

# MEJORAR NUESTRO PROPIO CONOCIMIENTO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE UN EPISODIO DE LA PRÁCTICA – DISTINTOS FOCOS DE ANÁLISIS

## Improving our own knowledge through analysing an episode from teachers' practice – different focuses of analysis

C. Miguel Ribeiro<sup>a,b</sup>, M<sup>a</sup> Teresa González<sup>c</sup>, Ceneida Fernández<sup>d</sup>, Leticia Sosa<sup>a,e</sup>, Dinazar Escudero<sup>f</sup>, Miguel A. Montes<sup>f</sup>, Luis C. Contreras<sup>f</sup>, Eric Flores<sup>f</sup>, José Carrillo<sup>f</sup>, Nuria Climent<sup>f</sup>, Lorenzo Blanco<sup>g</sup>, Janeth Cárdenas<sup>g</sup>, Edelmira Badillo<sup>h</sup>, Pablo Flores<sup>i</sup>, José María Gavilán-Izquierdo<sup>j</sup>, Gloria Sánchez-Matamoros<sup>j</sup>, María de la Cinta Muñoz-Catalán<sup>j</sup>, Rocío Toscano<sup>j</sup>

<sup>a</sup>Centro de Investigación sobre el Espacio y las Organizaciones, Universidad del Algarve (Portugal), <sup>b</sup>UNESP (Rio Claro, Brasil); <sup>c</sup>Universidad de Salamanca; <sup>d</sup>Universidad de Alicante; <sup>e</sup>Universidad Zacatecas (México); <sup>f</sup>Universidad de Huelva; <sup>g</sup>Universidad de Extremadura; <sup>h</sup>Universidad Autónoma de Barcelona; <sup>i</sup>Universidad de Granada; <sup>j</sup>Universidad de Sevilla

### Resumen

*Una de las formas esenciales para lograr una mejor comprensión del contenido del conocimiento del profesor está ligada al análisis de su práctica. Esa práctica puede ser encarada de una forma amplia que no se limite sólo a la práctica de clase. Por otro lado, una discusión y reflexión sobre una misma situación de la práctica desde diferentes perspectivas teóricas y metodológicas puede contribuir también a una mejor comprensión no solo de la práctica sino también de los instrumentos metodológicos y teóricos en los que se sustenta el análisis. En esta comunicación presentamos y discutimos parte del trabajo desarrollado en la reunión intermedia del grupo de investigación sobre el conocimiento y desarrollo profesional del profesor de la SEIEM y cuyo foco de atención fue la discusión de las potencialidades del análisis de un mismo episodio desde cinco focos teóricos distintos.*

**Palabras clave:** *conocimiento y desarrollo profesional del profesor, análisis de la práctica; diferentes perspectivas teóricas*

### Abstract

*One of the core ways allowing obtain an ampler and deeper understanding on the content of teachers' knowledge concerns analysing teachers' practices. Such practice can be perceived in a broader way, not limited to classroom practice. On the other side, discussing and reflecting on the same situation with different theoretical and methodological approaches seems to contribute also for obtaining a deeper understanding not only on such practice but also on the used approaches for such analysis. In this paper we present and discuss part of the work developed in the intermeeting of the group research teachers' knowledge and development of SEIEM concerning the potentialities of analyzing one episode using five different theoretical approaches.*

**Keywords:** *teachers' knowledge and profesional development, analysing teachers practices, different theoretical perspectives*

### INTRODUCCIÓN

En los últimos años el foco de discusión en el grupo de investigación sobre el conocimiento y desarrollo profesional del profesor de la SEIEM ha acompañado las evoluciones y cambios del foco de interés de la investigación que se viene haciendo también en el ámbito internacional. Estos

Ribeiro, C. M., González, M. T., Fernández, C., Sosa, L., Escudero, D., Montes, M. A.,... Toscano, R. (2014). Mejorar nuestro propio conocimiento mediante el análisis de un episodio de la práctica – distintos focos de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 553-562). Salamanca: SEIEM.

cambios buscan, no solo, compartir el tipo de discusiones que se hacen en los foros internacionales (e.g., CERME, PME, ICME), sino contribuir a una reflexión más profunda de los trabajos que cada grupo de investigación está desarrollando en el contexto español. Así, de discutir aspectos de la investigación enfocada en la resolución de problemas o las creencias del profesor, en los últimos años se ha pasado a centrar la discusión en el análisis del conocimiento del profesor y las nuevas conceptualizaciones del conocimiento del profesor (e.g., Ribeiro y Carrillo, 2011).

En la actualidad un foco importante (pero no exclusivo) del trabajo que se desarrolla en este grupo está centrado en discutir y reflexionar aquellos aspectos del desarrollo profesional y del conocimiento que permitan una mejor comprensión de la práctica del profesor, de los factores que influyen en ella y cómo lo hacen. Ese foco nos podrá ayudar a mejorar no solo esa práctica sino también la formación e, incluso, la investigación que hace cada grupo de investigación al ser más conocedor y consciente de sus perspectivas. Esto potencia (al menos eso se espera) no solo considerar el propio foco de atención o la importancia de la investigación que se desarrolla individualmente sino también una gama de posibilidades de trabajos conjuntos, lo que permitiría tornar más visible (en términos locales y globales) lo que se hace y darnos cuenta de su importancia en los diferentes contextos.

Se considera que, siendo uno de los aspectos centrales del grupo el que se refiere al conocimiento del profesor, y buscando una mejor comprensión del contenido de ese conocimiento (y de los factores que pueden influir esa práctica), una *practice-based approach* (e.g., Jakobsen, Thames, Ribeiro y Delaney, 2012; Thames y Van Zoest, 2013) mediante un análisis desde múltiples perspectivas (teóricas/metodológicas) de la práctica de un profesor encarándolo como un estudio de caso instrumental (Stake, 2005), permitirá obtener algunas informaciones para alcanzar esa mejor comprensión. Aquí presentamos uno de los aspectos que nos llevan a decir que el trabajo del grupo ha acompañado las problemáticas internacionales en el área e, incluso, ha a ellas contribuido de forma substancial

Así, este artículo emerge de una propuesta presentada al grupo para analizar un mismo episodio de la práctica, desde distintas perspectivas teóricas (las que los diferentes grupos de investigación que participaron en el seminario están trabajando), discutiéndose en el seno del grupo cinco análisis y/o abordajes distintos que en algunos casos se han complementado. La cuestión que pretendíamos discutir puede ser enunciada del siguiente modo: ¿Qué diferencias y similitudes se pueden observar al analizar un mismo episodio de clase desde distintas perspectivas/abordajes teóricas y de qué modo ese tipo de trabajo puede contribuir a una mejor comprensión de la práctica y del conocimiento del profesor?

Empezamos presentando brevemente cada una de las perspectivas consideradas, justificando, después, algunas de las opciones metodológicas para la selección del episodio a analizar, así como algunos de los aspectos particulares que cada grupo, presente en el seminario, ha considerado para hacer ese análisis. Terminamos con la discusión del análisis realizado y algunas reflexiones y potencialidades de este tipo de trabajo cómo forma de contribuir a los avances en investigación, a la comprensión de la práctica y a la formación de profesores. Esto se ha realizado tanto para el análisis de una misma situación desde múltiples perspectivas cómo del proceso metodológico seguido y subsecuentes discusiones.

## **ALGUNOS APUNTES TEÓRICOS**

En este apartado presentamos algunos aspectos centrales de las distintas conceptualizaciones teóricas consideradas para analizar un episodio de la práctica. En primer lugar hay que clarificar que, por práctica entendemos todas las situaciones que se relacionan con la actuación docente y no solo con lo que ocurre en la clase. En ese sentido hemos adoptado la noción de *practice-based approach* (e.g., Thames y Van Zoest, 2013), incluyendo distintos contextos y formas de obtención de información (e.g., cursos de formación continuada, talleres, entrevistas).

Las cinco perspectivas teóricas consideradas con potencialidades para el análisis a realizar, se pueden agrupar en tres grupos: (i) conceptualizaciones/modelos del conocimiento del profesor; (ii) perspectiva socio cultural; (iii) la resolución de problemas cómo un contenido del conocimiento del profesor. Aunque seamos conscientes de la variedad de posibles abordajes y consideraciones teóricas (que enriquecerían el trabajo que se está haciendo en el propio grupo), nos centramos exclusivamente en estas ya que, como hemos mencionado, se refieren a las conceptualizaciones del conocimiento del profesor que están trabajando los distintos grupos presentes en el seminario. Eso conduce a que no se discutan otras conceptualizaciones también importantes del conocimiento del profesor, así como otras perspectivas que se refieren al objeto de estudio del trabajo que se presenta.

En las perspectivas correspondientes al primer grupo incluimos: *Knowledge Quartet* – KQ (Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005); *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008) y *Mathematics Teachers Specialized Knowledge* – MTSK (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013), derivadas todas ellas de las ideas de (Shulman, 1986).

El KQ constituye un cuadro conceptual para orientar la observación de las aulas en aquellos aspectos relativos al conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido para facilitar el análisis de las situaciones observadas. Se trata de un marco flexible que permite capturar las ideas importantes y encuadrarlas en un número no excesivo de categorías conceptuales que puedan ser eficaces en la investigación. Considera cuatro dimensiones: *fundamentación*, *transformación*, *conexión* y *contingencia*. La fundamentación incluye los conocimientos y comprensión de la matemática en sí misma y de la pedagogía específica de la matemática, así como las creencias acerca de las matemáticas, las finalidades de la matemática y las condiciones con las cuales los alumnos aprenden mejor matemáticas. Las otras tres dimensiones se refieren al contexto en el que se pone en práctica el conocimiento. Así la transformación realizada sobre el conocimiento a enseñar en formas pedagógicamente fuertes sería la segunda categoría. La conexión incluye la secuenciación del material para la enseñanza y una concienciación de las exigencias cognitivas de los diferentes tópicos y tareas así como el establecimiento de relaciones entre diferentes conceptos matemáticos y la contingencia es la capacidad de respuesta de un profesor en situaciones de aula imprevistas y la habilidad para “think on one’s foot” lo que incluye la capacidad de convencer, de fundamentar y de dar explicaciones esclarecedoras en situaciones imprevistas y no planificadas.

El MKT considera el *Subject Matter Knowledge* (SMK) y el *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) de Shulman divididos cada uno en seis sub dominios y asume como uno de los elementos centrales la especificidad del conocimiento del profesor en relación a otros profesionales que utilizan la matemática de forma instrumental. En el dominio del SMK se incluye un conocimiento común del contenido (CCK) que se refiere a un saber hacer (e.g., saber encontrar la respuesta correcta para determinada operación matemática así como determinar que otra respuesta es incorrecta); el conocimiento especializado del contenido (SCK) amplía el CCK e incluye, por ejemplo, un conocimiento que le permite al profesor saber el porqué de determinado error o utilizar distintas representaciones para un mismo contenido; el conocimiento en el horizonte (HCK) se refiere al conocimiento que le permite proyectar para el aprendizaje futuro lo que se hace en cada momento. En cuanto al PCK, incluye el conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT) que se relaciona con la secuenciación de las tareas, las estrategias y representaciones a utilizar; el conocimiento del contenido y de los alumnos (KCT) que está asociado a anticipar las dificultades/facilidades de los alumnos y el conocimiento del contenido curricular (KCC) que integra una visión completa de la diversidad de programas concebidos para la enseñanza en un determinado nivel de escolaridad así como la diversidad de materiales didácticos disponibles.

En cuanto al MTSK, siendo una “evolución” del MKT considera también tres subdominios en cada uno de los dos dominios de Shulman, pero asume que todo el conocimiento es especializado. En el dominio del Conocimiento Matemático se incluye el conocimiento de los temas (KoT) pero es más

que el conocimiento de la matemática como disciplina puesto que incluye también la matemática escolar, así como lo relativo a su fundamentación teórica y los procedimientos, estándar y alternativos o las distintas formas de representación; el conocimiento de la estructura matemática (KSM) que se refiere a los conocimientos que permiten al profesor establecer conexiones entre las matemáticas elementales y las avanzadas; y el conocimiento de la práctica de la matemática (KPM) que se corresponde con aquellas formas de hacer y proceder en matemáticas que un profesor ha de conocer para desarrollar su clase, como son las diferentes formas de demostrar, el significado de definición, axioma o teorema como elementos constituyentes de la matemática, o el conocimiento de la sintaxis matemática. Entre los subdominios del PCK se consideran: el conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemáticas (KMLS) que son los referentes que indican en qué momento debe aprenderse cada contenido y a qué nivel de profundidad; el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) que incluye conocer distintas estrategias que permitan al profesor impulsar el desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales, contemplando también aquí el conocimiento (formal o informal) de teorías de enseñanza de la matemática; y el conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM) que incluye el conocimiento de las dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de un concepto, así como el conocimiento de la forma en que los alumnos aprenden un cierto contenido, contemplando también el conocimiento (formal o informal) de teorías de aprendizaje de la matemática.

En (ii) se ha asumido la perspectiva socio cultural de Sfard (2007) que considera que los individuos pueden participar en diferentes tipos de actividades comunicativas, cada una de ellas con sus propias reglas denominadas *discursos*. En esta perspectiva se propone un conjunto de herramientas teóricas, características discursivas, para el análisis del discurso: palabras matemáticas, mediadores visuales, narrativas aceptadas y rutinas. Sfard (2007) las aplica específicamente al discurso matemático y aquí se amplía esta idea asumiendo su adaptación al discurso didáctico-matemático. Las palabras matemáticas se asocian con aquellas utilizadas en el discurso matemático, incluyendo términos no propiamente matemáticos con significado y utilidad matemático/a; los mediadores visuales son entendidos como los medios con los que los participantes del discurso identifican los objetos de los que están hablando y coordinan su comunicación, incluyendo los artefactos simbólicos; las narrativas asumidas se corresponden a cualquier texto hablado o escrito que da una descripción de los objetos, de las relaciones entre estos objetos o de las actividades con los objetos que están sujetas a la aceptación o rechazo (narrativas que se etiquetan como verdaderas por una comunidad dada); y las rutinas son patrones repetitivos bien definidos en las acciones de los interlocutores característicos de un discurso dado. Las regularidades específicamente matemáticas pueden ser identificadas mediante el uso de las palabras matemáticas y los mediadores matemáticos o mediante el proceso de crear y fundamentar narrativas asumidas.

Finalmente, la resolución de problemas (RP) es considerada, en el currículo de Matemáticas, como un contenido específico que los profesores debieran conocer y desarrollar en sus aulas (Blanco & Cárdenas, 2013), llegando a señalar que los contenidos asociados a la resolución de problemas constituyen la principal aportación que desde el área se puede hacer a la autonomía e iniciativa personal. Estos contenidos supondrían la reflexión sobre procesos comunes en la resolución de problemas (Puig, 2008) y su conocimiento complejo debiera permitirles tomar decisiones en y sobre sus prácticas profesionales (Santos, 2011). Son múltiples las referencias a la RP que los profesores deberían dominar y que constituyen las categorías desde las que puede analizarse la práctica docente. En nuestro caso, hemos considerado tres de esas categorías: desarrollo del modelo general de resolución de problemas, considerando sus cuatro fases (analizar y comprender el problema, diseño de estrategias, ejecución de las estrategias y revisión del problema, del resultado y toma de decisiones); uso del lenguaje y comunicación con los estudiantes; y contextos, formatos y tareas en el desarrollo del problema.

## CONTEXTO Y MÉTODO

Este artículo es parte del trabajo desarrollado en un seminario intermedio del grupo de investigación conocimiento y desarrollo profesional del profesor de la SEIEM por lo que no se encuadra en ninguno proyecto de investigación. Aun así se pretende obtener una mejor comprensión sobre la práctica docente, discutiendo esa práctica desde distintas miradas teóricas y metodológicas. Podemos considerarlo cómo un estudio de caso instrumental (Stake, 2005) que nos permite simultáneamente una visión local y global del foco de análisis contemplando visiones más amplias y completas de la entidad estudiada.

Con la intención de posibilitar un análisis de un mismo episodio que permitiera mejorar nuestro conocimiento de la práctica y el conocimiento del profesor sobre distintas perspectivas se pidió a los miembros del grupo que facilitaran un episodio de la práctica (encarada de forma amplia). De las propuestas que se recibieron se ha seleccionado una para realizar un análisis y discusión durante dos días de trabajo en la Universidad de Sevilla (Anexo). El episodio seleccionado forma parte de los datos recogidos para una tesis doctoral sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas que se está realizando en la Universidad de Huelva.

El episodio se corresponde a una actividad que un profesor de secundaria (Omar) realiza como parte de una tarea de un curso virtual de la maestría en Matemática Educativa realizado en 2013 en el Centro de Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) en México. En la actividad se pidió a los profesores del curso resolver “el problema de las cuerdas”. Para facilitar el proceso de análisis del episodio, correspondiente a la resolución que Omar hizo del problema, se ha dividido dicho episodio en unidades pequeñas de información (Ribeiro, Carrillo y Monteiro, 2008). El episodio seleccionado se corresponde con un tipo de práctica distinta de las que se estudian más comúnmente (no se corresponde a una práctica de clase), con lo que se pretendía una nueva forma de mirar el conocimiento del profesor (en términos teóricos y metodológicos) Además de resolver el problema, Omar señala las formas en las que los estudiantes podrían abordar la actividad.

En cuanto al análisis, realizado por cada uno de los grupos que se han prestado a ello, lo han realizado de forma independiente, por lo que tanto el proceso como el foco han sido distintos y han estado guiados por cada una de las bases teóricas que los sustentan. Así, aquí discutiremos no el análisis individual sino más bien algunos aspectos de las discusiones y reflexiones que han emergido en el grupo, basadas en los análisis individuales realizados. Hay que mencionar que el objetivo del trabajo no es hacer comparaciones entre las distintas miradas teóricas/metodológicas, siendo esa diversidad de abordajes un elemento más para enriquecer la comprensión del conocimiento del profesor, de su contenido y naturaleza.

## DISCUTIENDO UN EPISODIO DE LA PRÁCTICA

El análisis efectuado según cada una de las perspectivas teóricas nos conduce a una multiplicidad de puntos comunes y otros distintos. Aunque los puntos de coincidencia sean importantes (ya que revelan también aspectos fuertes de las conceptualizaciones teóricas), mucho más importante, para nosotros, son los puntos de discordia y el recorrido que nos permitirá resolver el/los problemas emergentes – considerando la resolución de problemas además de un contenido del conocimiento del profesor (Blanco & Cárdenas, 2013) también un contenido del conocimiento del investigador (Ribeiro, 2013). Ese foco de interés y atención en los puntos disjuntos se basa en el hecho de que, independientemente del marco teórico que consideremos – si buscamos entender mejor los distintos aspectos del conocimiento del profesor, estando este formado por distintos aspectos imbricados (separados pero inseparables) –, muchas dudas emergerán, pero será la búsqueda de respuestas la que nos permitirá avanzar.

Uno de los aspectos comunes al proceso de análisis se relaciona con la necesidad sentida de ampliar la información sobre el contexto del episodio y de los objetivos asociados a la investigación de la

que ha surgido (e.g., Escudero y Carrillo, 2014), como la necesidad de haber realizado una entrevista posterior para clarificar algunos aspectos – pero no necesariamente los mismos considerando cada una de los análisis hechos. Otro aspecto común, se refiere al conocimiento sobre resolución de problemas que debe tener el profesor o bien al uso de diferentes modos de representación. Uno de los aspectos centrales considerados se refiere a las distintas cuestiones de investigación que han emergido (y en las que cada grupo se ha enfocado) desde una misma premisa inicial: analizar el conocimiento de Omar con base en el episodio presentado. Esas diferentes cuestiones de investigación tienen su origen en diferentes paradigmas y pueden ser respondidas recorriendo a los diferentes modelos/conceptualizaciones teóricas. Así, podemos decir que el análisis enfocado a los aspectos comunes muestra la necesidad/importancia de una multiplicidad de formas de obtener información para una misma problemática, y la emergencia de distintas cuestiones de investigación dependiendo de cómo miramos la práctica.

Una diferencia entre los diferentes marcos se refiere a que, por ejemplo, el KQ se centra más en la práctica y el aspecto de la interacción (una componente más social) entre los alumnos y el profesor y eso se relaciona con la categoría *contingencia*, lo que suponía un inconveniente para analizar este episodio concreto. Según el KQ uno de los aspectos a destacar se refiere al hecho de que, por ser una práctica distinta de la clase (en un curso online), no se verifican situaciones de contingencia (o al menos tales situaciones no son evidentes en las respuestas). El análisis revela un conjunto de conocimientos (e.g., circunferencia cómo un conjunto infinito de puntos; concepto de cuerda; recuerda fórmulas) y evidencias la falta de otros (e.g., utilización inadecuada de terminología matemática – en la identificación de el área del círculo; ¿podrá la cantidad de puntos ser un número no entero?; confusión del límite con el término general de la sucesión), aspectos que se consideran incluidos en la *fundamentación*. En cuanto a la categoría de *conexión* se incluye aquí el caso particular del cálculo de las diagonales (número de lados menor que 20); relacionar el problema propuesto con una sucesión y el cálculo del término general de esa sucesión; y el considerar/conocer el curso en que tendría sentido la tarea de explorar la sucesión. Relativo a la *transformación*, ahí se incluye un conocimiento del cálculo del número de cuerdas mediante su trazado manual; el cálculo de las diagonales de un polígono regular (selección de ejemplos: polígono con 20 lados); la determinación del término general de la sucesión del cálculo de diagonales para polígonos con diferente cantidad de lados; y el establecimiento del número de diagonales a partir del término general anterior sumando el número de lados.

El análisis del episodio según el MKT presenta varios aspectos comunes con lo que se ha mencionado en relación con el KQ – en términos de conocimientos evidenciados y a discutir pero, por corresponder a conceptualizaciones distintas, algunos de esos aspectos del conocimiento se consideran en subdominios bastante distintos. En particular podemos referir que el considerar como ejemplo un polígono de 20 lados, se corresponderá al KCT, pero relacionar el número de cuerdas con la determinación de las diagonales se podría considerar como HCK o SCK mismo incluso CCK, dependiendo de la formación del profesor y del nivel educativo en que tenga sentido abordar el círculo cómo un polígono con un número infinito de lados (e.g., Ribeiro, 2013). Al final del episodio (E2[3]) se identifica esencialmente un conocimiento curricular, que se consideraba incluido en la categoría de *conexión* del KQ. Uno de los aspectos que se destaca del análisis hecho según esta conceptualización es el hecho de que, también, pero no sólo, al no haber sido aportada información complementaria relativa al contexto de recogida de datos (uno de los problemas ya mencionados en común en todos los análisis), en muchas situaciones queda la duda de si determinado conocimiento se podría considerar incluido en el CCK o en el SCK (e.g., relacionar el número de puntos de una circunferencia con el número de cuerdas; el número de puntos es siempre un número entero).

Esta dificultad en diferenciar el CCK y el SCK del MKT ha sido una de las bases que han conducido a la elaboración del MTSK – donde se considera la integración de diferentes

conocimientos tanto matemáticos como didácticos que contribuyen a la especificidad del conocimiento del profesor. En el MTSK la discusión que se ha hecho con anterioridad al respecto de que un determinado conocimiento pueda corresponder a CCK o a SCK no tiene sentido, incluyéndose esos conocimientos en el KoT—eso se señala también como uno de los resultados y avances en términos de discusiones de conceptualizaciones teóricas. Basado en este modelo se ha hecho un análisis más detallado que con los demás, desglosando distintos aspectos del conocimiento de Omar asociándolos a los distintos subdominios del modelo, lo que se justifica al formar parte de un trabajo de algunos miembros del grupo. Una discusión más amplia se puede encontrar en Escudero y Carrillo (2014). Muchos de los aspectos de este análisis se refieren a conocimientos y situaciones ya identificadas basadas en el KQ y el MKT pero, por la naturaleza del modelo en que se basa, es mucho más fina que las presentadas anteriormente.

Cuando el episodio se mira bajo la perspectiva socio cultural de Sfard (2008) son enfatizados, de forma obvia, los mediadores visuales utilizados (ejemplos gráficos que en KQ se incluye en la *conexión*, en el MKT en CCK u SCK y en el MTSK en el KSM). Como resultado del análisis del discurso matemático del profesor se pueden identificar algunos mediadores visuales de diferente naturaleza (gráficos y analíticos), identificando también narrativas, asociándolas a definiciones (de cuerda) y a características de objetos geométricos (una circunferencia tiene infinitos puntos). Este discurso matemático, y su corrección y adecuación, en las demás conceptualizaciones se encuentra disperso en casi todos los subdominios de forma implícita. Una de las rutinas identificadas en el episodio se refiere al hecho de que Omar diga que calcula las cuerdas trazándolas de manera efectiva, lo que lleva a suponer que después se cuentan las cuerdas trazadas. El hecho de considerar la didáctica de las matemáticas como un tipo especial de discurso en este abordaje lleva a una discusión (y levanta la cuestión) de lo que se corresponde, por ejemplo, con una rutina en matemáticas y en didáctica de la matemática (representación verbal, gráfico, analítica E2[2]) – si corresponderán a cosas distintas o no, y cual será su naturaleza.

Procurando entender cómo el conocimiento del profesor permite tomar decisiones en y sobre sus prácticas profesionales se ha analizado el episodio según las cuatro fases de RP añadiendo una visión del lenguaje utilizado y las formas cómo resuelve el problema propuesto. Mirar lo que hace Omar (se refiere a elementos “didácticos” de la educación; pone de manifiesto la comprensión del problema de las cuerdas desde lo matemático; menciona las posibles formas de resolver el problema y el nivel escolar donde desarrollaría cada forma de resolver el problema) bajo la perspectiva de RP permite asociar distintos sub episodios a cada una de las etapas de esa resolución. Al considerar una comprensión matemática del problema estamos relacionando esa comprensión con un conocimiento sobre, por ejemplo, ¿qué es cuerda?; ¿qué es una circunferencia?; ¿cuántas cuerdas puede trazar?, conocimientos que se incluyen en el saber matemático del profesor (que en KQ se considera *fundamentación*, en el MKT podrá incluirse en CCK u SCK y en el MTSK en el KoT). Esa comprensión le permite también cuestionar la adecuación o no del problema al nivel escolar para el que se propone pero al proponer diferentes estrategias (gráfica, conceptual y procedimental – mediadores visuales según la perspectiva socio cultural de Sfard) las asume para sí mismo no contemplando el contexto de la práctica en que se encuentra – se olvida de que eso se deberá adecuar a los alumnos.

## **ALGUNOS COMENTARIOS Y POTENCIALIDADES PARA LA FORMACIÓN Y LA INVESTIGACIÓN**

Aunque tengamos algunas respuestas relativas al conocimiento de Omar según cada uno de los modelos, y de forma integrada considerando los distintas abordajes, nos hemos quedado con muchas más cuestiones – lo que en sí mismo nos parece un punto a enfatizar ya que será la búsqueda de respuestas a (esas y otras) cuestiones lo que nos permitirá avanzar en la investigación y, tal como refiere Kilpatrick (1981), parar y pensar. Para cada uno de los modelos/conceptualizaciones nos podemos cuestionar, por ejemplo sobre si: ¿se pueden identificar

más conocimientos con este modelo?; ¿qué aspectos de los episodios no han sido puestos en evidencia?; ¿se podrían identificar otros conocimientos o profundizar en los puestos en evidencia utilizando otros instrumentos de investigación?; ¿qué fortalezas y debilidades muestra el modelo?; ¿Cuáles son las (des)ventajas al tener como punto de partida una determinada conceptualización y no otra?.

Este tipo de trabajo, de analizar un mismo episodio bajo distintas perspectivas, no pretende ser una etapa para conectar diferentes teorías o modelos pero sí un medio que permita una mejor comprensión de un mismo fenómeno desde distintos focos de atención. Este abordaje múltiple permite una visión simultáneamente más profunda y amplia del fenómeno así como una comprensión de los distintos marcos teóricos y su rol en el análisis, ya que la adopción de uno en detrimento de otro conduce a distintas cuestiones de investigación. La discusión de esas diferentes cuestiones de investigación, y los variados abordajes efectuadas en el sentido de obtener una mejor comprensión sobre la práctica han permitido una reflexión y toma de consciencia de los distintos posicionamientos teóricos y metodológicos para, discutir algunos de los aspectos que se consideran nucleares en la investigación y en la formación de profesores – encarada como un aspecto central en el desarrollo profesional del profesor.

Este tipo de trabajo, además de posibilitar una más plena comprensión de la práctica nos ha permitido una reflexión sobre el rol de los formadores de profesores (nosotros) en la formación, en el desarrollo del conocimiento del profesor y en su desarrollo profesional. Considerando que debemos promover, a todos los niveles, una relación entre la teoría y la práctica, y siendo la investigación el puente que las une, el trabajo, discusión y reflexión considerando diferentes posibilidades de abordaje y enfoques para una misma situación nos permite potenciar su uso en la práctica, para desarrollar tareas específicas para la formación, teniendo en consideración el hecho de que ese conocimiento puede ser enseñado y su especificidad para el desarrollo de la práctica (e.g., Ribeiro, Mellone y Jakobsen, 2013), minimizando las situaciones de contingencia, en el sentido de Rowland et al., (2005).

Es aun necesario realizar más investigaciones que nos permitan entender mejor las potencialidades concretas, y el trabajo asociado a un tipo de discusión cómo la que hemos experimentado – tanto para la formación como para la investigación y la práctica – pero si consideramos que el conocimiento del profesor es esencial para desarrollar aprendizajes profundos en los alumnos, entonces también nuestro conocimiento cómo formadores de profesores, e investigadores que se preocupan con esa formación (a todos los niveles), deberá ser foco de discusión ya que deberemos ampliar las consideraciones que hacemos para los profesores a nosotros mismos – puesto que nuestros alumnos son los profesores o estudiantes para profesores (Jaworski, 2008).

#### **Agradecimientos:**

Este artículo há sido parcialmente financiado por la Fundação para a Ciência e a Tecnologia (Portugal).

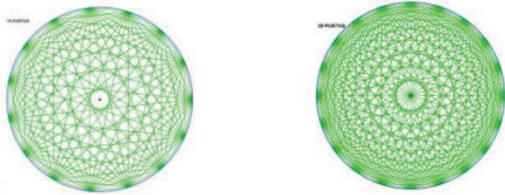
#### **Referencias**

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Blanco, L. J., & Cárdenas, J. A. (2013). La resolución de problemas como contenido en el currículo. *Revista Campo Abierto*, 32(1), 137-156.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.
- Escudero, D., & Carrillo, J. (2014). Knowledge of Features of Learning Mathematics as part of MTSK. In *Proceedings PME* (pp. to appear). Vancouver: PME

- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M., & Delaney, S. (2012). Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. In ICME (Ed.), *12<sup>th</sup> ICME* (pp. 4635-4644). Seoul: ICME.
- Kilpatrick, J. (1981). The reasonable ineffectiveness of research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 2(2), 22-29.
- Puig, L. (2008). Resolución de problemas: 30 años después. In R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & L. J. Blanco (Eds.), *Actas del XIII Simposio de la SEIEM* (pp. 93-111). Badajoz, España.
- Ribeiro, C. M. (2013). Del cero hasta más allá del infinito - algunas perspectivas desde el comienzo de la tesis doctoral hasta el futuro “también” a largo plazo. In A. B. Alcaraz, G. G. Pereda, A. E. Castro & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 71-85). Bilbao: Universidad del País Vasco, SEIEM.
- Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011). Relaciones en la práctica entre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) y las creencias del profesor. In M. M. Rodríguez, G. F. García, L. J. Blanco & M. P. Medina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 513-521). Ciudad Real: SEIEM, Universidad Castilla-La Mancha.
- Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2008). Uma perspectiva cognitiva para a análise de uma aula de matemática do 1.º ciclo: um modelo de apresentação de conteúdo tendo como recurso o desenho no quadro. In R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 545-555). Badajoz: SEIEM.
- Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - mathematics learning across the life span* (Vol. 4, pp. 89-96). Kiel, Germany: PME.
- Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 255-281.
- Santos, L. (2011). El papel de la Resolución de Problemas en el Desarrollo del Conocimiento Matemático de los Profesores para la Enseñanza. Paper presented at the XIII CIAEM-IACME.
- Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, 16(4), 565-613.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourse, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (pp. 443-466). Thousand Oaks: Sage Publications.
- Thames, M., & Van Zoest, L. R. (2013). Building coherence in research on mathematics teacher characteristics by developing practice based approaches. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 45, 583-594.

## ANEXO

Resolviendo el problema de las cuerdas – Omar:		
Se colocan n puntos sobre una circunferencia. ¿Es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse?		
Episodio 1		
E1	E1[1]	La mayoría de trabajos realizados en el campo de la matemática, apuntan a encontrar estrategias para la enseñanza de diferentes conceptos dentro del aula, con el objeto de que el estudiante produzca conocimiento matemático.

	E1[2]	“El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana.
	E1[3]	Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son prueba del aprendizaje” Brousseau (1986).
Episodio 2		
	Resolver el siguiente problema:	
	Se colocan (n) puntos sobre una circunferencia. ¿Es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse?	
	E2[1]_a	Recordemos que cuerda es un segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea recta; como es conocido una circunferencia está conformado por infinitos puntos, y a partir de éstos se pueden trazar también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo.
	E2[1]_b	La cuerda parte desde un punto, y llega a otro, entonces si hay $\infty$ puntos, entonces el número de cuerdas estaría dado por $\infty$ .
	E2[1]_c	Sin embargo si en una circunferencia se dan unos determinados puntos, y se pide que se determine el número de cuerdas, es posible hallarlas si esa cantidad de puntos es un número entero positivo.
	Presentar las técnicas o diferentes maneras en las cuales puede ser resuelto	
	E2[2]_a	Una de las técnicas más comunes es trazar manualmente las cuerdas en un círculo; pero esto lo podemos realizar cuando el número de puntos es pequeño. Me atrevo a decir cuando el número es menor de 20 puntos.
	E2[2]_b	Ejemplo con un polígono regular
	E2[2]_c	
E2	E2[2]_d	La otra manera sería utilizando la sucesión que se puede hallar, teniendo en cuenta que se conoce, y se maneja con regularidad en el aula de clase, el número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia.
	E2[2]_e	Esta sucesión está dada de la siguiente forma: $D = \frac{n}{2}(n - 3)$ , donde (n) me representa el número de los lados del polígono inscrito.
	E2[2]_f	Si conozco esto puedo decir que el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido, teniendo en cuenta que los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes.
	E2[2]_g	Entonces el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales, estaría dada de la siguiente manera: $cuerdas = D + n$ , donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono; $cuerdas = \frac{n}{2}(n - 3) + n = \frac{n}{2}(n - 1)$
	E2[2]_h	Sabiendo que esta es la sucesión puedo hallar el límite $\lim_{n \rightarrow x} \left( \frac{n}{2}(n - 1) \right)$ . Donde (x) es cualquier entero positivo.
	¿A qué nivel escolar se le puede proponer como actividad de trabajo?	
	E2[3]_a	Considero que la primera técnica es probable aplicarla en los grados de la secundaria 9° grado, cuando se enseñe los polígonos con sus diagonales, o cuando se mencione en geometría las cuerdas.
	E2[3]_b	En este grado se enseña un poco de sucesiones, al menos la introducción, se entabla alguna relación entre la parte algorítmica con la gráfica, necesaria para una mejor interpretación de la situación.
	E2[3]_c	Respecto a la segunda técnica se puede aplicar a estudiantes de finales de la secundaria o principios de la universidad, cuando se vean límites de sucesiones. Con este concepto aprendido se facilita más hallar el total de cuerdas de determinados puntos.
Episodio 3		
	REFERENCIAS	
E3	E3[1]	Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Facultad de matemática, astronomía, física. Universidad Nacional de Córdoba