ALGUNOS ELEMENTOS A TENER EN CUENTA EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA PARA LOS NIVELES BÁSICOS

José Reinaldo Montañez Puentes.
Universidad Nacional

Gil Alberto Donado Núñez.
Universidad Pedagógica Nacional

Resumen.

Se considera que los problemas son el centro de atención del currículo y por tanto de la enseñanza y evaluación de la matemática. Plantear y resolver problemas potencian la comunicación y la argumentación y llevan consigo procesos de investigación propios del quehacer matemático, esto es, propician la elaboración de conjeturas, manipulación de objetos matemáticos, elaboración de definiciones, construcción de teoremas y validación de los mismos. En este trabajo se propone una serie de problemas en esta dirección que pueden ser llevados al aula, adaptándolos a diferentes niveles de la educación básica.

Introducción.

Son propósitos de la educación básica en matemáticas y específicamente en la geometría, el brindar a los estudiantes la oportunidad de vivenciar los procesos que normalmente desarrollan los geómetras. También es un lugar común la necesidad de la experimentación y manipulación de objetos que permitan establecer conjeturas, las cuales una vez analizadas, dirigen al estudiante a un acercamiento a la demostración, método del cual es prototipo la geometría Euclidiana.

Involucrar a los estudiantes en la resolución de problemas que, utilizando los contenidos centrales de la geometría euclidiana, faciliten la adquisición de competencia geométrica, se convierte entonces en un reto para todos los que de una u otra forma estamos ligados con la educación.

Tomando como base el hecho de que a través de la matemática se contribuye entre otros al desarrollo del pensamiento del estudiante, proponemos una serie de problemas que apuntan a tal fin, haciendo notar que estos no son una secuencia de ejercicios para desarrollar un tema o en un curso específico, sino propuestas de ejemplos de actividades que deben adaptarse y ubicarse adecuadamente en el desarrollo del currículo propuesto por cada institución.

Es por esto que el presente trabajo pretende ilustrar con algunos ejercicios, diversas sugerencias de actividades que pueden ser implementadas en los niveles de educación básica, como herramienta de apoyo para facilitar tanto el aprendizaje de la geometría como para generar las condiciones que permitan al estudiante tener la experiencia de ejercitar procesos mentales que son característicos del trabajo geométrico, como analizar definiciones, explorar caminos para la solución de un problema geométrico, establecer regularidades, construir figuras geométricas, conjeturar propiedades y relaciones entre objetos geométricos y argumentar sobre la validez de las afirmaciones intuidas o encontradas en el desarrollo de las actividades [1]. Como podrá observarse, los elementos considerados en ésta propuesta son propios de la actividad matemática y en particular de la actividad geométrica, más aún, a pesar de su especificidad, son propios de cualquier área del conocimiento [6].

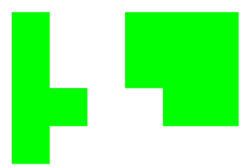
Ahora, como es sabido, algunos elementos que evidencian la comprensión de un concepto relacionan entre otros las diferentes formas de representación, los diferentes contextos donde se relacionen y el nivel de argumentación exigido. Desde este punto de vista es de anotar que el conjunto de problemas relacionados, están presentados en forma verbal, gráfica y simbólica entre otros, además de estar considerados en distintos contextos dentro de la matemática misma; así encontramos problemas que consideran el conteo, la geometría analítica y la misma geometría elemental. Los niveles de argumentación exigidos van desde el análisis de un caso particular que indague por la comprensión del enunciado hasta otros niveles que exigen el descubrir un patrón de regularidad tendiente a formular una conjetura que pueda ser demostrada [3].

Primer grupo de problemas.

En el siguiente conjunto de problemas [2], que pueden tener como material de apoyo un Geoplano, simplemente dibujos sobre una hoja o el manejo del plano cartesiano, si es que están los estudiantes familiarizados con él, al tiempo que se permite reforzar las fórmulas de áreas y perímetros, establecer las diferencias entre estos dos conceptos, reconocer diferentes tipos de figuras poligonales y distinguir algunas propiedades de los polígonos regulares, da pié a la ejercitación del establecimiento de regularidades (búsqueda de patrones) y la búsqueda de diferentes estrategias para lograr la solución.

A. En una cuadrícula como la siguiente, dibujar todas las figuras posibles, de tal manera que sus perímetros sean siempre de 12 unidades. (Los vértices deben estar todos sobre los puntos de las cuadrículas).

En la gráfica se muestran dos posibilidades.



Elaborar una tabla donde se consignen las áreas de cada una de las figuras dibujadas. ¿Qué comentarios le sugiere lo observado?

¿Es posible construir un triángulo con perímetro de 12 unidades? ¿Qué otras figuras no rectangulares se pueden construir?

El nivel de los ejercicios puede variarse tanto como se quiera, dependiendo del grupo a quien va dirigido, por ejemplo, con las mismas condiciones de la parte A, podría plantearse un problema como el siguiente:

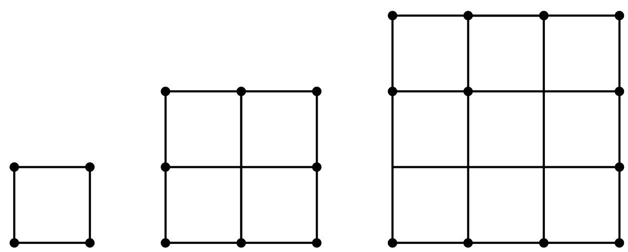
B. Determinar varias figuras que dejan sólo un punto en su interior.
¿Se puede establecer una característica de las figuras que dejan sólo un punto en su interior?
Haga una tabla en donde indique para cada una de las figuras seleccionadas, el área de las mismas y los puntos de la cuadrícula que se encuentran sobre su borde. ¿Observa alguna regularidad?

Conviene observar que los conceptos de área y perímetro se convierten en pretexto para el desarrollo de procesos mentales involucrados en la solución

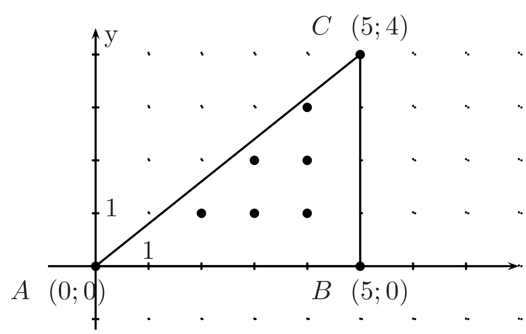
del problema, que son propios del quehacer matemático.
Problemas como este, dan pié a múltiples preguntas, por ejemplo, se podría intentar una generalización, buscando características de figuras que dejan en su interior dos, tres o más puntos.

Podrían formularse preguntas como las siguientes, enfatizando en el conteo asociado al uso de las geoplanos, cuadrículas o el plano cartesiano.

C. ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir en las siguientes cuadrículas, teniendo sus vértices sobre los puntos de intersección?



D. Un triángulo rectángulo tiene sus vértices en los puntos A = (0,0), B = (5,0) y C = (5,4).

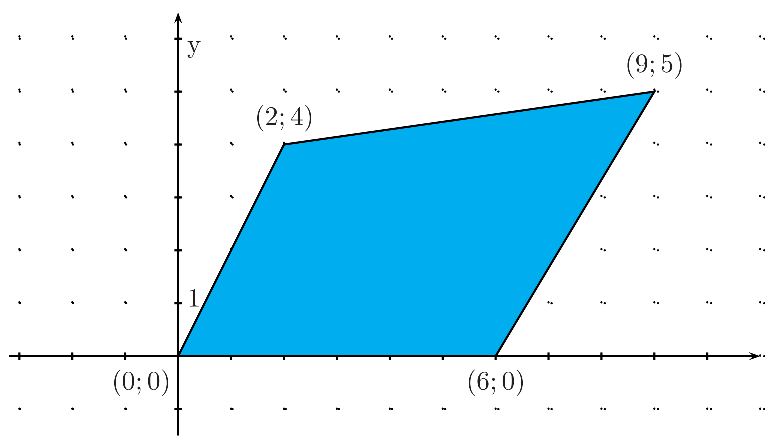


¿Cuántos puntos de coordenadas enteras quedan en su interior?
¿Cuántos puntos de coordenadas enteras quedan sobre la hipotenusa?
¿Cuántos, si el triángulo rectángulo tiene sus vértices en los puntos $A = (0, 0)$, $B = (m, 0)$ y $C = (m, n)$?

Segundo grupo de problemas.

Siendo uno de los principales aportes de la matemáticas el brindar modelos que permitan resolver problemas, la búsqueda de situaciones problemáticas que conlleven múltiples opciones para seleccionar caminos de solución, deben ser privilegiados. Nuevamente dentro del contexto de regiones poligonales y sus áreas, presentamos un problema en esta dirección.

En un plano cartesiano, dibujamos un polígono con coordenadas enteras. Por ejemplo, el cuadrilátero de vértices $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (9, 5)$ y $D = (2, 4)$.



A. Calcular el área del cuadrilátero $ABCD$.

Lo importante del ejercicio, es el análisis de las posibles diferentes estrategias utilizadas por los estudiantes. Es así como seguramente algunos darán el resultado descomponiendo un cuadrado circunscrito a la figura, o posiblemente descomponiendo la figura en figuras de área conocida, de pronto haciendo promedios de figuras inscritas y circunscritas, o quizás, utilizando algunos de los teoremas clásicos de la geometría que le permite reducir el cálculo del área de un polígono al cálculo del área de un triángulo.

B. Si las coordenadas de un polígono no son todas enteras, ¿cómo se podría calcular su área? (Se valen aproximaciones).

Tercer grupo de problemas.

Problemas en los que el estudiante deba efectuar construcciones con regla y compás le permiten al estudiante descubrir las propiedades de los objetos trabajados, caracterizarlos y conjeturar sobre las relaciones existentes entre ellos. Sin embargo, tal vez su mayor aporte a la enseñanza de la geometría se encuentra en la posibilidad que brinda al estudiante para acercarse a la argumentación propia de la geometría en particular y de la matemática en general, al ponerlo en contacto con un sistema axiomático concreto, donde los postulados son las acciones posibles a desarrollar utilizando como herramientas la regla y el compás euclideo y donde los teoremas son las construcciones realizadas.

En el siguiente problema se plantea una situación de construcción, se refuerzan las nociones relacionadas con los elementos de un triángulo y con sus líneas notables. Allí se evidencia el dibujo como una ayuda para resolver problemas y al mismo tiempo la independencia entre el resultado a demostrar y la forma como se determine su representación gráfica, esto es, hace ver la figura como una ayuda visual para el desarrollo de un problema y/o identificar relaciones entre los objetos construidos.

A. Dibuje un ángulo cualquiera y dibuje su bisectriz.

Tome dos puntos en la bisectriz y trace perpendiculares a cada uno de los lados del ángulo.
Establezca una conjetura.
¿Puede hacer una demostración?

B. Dibuje un ángulo cualquiera y determine un punto en el interior que equidiste de los lados del ángulo.
¿Está el punto sobre la bisectriz?
Establezca una conjetura. ¿Puede probarla?

C. Dibuje un triángulo cualquiera y trace dos de las bisectrices de sus ángulos.
¿La tercera bisectriz debe pasar por el mismo punto? ¿Por qué?

Trace las distancias del punto de corte de las bisectrices a cada uno de los lados.
¿Qué observa?
Establezca y pruebe su conjetura.

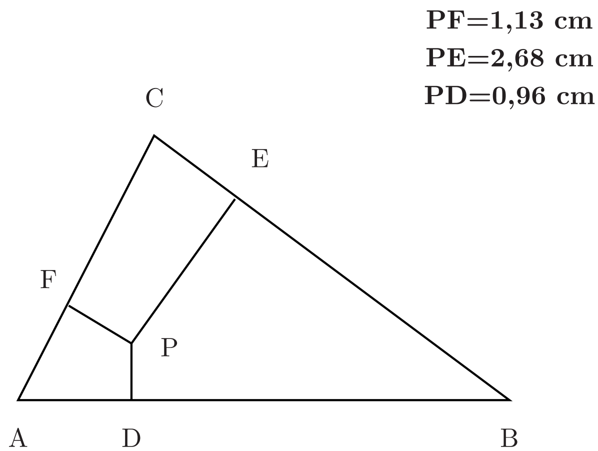
El uso de todo tipo de ayuda didáctica, cuando es posible, es conveniente incluirlo. Por ejemplo, así como se recomienda trabajar con el Geoplano, el tangram, etc, también se sugiere el uso del "Cabri–géomètre" o de cualquier otro programa computacional hecho para tal fin [4].

La posibilidad que ofrece este programa de hacer construcciones geométricas, de poder observar todos los casos posibles con el solo desplazamiento de un punto o un objeto geométrico y al mismo tiempo efectuar mediciones de los segmentos y ángulos construidos, pueden facilitar, el establecimiento de conjeturas, ejerciendo adicionalmente una influencia motivacional en los estudiantes hacia la necesidad de la demostración.

Así por ejemplo, una vez familiarizado el estudiante con el manejo del programa, cuando se le pide que:

- Dibuje un triángulo cualquiera y un punto en su interior.
- Trace los segmentos que corresponden a la distancia de este punto a los lados del triángulo.
- Calcule la suma de las distancias del punto a cada uno de los lados del triángulo.

La pantalla le mostrará una situación como la siguiente:



Resultado: 4,77 cm

Por supuesto, cada vez que mueve el punto hacia otra posición en el interior del triángulo, podrá observar la variación en la suma de las distancias.

Preguntas cuya solución no es inmediata desde el cálculo, podrán ser intuidas por los estudiantes a partir de la manipulación directa sobre el dibujo.

Es así como podrán conjeturar acerca de:

- ¿Para qué punto la suma de estas distancias es máxima?
- ¿Para qué punto la suma de estas distancias es mínima?

Si adicionalmente se les pide repetir el ejercicio sobre un triángulo equilátero, preguntas como:

- ¿Qué puede concluir?
- ¿Puede establecer una conjetura?.
- Intente la demostración.

permitirán que el estudiante descubra por sí mismo teoremas de la geometría y se sienta impulsado a buscar una justificación, ojalá una demostración formal, de las afirmaciones sospechadas a partir de la observación directa de que la suma de las distancias en el caso particular de los triángulos equiláteros no varía.

La manipulación de mediatrices, bisectrices y medianas, le permitirán acercarse con relativa facilidad a la identificación y caracterización de las líneas notables en un triángulo, distinguir la recta de Euler y muchos otros conceptos clásicos de la geometría elemental.

Cuarto grupo de problemas.

Consideramos que las definiciones en los niveles de educación básica, deben ser motivadas y en general deben presentarse como nuevos recursos a tener en cuenta para desarrollar nuevas teorías y resolver nuevos problemas.

Bajo la hipótesis que manifiesta la conveniencia de que todas las definiciones utilizadas sean presentadas de forma tal que tengan sentido para los estudiantes, se muestra una secuencia de ejercicios que permite una aproximación a la definición de las razones trigonométricas.

En particular este problema establece nexos y relaciones entre la geometría y la trigonometría, muestra de cierta manera la necesidad de un lenguaje nuevo que permita resolver problemas de una manera más rápida y lleva al estudiante a efectuar aproximaciones, al uso de la calculadora o una tabla de funciones trigonométricas.

- Construir sobre una cuadrícula un rectángulo de lados 3 y 4.
- Construir una ampliación de este rectángulo.
- Construir una reducción de este rectángulo.
- Resaltar en cada uno de los rectángulos, uno de los triángulos que se forman al trazar la diagonal y determinar las medidas de sus lados.

- Halle todas las posibles razones entre las dimensiones de los lados en cada triángulo.

- Compare estas razones. ¿Qué puede concluir?

Quinto grupo de problemas.

Así como se busca que las definiciones tengan sentido para los estudiantes, la aproximación a los teoremas requiere de un esfuerzo similar.

El ejercicio que se propone a continuación pretende propiciar en los estudiantes reflexiones que les faciliten un acercamiento a los criterios de congruencia de triángulos a partir de la manipulación directa de los mismos y redescubrir algunos resultados relacionados con las posibilidades de construcción de triángulos, ángulos y desigualdades en un triángulo.

En cada uno de los siguientes casos determine si es posible o no dibujar un triángulo de vértices A, B y C que cumpla las condiciones dadas.
En caso afirmativo, ¿es posible construir más de uno?

A. $m\angle A = 40°,\ AB = 5$ cm y $m\angle B = 80°$

B. $m\angle A = 25°,\ AB = 8$ cm y $BC = 5$ cm

C. $m\angle A = 85°,\ AB = 8$ cm y $BC = 5$ cm

D. $m\angle A = 50°,\ m\angle B = 30°$ cm y $ym\angle C = 100°$

E. $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm y $AC = 8$ cm

F. $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm y $AC = 15$ cm

G. $AB = 10$ cm, $m\angle A = 30°,$ y $AC = 8$ cm

H. $AB = 12$ cm, $m\angle A = 40°,$ y $m\angle C = 50°$

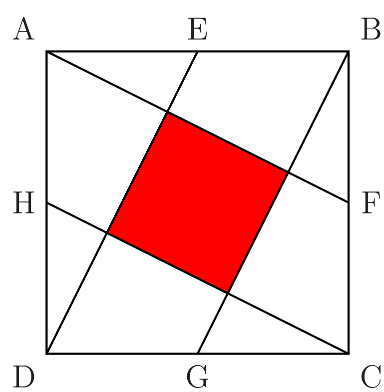
Sexto grupo de problemas.

En los diferentes problemas, propios de las olimpíadas de matemáticas, se encuentra un amplio espectro de problemas no rutinarios que se constituyen en un reto para los estudiantes que muestran un especial agrado por las matemáticas, sirviéndoles adicionalmente de motivación para su trabajo, mostrando algunos resultados interesantes, despertando el ingenio y la creatividad a través de las diferentes soluciones desarrolladas. Los problemas de este tipo ilustran y ponen en práctica la teoría y los resultados clásicos establecidos en la Geometría Euclidiana.

Considérese por ejemplo, el siguiente ejercicio tomado de la publicación "problemas de Geometría" editada por Olimpíadas Colombianas de Matemática [5]:

En la figura, E, F, G y H son los puntos medios de los lados del cuadrado $ABCD$.

1. ¿En qué proporción está el área del cuadrado sombreado con respecto del área del cuadrado grande?
2. ¿En qué proporción está el área del triángulo BGC con respecto del área del cuadrado grande?



Resulta curioso el siguiente enunciado en un texto de olimpíadas de matemática y es por eso que lo hemos seleccionado, ya que éste va en dirección contraria a las preguntas usuales formuladas en los ejercicios en los que a partir de una cierta información, se indaga por el resultado final.

En este ejercicio, conocido un resultado del cálculo de un volumen, se cuestiona por diferentes maneras como se pudo obtener. Intente la solución y observe la riqueza del ejercicio en las posibilidades que ofrece de recordar información significativa acerca de los sólidos.

3. Hallar tres cuerpos cuyo volumen sea 60 cm^3.

Referencias.

[1] *Estudios curriculares y de evaluación para la educación básica.* National Council of teachers os mathematics (NCTM). Traducción: José María Alvarez Falcon y Jesús Corrado Buitrago. Sociedad Andaluza de Educación Matemática (Thales). 1992.

[2] *Investigación en el aprendizaje de la geometría*. Myriam Acevedo y María Falk de Losada. Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Bogotá. 1996.

[3] *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*. Publicación del ministerio de Educación Nacional. Bogotá, 1998.

[4] *Matemáticas y ordenador. Cabri–Géomètre, un programa para trabajar en clase*. Antonio Pérez Jiménez. I:B: (Nervion) Sevilla.

[5] *Problemas de Geometría*. Publicación de la Universidad Antonio Nariño. Olimpiadas Colombianas de Matemática. 1980.

[6] *Resolución 2343. Publicación del Ministerio de Educación Nacional*. Bogotá 19997.