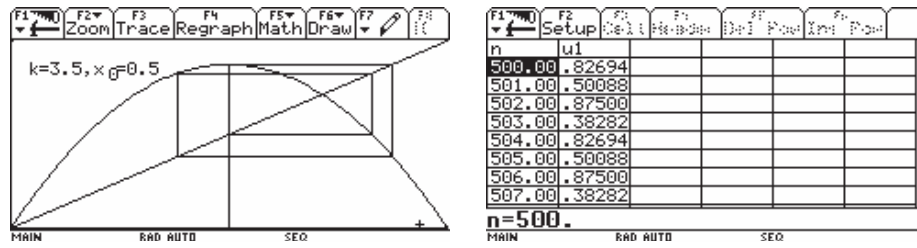
Convergencia



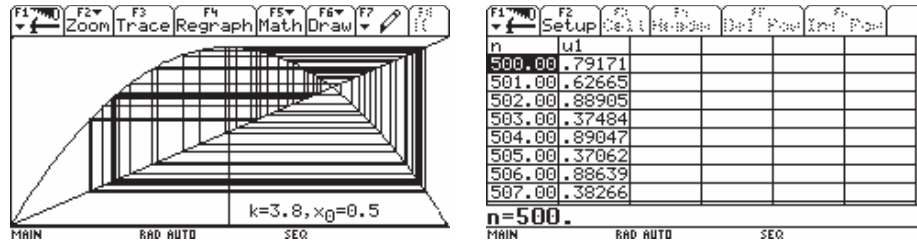
Oscilación alrededor de un punto fijo



Periodo 2



Periodo 4



Caos

Los resultados obtenidos en el proyecto hasta ahora son bastante alentadores, de acuerdo a las respuestas dadas por los y las estudiantes entrevistados (De Faria y Castro 2002). Entre otras cosas, hemos visto cómo hemos podido contextualizar la matemática mediante el uso de instrumentos que posibilitan la toma de datos reales en el salón de clases, en ríos, bosques y otros ambientes naturales. Por otro lado, el uso de los distintos registros de representaciones semióticas nos permitió hacer conversiones y tratamiento en y entre tales registros, para distintos objetos matemáticos, como por ejemplo las funciones. Creemos que hemos logrado conectar las matemáticas con la física, química, biología y agronomía entre otras disciplinas. El uso de las calculadoras graficadoras con los instrumentos de mediciones y tomas de datos ampliaron los horizontes para un aprendizaje significativo.

## Referencias Bibliográficas

- Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1993). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Editorial Trillas.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(2), 165 – 198.
- Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática* (traducción: Fregona, D.) En Dotti I., Vargas J. (Eds.). Argentina: Universidad Nacional de Córdoba.
- Cordero, F. y Solís, M. (1995). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- De Faria, E. (2000). La tecnología como herramienta de apoyo a la generación de conocimiento. *Revista Innovaciones Educativas* 7(12).
- De Faria, E. (1993). *Cálculo diferencial e integral con apoyo de la calculadora HP 48*. Memorias de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Panamá.

- De Faria, E. (2002). *Calculadoras graficadoras: Herramientas útiles en la corrección de errores algebraicos*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 15, Tomo 2, Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- De Faria, E. y Castro, A. (2002). *La investigación sobre el uso de la calculadora en la enseñanza y aprendizaje de la matemática*. Memorias en CD VIII Encuentro Nacional de Investigadores en Educación. Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia.
- Duval, R. (1992). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM Strasbourg.
- Kutzler, B. (1999). *The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics*. [En línea] Disponible en : [http://b.kutzler.com/article/art\\_paed/ped-tool.html](http://b.kutzler.com/article/art_paed/ped-tool.html)
- Moreno, L. y Lupiáñez, J. (2002). *Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas*. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas. Serie memorias. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Peralta T., Berty R., Buján V. y Jiménez M. (1991). *El uso de la calculadora en la transición del pensamiento concreto al pensamiento semi-concreto y simbólico en la matemática de segundo y cuarto años de la Educación General Básica. Costa Rica*. Informe Final de Investigación, IMEC, U.C.R.
- Tall, D. y Vinner, S. (1983). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12.