

## Algunos Usos de la Computadora en el Aula

**Carlos Armando Cuevas y Magally Martínez**

Cinvestav – IPN, UAPVCh, UAEM

México

ccuevas@mail.cinvestav.mx, mmreyes@cinvestav.mx

Tecnología Avanzada – Nivel Medio, Superior.

### Resumen

En los últimos años hemos sido partícipes de un explosivo desarrollo tecnológico; esto ha puesto en duda muchas de las prácticas docentes en los cursos de matemáticas. El advenimiento de la computadora con programas de manipulación simbólica, de graficación y simulación, hacen que muchas de las tareas usuales de un curso de cálculo, como derivar e integrar simbólicamente, se puedan resolver mediante la aplicación de estos paquetes. Esto cuestiona gravemente el rol del profesor y lleva ineludiblemente a una revisión curricular en donde se deben examinar los objetivos de los cursos de cálculo y determinar con precisión el contrato didáctico entre los participantes que son: el profesor, la tecnología y el estudiante. Cada propuesta presenta ventajas y desventajas en su uso, evidenciarlo es el objetivo del presente trabajo.

### Antecedentes

Incorporar a la tecnología en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es hoy algo necesario puesto que los cambios que produce en la enseñanza de la matemática son tanto en forma como en contenido. Por otra parte, el uso de la computadora nos ofrece la posibilidad de simular procesos físicos o geométricos, e interactuar entre los diversos registros de representación semiótica para un concepto matemático. Esto posibilita emplear diversas propuestas didácticas como la de Cuevas y Pluvinage, 2003 entre otras. Sin embargo, no todo es miel sobre hojuelas, los cálculos numéricos aproximados realizados por una calculadora o computadora nos pueden conducir a concluir que: un sistema lineal de ecuaciones es inconsistente cuando no lo es, a considerar raíces distintas en un polinomio cuando son múltiples, a concluir de las gráficas de polinomios discontinuidades o un número infinito de raíces, etc. A pesar de ello y debido al enorme potencial de simulación y cálculo numérico de las computadoras, existe entre los investigadores en educación un cierto consenso en que mediante ambientes para el aprendizaje por descubrimiento con el uso de la computadora en cursos de matemáticas se logre que el estudiante investigue y construya sus ideas matemáticas promoviendo así una mejor comprensión de los conceptos matemáticos (Asiala et.al. 1997, y Simmt, 1997). Sin embargo, introducirlos por el simple hecho de su potencial no es suficiente, por ejemplo Forgasz (2002) y Lozano (2000) mencionan que no se presentan cambios en la comprensión de los conceptos matemáticos por la simple presentación de dos o más registros si no se cuidan los detalles de conversión entre los diferentes registros. En el entendido de que hacer un análisis del uso de la computadora en educación matemática merece un estudio más extenso, y de que a pesar de ello éste quedará incompleto ante el creciente uso e imaginación de investigadores y docentes, señalaremos algunos usos.

### Empleo de la computadora en Educación Matemática

La tecnología provee nuevas formas de experimentar y actuar en el mundo, y esto hace posible una nueva conceptualización y métodos cognitivos como señala Stroup (2002, p. 183): la facilidad de realizar cálculos numéricos, la posibilidad de visualizar gráficas complejas y la realización de cálculos simbólicos permiten centrar la atención en un cálculo conceptual más que en el cálculo operativo. La forma en que se ha utilizado la computadora en la educación matemática es muy variada y sigue fines como: mejorar la comprensión de los conceptos, promover la participación individual o colectiva, o hacer más eficiente y flexible los métodos de enseñanza, entre otros.

### **I) Software de aplicación para apoyo al trabajo docente y de investigación en la enseñanza de las matemáticas.**

Uno de los primeros usos de la computación en la enseñanza de las matemáticas y materias afines lo constituyó el uso de programas de computación que proporcionaban en forma inmediata los cálculos requeridos para un determinado proceso. Así surgen paquetes de estadística como: Excel, SPSS, Fathon, entre otros; los cuales proveen el cálculo de diversas medidas de tendencia central, parámetros de muestras y poblaciones, agrupación y ordenación de datos, etc. Si bien estos programas nos permiten la manipulación y procesamiento de una gran cantidad de datos, también realizan en forma oculta el proceso para resolver los problemas limitando así su uso en educación cuando lo que se pretende es enseñar el proceso de resolución. Una enorme ventaja que permite dar un nuevo enfoque a la enseñanza de la probabilidad es utilizar programas, como Fathon, para introducir la probabilidad mediante un enfoque frecuencial. En este caso el educador tendría que planificar cuidadosamente su curso con el empleo de estos paquetes sobre todo si el curso es introductorio.

Los manipuladores simbólicos, nos proveen de gráficas de funciones de una o dos variables, resolución de derivadas e integrales en forma simbólica o numérica con un alto grado de precisión, resolución de ecuaciones algebraicas y diferenciales, cálculo de raíces, operaciones aritméticas, algebraicas y complejas, resolución de sistemas lineales de ecuaciones, operaciones matriciales, etc. Esta categoría incluye Derive, Mathematica, Maple, y MatLab, como los más usuales. Cabe mencionar que las operaciones se realizan con una efectiva aritmética que minimiza los errores de redondeo, sin embargo, en algunas ocasiones el uso de comandos resulta complicado. Claramente, una de las mayores dificultades al usar los manipuladores simbólicos en clase es que al resolver un determinado problema, mediante el uso de alguno de ellos, el proceso de solución permanece oculto y muchas de las veces el rescatar este proceso es precisamente una parte importante de las metas de un curso. De manera que la mediación didáctica es nula si el profesor no diseña las secuencias de aprendizaje (Stroup 2002; Mejía 1996; Cuevas 1999). Sin embargo, el uso adecuado de estos programas potencializa fuertemente la instrumentación de propuestas didácticas principalmente para problemas que requieran de un alto número de operaciones aritméticas y simbólicas como lo muestra Heid (1984) al desarrollar un curso de cálculo diferencial utilizando Maple, entre otros ejemplos.

### **II) Herramienta sofisticada que permite la creación de ambientes de aprendizaje**

Dentro de esta categoría hemos anotado las subcategorías: Micromundos, Ambientes de Aprendizaje Inteligentes, y entre ellos los Sistemas Tutoriales Inteligentes y el Entorno

Computacional para el Aprendizaje y la Enseñanza de la Matemática (ECAEM).

### **Micromundos.**

Los micromundos son diseñados con el fin de introducir conceptos matemáticos partiendo de que el alumno debe tener un control completo sin supervisión del profesor. La filosofía de aprendizaje es mediante juegos, sin embargo aunque se está jugando no es claro qué se está aprendiendo. A pesar de que se tienen experiencias con su manejo (Hatfield 1984, Self 1983) que muestran avances, se tiene la limitante de requerir que tanto el profesor como el alumno aprendan a programar o al menos cierto grado de dominio de programación en una computadora. El mismo problema presentan los lenguajes de programación desarrollados con el fin de facilitar la enseñanza de las matemáticas; como LOGO, ITSEL, VB, C++, estos parten del supuesto que al aprender la sintaxis del lenguaje los alumnos desarrollan cierto tipo de habilidades matemáticas y lógicas que los habilitan en la resolución de problemas (Paper 1981). Algunos ejemplos de software diseñado con fines explícitamente educativos partiendo de las experiencias con micromundos son: Cabri, Geómetra, Hiperlogo, Geo-Lab, que nos proveen de una geometría dinámica en donde la modificación de parámetros de figuras geométricas vía algebraica, numérica y gráfica se realizan en forma inmediata con la visualización respectiva de las modificaciones en la figura o gráfica correspondiente.

La primera forma de comunicación del ser humano fue el lenguaje figurativo o por señas evolucionando hasta el lenguaje escrito. Hoy somos testigos de una nueva forma de comunicación que empieza a surgir: el lenguaje escrito-interactivo. Una muestra elocuente de esta forma de comunicación nos lo muestran Abreu y Ontiveros (2000), con la producción de programas en Java (applet's), llamados Descartes 2 y Descartes 3, que permiten la redacción de lecciones o textos de matemáticas interactivos en la red. Es decir, en una página HTML (una pantalla usual de Internet) se permite: escribir la definición de un objeto matemático y a la vez instalar una ventana (applet) con el objeto matemático definido (gráfica, función, proceso, etc.) al cual podemos manipular al tiempo de estar leyendo sus propiedades. Esto, sin lugar a dudas crea un paradigma y a la vez una etapa más dentro de la comunicación entre los seres humanos.

### **Ambientes de aprendizaje inteligentes.**

Por aprendizaje asistido por computadora entendemos aquellos sistemas de enseñanza basados en conducir al estudiante a través de ejercicios que se apoyan en la computadora y buscan evidenciar los procesos de cálculo y manipulación que realizan para comprender conceptos matemáticos. En esta categoría entran programas de Instrucción Asistida por Computadora (CAI), Aprendizaje Apoyado en la Computadora (CAL y CALM), los Sistemas Tutoriales Inteligentes (STI) y Aprendizaje Colaborativo Soportado por Computadora (CSCL). Aunque la lista no es exhaustiva, cada una de estas modalidades centra su atención en los procesos mediante los cuales el estudiante desarrolla problemas y ejercicios para adquirir una mejor comprensión de conceptos matemáticos; de manera que el modelo es lo que cambia para cada tipo de sistema. En esta categoría destacan los STI que son sistemas que implementan un

modelo de enseñanza a través de un mecanismo de evaluación de respuestas del estudiante a preguntas propuestas por el sistema, dependiendo de esta evaluación es el tipo de material (nuevo o remedial) que se presenta al alumno. Para guiar la interacción se implementa un modelo de error del estudiante, que se anticipa a las posibles faltas y aciertos del usuario al intentar resolver un problema. Para muchos autores esto sólo es posible mediante la combinación de la inteligencia artificial y las ciencias cognitivas, siendo esta la principal limitante para su desarrollo y evolución (Cuevas 1996; Burns 1988).

### **Sistema Tutorial Inteligente (STI).**

Los componentes esenciales de un STI son: El *módulo experto* que contiene el conocimiento del tema; su principal función es actuar como fuente de conocimiento que se desea transmitir, y incluye la generación de expresiones y respuestas; así como la evaluación para proporcionar información a otros módulos. El *modelo del estudiante*, diagnostica lo que el estudiante sabe, nutriéndose para ello del módulo experto, sincroniza las actividades con los otros módulos y se anticipa a todos los posibles errores y aciertos que un estudiante comete cuando resuelve un determinado problema (Anderson et.al.1990). El *módulo tutor*, identifica deficiencias en conocimientos del estudiante y selecciona estrategias para presentar material. Finalmente, el *ambiente instruccional* define las características de la presentación y comunicación, además de la interfaz usuario-máquina. Los inconvenientes son precisamente los paradigmas de este diseño, el plantear un modelo de estudiante que simule todas las posibles respuestas a un problema dado y que contenga todos los posibles errores que un estudiante puede cometer en cada paso del problema es algo imposible tanto desde el punto de vista computacional como cognitivo. Por otro lado, pretender emular mediante un programa de computadora el proceso de aprendizaje del ser humano resulta demasiado pretencioso. Un STI contempla al profesor fuera del proceso enseñanza aprendizaje; además la epistemología en que se basan es discursiva, por lo que considera al conocimiento como un tipo de objeto que puede ser entregado bajo ciertos mecanismos y se transmite vía discurso y replica de las “buenas soluciones” a problemas presentados por el tutor. Por otra parte, los módulos tutoriales presentados en los STI son rígidos y autoritarios impidiéndole al alumno experimentar con el sistema; además no toman en cuenta los diversos registros de representación para los conceptos salvo como ejemplo, pero no es componente importante de la interfaz ni del diseño. Así, la incompatibilidad con la estructura de los STI nos ha llevado a definir una nueva clase de sistema denominado Entorno Computacional para el Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática (ECAEM).

Los componentes esenciales de un **ECAEM** son: Un *módulo experto*, que contiene el conocimiento de un experto del tema, generación de expresiones y respuestas, algoritmos eficientes y formas para recibir y proporcionar información a otros módulos. Por ejemplo, para el proyecto de acción práctica de construir el esbozo gráfico de una función racional, éste contiene algoritmos para el cálculo de: dominio, raíces, signo, paridad, límites, asíntotas verticales y horizontales, primera y segunda derivada, concavidad, extremos relativos y absolutos, etc. De manera que cuando un usuario introduce una respuesta a un concepto, primero pasa por el filtro sintáctico y semántico, y después el sistema evalúa la respuesta con todos los elementos calculados antes de que el usuario escriba la respuesta respectiva. Un *modelo estadístico de error del estudiante*: Entre sus funciones están hacer hipótesis acerca de los errores más frecuentes que un estudiante puede cometer, al resolver un determinado problema.

Esta hipótesis se formula con base en la experiencia docente y en los errores que estadísticamente son los más frecuentes en el estudiante. Una vez detectado y marcado el error con la mayor precisión posible, el módulo tutor provee un mensaje de error que incluye una breve sugerencia u orientación, esperando permita al usuario enmendar su error. El *módulo tutor* selecciona las estrategias para presentar el conocimiento a enseñar. El plan, la estrategia de presentación y la dosificación de los contenidos se rigen bajo un modelo didáctico definido previamente y transparente para el usuario. El estudiante podrá interactuar con el ECAEM en forma individualizada o bajo la tutela de un profesor; el tutor sugiere al estudiante una estrategia para abordar el tema pero no impone forma alguna de proceder. La presentación de los diversos temas se realiza mediante problemas generados en forma aleatoria, que al resolverse son evaluados por el tutor. Por ejemplo, se sugiere que para construir la gráfica de una función racional se aborden los temas de forma gradual: dominio, raíces, signo, paridad, límites, derivada, etc; se recomienda revisar cada tema en forma directa y posteriormente de forma inversa y gráfica, pero si el alumno explora en otro orden no perjudica su secuencia de aprendizaje. Es responsabilidad del tutor dotar al usuario de herramientas particulares para resolver un determinado problema. Por ejemplo, ordenar datos, evaluar funciones en forma puntual o en un rango de valores, zoom, calculadora, operador de expresiones algebraicas, etc. También es responsabilidad del tutor dotar al usuario de una breve pero suficiente información académica para resolver el problema propuesto, esta información cambia de acuerdo al tipo de problema e incluso al nivel de resolución en que se encuentre el alumno. Opcionalmente el módulo tutor pondrá a disposición del estudiante un texto electrónico para una consulta más amplia por el usuario. Además del apoyo y el libro se dispone de una ayuda conteniendo una breve información acerca del tipo de respuesta solicitada o información para navegar en el sistema. Las opciones de ayuda están disponibles en cualquier momento y el usuario podrá recurrir optativamente a ellas y regresar al problema que esta resolviendo. El tutor nunca resuelve el problema propuesto, ni tampoco interrumpe el trabajo del estudiante; y sólo actúa cuando el estudiante da entrada a una respuesta o solicita información. Finalmente, el *ambiente instruccional*, define las características de presentación y comunicación, además de la interfaz usuario-máquina, que deben ser lo más naturales posibles. Esta interfaz deberá permitir al usuario escribir las diversas expresiones matemáticas como si lo hiciera con lápiz y papel. También se encarga de mandar un mensaje, a solicitud del usuario, de las formas de navegar en el sistema y los códigos para escribir las expresiones solicitadas.

### **Algunos resultados.**

CalcVisual es un sistema cuyo objetivo es apoyar la enseñanza del cálculo diferencial. CalcVisual puede ser un ayudante de profesor que puede compartir con el profesor las responsabilidades del mismo en un curso tradicional de cálculo diferencial. CalcVisual puede generar problemas en forma aleatoria, con grado de dificultad graduada, aceptar problemas propuestos por los estudiantes y en cualquier caso supervisar y evaluar las diversas respuestas del estudiante a todos los niveles. La experimentación más reciente con el sistema se llevó a cabo en un curso de Cálculo diferencial impartido en la UAP Valle de Chalco, UAEM, en el segundo semestre de la licenciatura en Informática Administrativa. El grupo estuvo conformado por 48 alumnos provenientes de distintas opciones de bachillerato, donde el 80% acreditó un curso de cálculo previamente. De la aplicación de un examen diagnóstico se comprobó que el 85% no recuerda la parte operativa de un curso de cálculo y mucho menos la conceptual. La asignatura comprende cuatro horas de clase por semana, de las cuales dos se

dedicaron a impartir la clase de forma tradicional y las otras dos horas se le delegaron a CalcVisual. Los alumnos trabajaron solos de dos a tres en por computadora. Las evaluaciones, para detectar el grado de avance conceptual y operativo incluían preguntas como (ilustramos sólo el caso de raíces): Calcular las raíces reales de un polinomio: por tanteo, de forma gráfica y por manipulación algebraica. Además de incluir operaciones inversas en preguntas como: a partir de dar el valor de las raíces, se le solicitó encontrar un polinomio que incluya a dichos puntos como sus raíces.

Finalmente, en el salón de clase se plantearon ejercicios de aplicación en donde para resolverlos se requiere encontrar las raíces de un polinomio. Cabe mencionar que algunos alumnos aventajados al terminar los ejercicios planteados de algún tema, en CalcVisual, exploran el siguiente concepto por si mismos, sin esperar que el profesor los ilustre en su clase; es decir, siguen el curso de acuerdo a su propio ritmo de aprendizaje. Los resultados de estas evaluaciones constituyen evidencias que hacen ver que el grado de comprensión de los conceptos del cálculo diferencial aumenta considerablemente.

## **Conclusiones**

Partiendo del hecho de que toda forma de conocimiento está mediada por la acción de una herramienta material o simbólica, y que los programas o sistemas computacionales de manipulación simbólica y gráfica son asequibles por los estudiantes proponemos que ésta tecnología se incorpore de manera consciente y razonada en los cursos de cálculo diferencial. La incorporación de la computadora y o calculadora deberá ser más como una herramienta cognitiva que como un “calculador” o graficador de funciones,. Esto requiere que el profesor oriente el trabajo proponiendo actividades bajo un esquema didáctico que le permita evaluar el avance de sus alumnos; que defina tiempos y espacios para el sistema y para su clase normal, así como precisar las secuencias de actividades mediante ejemplos y contraejemplos que abarquen temas completos y que presenten dinámicas a desarrollar por los alumnos. Es decir, establecer con claridad el contrato didáctico entre la computadora, el profesor y el alumno. Una propuesta como la del ECAEM facilita al docente la incorporación de la computadora en el aula y ayuda a que el estudiante construya importantes conceptos del cálculo diferencial e integral, al integrar de manera significativa aspectos didácticos al software, además de proponer un uso adecuado de la computadora en el aula. Evidentemente que todo software didáctico bien empleado puede ayudar a una promoción de constructos matemáticos, pero requiere de un cuidadoso diseño de las actividades a desarrollar por los alumnos.

## **Referencias Bibliográficas**

- Abreu, J. y Ontiveros, M. (2000). Descartes 2 y 3. [En línea] Disponible en: [www.cimat/jlabreu/descartes2](http://www.cimat/jlabreu/descartes2).
- Anderson, J., Corbett, A. y Petterson, E. (1990). Student modeling and tutoring flexibility in the Lisp Intelligent Tutoring System. In C. Frasson and G. Gauthier (Eds.) *Intelligent tutoring systems: At the crossroads of artificial intelligence and education*. Norwood, NJ: Ablex Publisher.

- Asiala, M., Cottrill, J., Schwingendorff, K. y Dubinsky, E. (1997). The development of students, graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*. 16(4): 339-431.
- Burns, H. y Capps, C. (1988). Foundation of Intelligent Tutoring Systems: An Introduction. In Polson J. y Richardson J. (Eds). *Foundation of Intelligent Tutoring Systems*. LEA, USA.
- Cuevas, C. (1996). Sistemas tutoriales Inteligentes. *Investigaciones en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamérica*. (9), 149-172.
- Cuevas, C. (1999). Hacia una clasificación de la computadora en la enseñanza de las matemáticas. *Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica*. (14), 273-288.
- Cuevas, A. y Pluvinage, F. (2003). Les projects d'action pratique, éléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques. *Annales de didactique et sciences cognitives*. (8), 975-999.
- Cuevas, A. y Mejía, H. (2003). Cálculo Visual. México: Oxford University Press.  
*Resequencing skills and concepts in applied calculus through the use of computer as tool*. Ph. D. Thesis. Pennsylvania University, USA.
- Forgasz, H. (2002). *Computers for learning mathematics: gendered beliefs*. PME XXVI, Jul 21-26, Norwich, UK, page 368.
- Hatfield, L. (1984). *Toward comprehensive instructional computing in mathematics*. Computer in Mathematics Educations. National Council of Teacher of Mathematics. Reston, Virginia.
- Lozano, I. (2000). *A dynamic software visualization tool for calculus instruction at the collage entry-level*. PME XXII, Oct 7-10, Arizona, USA, page 703.
- Mejía, H. (1996). Alternativas de desarrollo de software educativo en México. Iberoamérica (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa*. (pp. 265-276).
- Paper, S. (1981). *Desafío de la mente, computadoras y educación*. Ediciones Galápagos. Argentina.
- Self, J. & O'Shea, T. (1983). "Learning and Teaching with Computers". *Artificial Intelligence in Education*. USA: Prentice Hall.
- Simmt, E. (1997). Graphics calculators in High School Mathematics. *Journal of Computer in Mathematics and Science Teaching*. (16), 269-289.
- Stroup, W. (2002). Understanding Qualitative Calculus: A structural synthesis of learning research. *Internacional Journal of Computers for Mathematics Learning* (7), 167-215.
- Chang, T. y Baskin, A. (1988). Learning companion system. In C. Frasson and G Gauthier (Eds.), *Intelligent Tutoring Systems*. USA: Ablex Publisher Corporation.