ENCONTRANDO REGULARIDADES CON NÚMEROS

Lyda Constanza Mora Mendieta
Johana Andrea Torres Díaz
Profesoras Universidad Pedagógica Nacional.

Resumen.

En general, cuando se construye conocimiento matemático, hay momentos en los que es importante detenerse a observar lo que se ha hecho, quizás, esa observación concluye en la determinación de alguna regularidad, útil para hacer conjeturas y avanzar en la construcción del saber que pretendemos. En este cursillo presentamos algunas actividades que hemos seleccionado, de aquellas que desarrollamos con nuestros estudiantes de primer y segundo semestre en la Universidad Pedagógica Nacional y que les han permitido volar con su imaginación, hacer hipótesis, descubrir relaciones, enunciar "teoremas" y fascinarse con el trabajo matemático.

La metodología de trabajo en este cursillo tiene como uno de los propósitos, simular una "micro sociedad científica "; es decir, mostraremos que la actividad matemática no consiste

"··· solamente en aprender definiciones y teoremas, para reconocer el momento de utilizarlos y aplicarlos ··· hacer matemáticas implica ocuparse de problemas. Sólo se hacen matemáticas cuando nos ocupamos de problemas, pero se olvida a veces que resolver un problema no es más que una parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrar soluciones. Una buena reproducción por el alumno de una actividad científica exigiría que intervenga, que formule, que pruebe, que construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que son útiles, etc. ··· Por supuesto, se trata de una simulación que no es la "verdadera" actividad científica, como tampoco el saber presentado de forma axiomática constituye el "verdadero saber."
(Brousseau, 1986).

Aquel quién dirige una actividad, generalmente el profesor, no es quien da respuesta a los interrogantes planteados por los estudiantes, pero sí propone cuestionamientos a resolver y discutir en el aula, así como situaciones reales y abstractas que requieran de actividad matemática permanente, por lo cual la participación activa, el buen manejo del error y el espíritu inquisitivo es parte fundamental para llevar a cabo este curso.

Contamos con tres sesiones de trabajo, cada una distribuida de la siguiente manera: Regularidades con Números Naturales escritos en bases numéricas distintas a diez, Regularidades con números naturales a la manera de Pitágoras y Regularidades con números racionales e irracionales en sus representaciones como fracción y como fracción continua infinita, respectivamente[1]. En este artículo sólo presentaremos las actividades a desarrollar con los participantes del cursillo, pues los resultados dependen del trabajo realizado en las diferentes sesiones.

PRIMERA SESIÓN

Actividad 1.

Con base en la siguiente adición escrita en base diez

$$\begin{array}{r} 123456789 \\ 123456789 \\ 987654321 \\ 987654321 \\ +2 \\ \hline 2222222222 \end{array}$$

Construya adiciones similares cuyo resultados sean números cuyas cifras sean sólo unos, sólo treses, etc. Repita el ejercicio en base 7. Enuncie un resultado general para cualquier base.

[1]La mayoría de las actividades aquí presentadas se encuentran en el libro: LUQUE, C. et al. Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Contar e Inducir. Universidad Pedagógica Nacional. Ed. Antropos. 2002.

Actividad 2.

1. En base diez, un número es par si la cifra de las unidades lo es. ¿Es válido este criterio en otras bases pares? Observe la siguiente tabla y enuncie un criterio de divisibilidad por dos para bases pares.

MÚLTIPLOS DE DOS.

	BASE			
2	**4**	**6**	**8**	**10**
0	0	0	0	0
10	2	2	2	2
100	10	4	4	4
110	12	10	6	6
1000	20	12	10	8
1010	22	14	12	10
1100	30	20	14	12

2. Ahora observe esta tabla, donde se encuentran algunos números pares en base 3, 5, 7, 9 y 11. Encuentre alguna regularidad, exprésela y justifíquela.

	BASE			
3	5	7	9	11
0	0	0	0	0
2	2	2	2	2
11	4	4	8	8
101	20	13	11	A
110	22	15	15	13
121	31	22	17	15
130	33	24	20	17

3. Escriba listas de múltiplos de 3 en bases 3, 6, 9 y los demás múltiplos de tres y enuncie un criterio de divisibilidad por 34. Luego, en bases 4, 7, 10, 13, etc. Y finalmente, en bases 5, 8, 11, etc.

Actividad 3.

1. Halle cinco soluciones de las siguientes ecuaciones. Enuncie la regularidad que encuentra entre una y otra solución de una misma ecuación:

   (a) $4x - 3y = 1$, en base cinco.

   (b) $12x - y = 20$, en base seis.

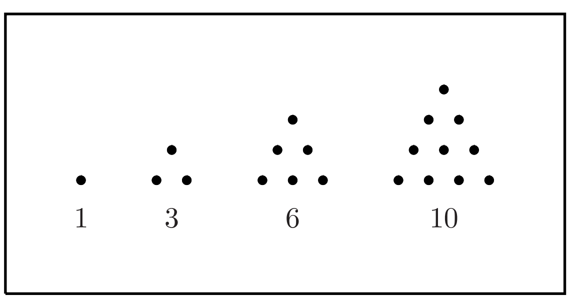
   (c) $2y - 5x = 245$, en base seis.

2. Con base en los resultados obtenidos en **A**. haga una conjetura en la que determine cómo encontrar las soluciones, de ecuaciones como las anteriores, dada una solución, e intente probarla.

SEGUNDA SESIÓN.

Actividad 1.

Los discípulos de Pitágoras representaban los números por medio de agujeros en la arena o por medio de piedras. Así por ejemplo los **números triangulares** los formaban uno del anterior, añadiendo líneas de piedras conformando triángulos equiláteros como se muestra en la siguiente figura.



Los diez primeros números triangulares son:

n	Triangulares (T_n)
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
10	55

1. Si la letra n representa un número natural cualquiera y el n-ésimo número triangular lo notamos T_n , escriba una fórmula para T_n.

2. Sume números triangulares consecutivos y escriba una fórmula para la suma del n-ésimo número triangular con el siguiente.

3. ¿Siempre dos números triangulares consecutivos tienen un factor en común? Justifique su respuesta

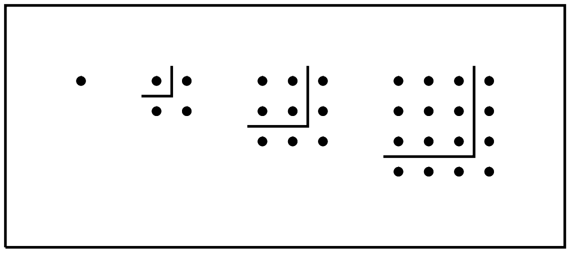
4. Hay casos en que la suma de dos números triangulares es un número triangular; como se muestra enseguida:

$$\begin{array}{cccc} T_3 & T_5 & = & T_6 \\ T_4 & T_9 & = & T_{10} \\ T_5 & T_{14} & = & T_{15} \\ T_5 & T_{20} & = & T_{21} \end{array}$$

   Enuncie una fórmula que unifique estas observaciones.

Actividad 2.

Los **números cuadrados** son los que corresponden al número de puntos que se pueden colocar formando un cuadrado. Cada uno de ellos puede ser construido a partir del anterior añadiéndole un borde de la forma û. (Para los griegos este borde tenía especial significado y se le llamó **gnomon**).



Los primeros números cuadrados son: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 $\cdots$. Su expresión general es n^2.

1. Observe la figura anterior. Formule alguna hipótesis acerca de la suma de los n primeros números impares.

2. Los números cuadrados y los triangulares están relacionados, si miramos la figura anterior, un número cuadrado puede expresarse como la suma de la cantidad de puntos que se encuentran sobre rectas paralelas a una diagonal. Con esto obtenemos la secuencia:

$$\begin{gathered} 12 = 1 \\ 22 = 1 + 2 + 1 \\ 32 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1 \end{gathered}$$

   Escriba una fórmula que describa esta situación.

3. Otra conjetura de Fermat, debida en realidad a Bachet, afirma que todo número, o es un cuadrado, o es la suma de dos, tres, o cuatro cuadrados.

   En efecto tenemos que:

$$\begin{array}{ll}
1 = 1^2 & 10 = 1^2 + 3^2 \\
2 = 1^2 + 1^2 & 20 = 2^2 + 4^2 \\
3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 & 30 = 12 + 2^2 + 5^2 \\
4 = 2^2 & 40 = 2^2 + 6^2 \\
5 = 1^2 + 2^2 & 50 = 5^2 + 5^2 \\
6 = 1^2 + 1^2 + 2^2 & 60 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 7^2 \\
7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 22 & 70 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 8^2 \\
8 = 2^2 + 2^2 & 80 = 4^2 + 8^2 \\
9 = 1^2 + 2^2 + 2^2 & 90 = 3^2 + 9^2
\end{array}$$

Intente una descomposición semejante para números un poco más grandes y trate de encontrar alguna regularidad.

4. Hay números cuadrados que se pueden escribir como la suma de otros dos números cuadrados. Por ejemplo, el quinto número cuadrado (que es 25), se puede escribir como la suma del tercero y el cuarto (9 + 16); esto lo expresamos más brevemente así:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

una vez que se tiene una terna por ejemplo la formada por los cuadrados de 3, 4, 5 respectivamente, pueden formarse infinitas de ellas tomando sus múltiplos, puesto que si k es un número natural cualquiera, entonces

$$(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$$

Nos interesan entonces las soluciones reducidas, que como 3, 4, 5 no tienen divisores comunes.

Otras triadas son:

5, 12 y 13;
7, 24 y 25;
9, 40 y 41;
11, 60 y 61;

Observemos la secuencia de formación:

$$\begin{gathered} 3^2 + 4^2 = 5^2 \\ 5^2 + 12^2 = 13^2 \\ 7^2 + 24^2 = 25^2 \\ 9^2 + 40^2 = 41^2 \\ 11^2 + 60^2 = 61^2 \end{gathered}$$

(a) Encuentre una expresión para la n-ésima triada pitagórica de esta secuencia.

(b) Encuentre otras triadas pitagóricas cuya secuencia de formación sea distinta a la enunciada.

(c) Si a, b, c son múltiplos de 3, 4 y 54 respectivamente, ¿cómo representar c en términos de a y b?. Modifique el problema anterior si a, b y c son múltiplos de 5, 12 y 13. Enuncie un resultado similar para otras triadas pitagóricas. ¿Existe una regla general?

5. Observemos las siguiente figura :

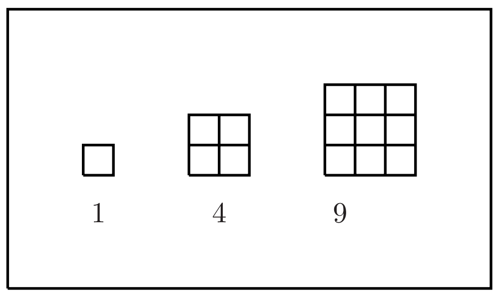


Figura 4.

En la primera aparece solamente un cuadrado de lado 1.
En la segunda hay 4 cuadrados de lado 1 y 1 de lado 2.
En la tercera hay 9 cuadrados de lado 1, 4 de lado 2 y 1 de lado 3.

¿Cuántos cuadrados deben haber en un cuadrado de lado 4? ¿Cuántos en un tablero de Ajedrez?

Actividad 3.

Construyamos **números cuadrado-piramidales** haciendo una pirámide de base cuadrada colocando n^2 naranjas en ella; en la siguiente capa de encima colocamos $(n-1)^2$ naranjas, y así sucesivamente hasta terminar con una naranja en la cúspide. *¿Cuál es el número total de naranjas en la pirámide?*

Estudie el problema de encontrar el número de triángulos equiláteros que se forman en un triángulo equilátero de lado 1, 2, 3, $\cdots$, 10. En la siguiente figura se muestra el caso para un triángulo equilátero de lado 4.

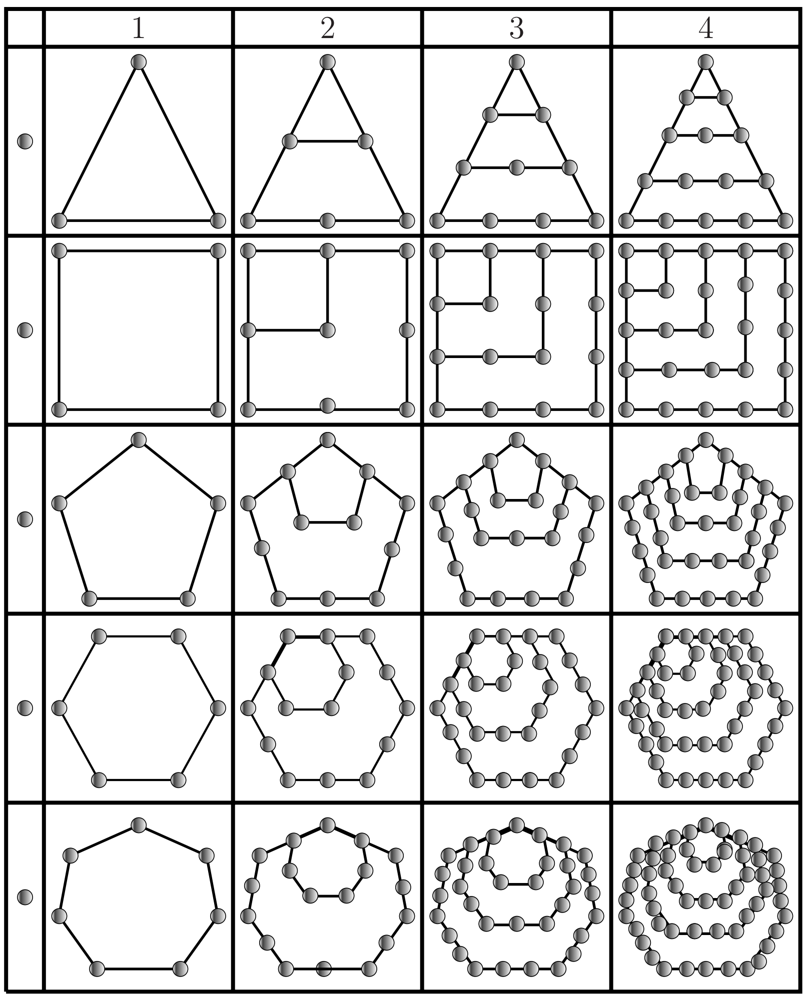
Actividad 4.

Se construyen números con las formas de otros polígonos regulares como pentágonos, hexágonos, etc.

El primer número pentagonal es el uno; el segundo, cuyos puntos forman los vértices de un pentágono, es el 5; el tercero es $1 + 4 + 7 = 12$ y así sucesivamente 22, 35, 51, 70 son números pentagonales.

En la siguiente figura se encuentra la secuencia de formación de estos números.

1. Encuentre una fórmula para el n- ésimo número pentagonal. Análogamente, encuentre una expresión general para los números hexagonales $(1, 6, 15, 28, \cdots)$

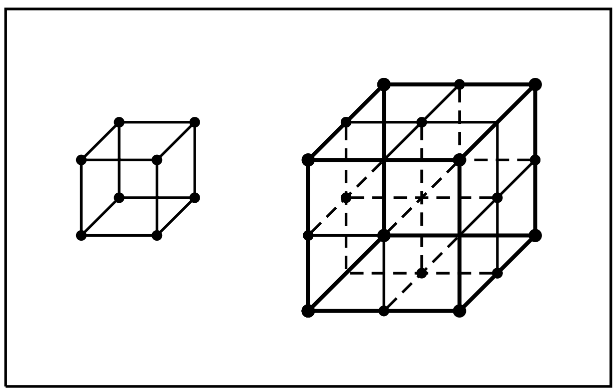


2. Encuentre una fórmula para el n-ésimo número poligonal asociado a un polígono regular de p lados.

Actividad 5.

Ubiquemos puntos en el espacio formando vértices de sólidos conocidos. Un primer ejemplo de ello se encuentra en los números cúbicos.
Estos son los números que representan a la cantidad de puntos que pueden disponerse en una red cúbica, como se muestra en la próxima figura. Los primeros son:

$$1,\ 8,\ 27,\ 64, \cdots,\ n^3$$



1. Observe

$$\begin{aligned} 8 &= 3+5 \\ 27 &= 7+9+11 \\ 64 &= 13+15+17+19 \end{aligned}$$

   Escriba 125 como una suma similar y enuncie una regla general.

2. Otra curiosidad de los números cúbicos la observamos en la siguiente secuencia:

$$\begin{gathered} 8 = 4+2+2 \\ 27 = 9+3+3+3+9 \\ 64 = 16+4+4+4+4+16+16 \\ 125 = 25+5+5+5+5+5+25+25+25 \end{gathered}$$

Escriba los siguientes tres números cúbicos de esta forma y enuncie su regularidad.

3. Una manera de relacionar los números cuadrados con los números cúbicos se encuentra en la siguiente secuencia

$$
\begin{gathered}
1^2 = 1^2 \\
2^2 = 2^3 - 2^2 \\
3^2 = 3^3 - 3^2 - 3^2 \\
4^2 = 4^3 - 4^2 - 4^2 - 4^2
\end{gathered}
$$

Exprese 7^2, 15^2 y otros números de esta forma. Proponga una explicación.

TERCERA SESION.

Actividad 1.

1. ¿En cuáles bases $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ tienen como resultado una expresión n-mal finita?

2. ¿Existe alguna base en la que $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ tengan como resultado una expresión n-mal periódica de 1 cifra?, ¿de 2?, ¿de 3?, ¿de k? Justifique.

3. Repita el ejercicio anterior con $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{7}$. Procure una generalización.

Actividad 2.

Dada la siguiente fracción continua infinita:
Escriba algunas reductas en forma de fraccionario y en forma decimal,

1. ¿A qué número se aproxima esta fracción continua?

2. Exprese una regularidad en la sucesión de las fracciones correspondientes a la reductas de la fracción continua en forma de fórmula de recurrencia.

3. Realice el mismos tratamiento para la siguiente fracción continua

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

Actividad 3.

Observe las siguientes igualdades y formule una conjetura:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= [1; 2, 2, 2, 2, \cdots] \\
\sqrt{5} &= [2; 4, 4, 4, 4, \cdots] \\
\sqrt{10} &= [3; 6, 6, 6, 6, \cdots] \\
\sqrt{17} &= [4; 8, 8, 8, 8, \cdots]
\end{aligned}$$

Referencias

[1] CARO, V. *Los números: su historia, sus propiedades, sus mentiras y verdades*. Ed. Minerva. Bogotá. 1936.

[2] LUQUE, C. , MORA, L. y PÁEZ, J. *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Contar e Inducir*. Universidad Pedagógica Nacional. Ed. Antropos. Bogotá, D.C. 2002.

[3] *Aproximación a los números racionales positivos.* Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. 2001

[4] TAHAN, M. *El hombre que calculaba.* Ed. Panamericana. Bogotá. 1994.