CONSTRUCCIÓN DE LO BILINEAL EN PRÁCTICAS DE MODELACIÓN

Silvana Gómez Ojeda, Leonora Díaz Moreno y Jaime Arrieta Vera
Universidad de los Lagos Chile
silvana.gomez@usach.cl

Resumen. En este artículo se reporta el análisis de las producciones de la puesta en escena del diseño de aprendizaje basado en la práctica de modelación de un sistema de resortes con estudiantes de profesorado. Interesa averiguar qué argumentos y herramientas matemáticas desarrollan al modelar. La modelación/simulación, la concebimos como una práctica que vive en diferentes comunidades, es la acción de articular dos entidades con la intención de intervenir en una de ellas a partir de la otra.
Palabras clave: modelación, bilineal, práctica situada
Abstract. In this article there is brought the analysis of the productions of the putting in scene of the design of learning based on the practice of modeling of a system of springs by students of professorship. It is interested in verifying what arguments and mathematical tools they develop on having shaped. The modeling, we conceive as Modeling / simulation a practice with experience that articulates two entities with the intention of intervening in one of them from other one.
Key words: modeling, bilineal, situated practice

Introducción

En contextos no escolares la toma de decisiones se debe llevar a cabo con datos insuficientes o que no se tiene certeza sobre ellos, donde la respuesta no es única ni exacta y es común recurrir a la aproximación. Esto no se ve en las aulas, donde el conocimiento se "aprende" para que después pueda ser aplicado los problemas "reales" que plantean los libros de texto tradicionales y que son problemas donde se tiene una solución única. El conocimiento que se aprende se desliga así de las prácticas de donde emergió y en donde vive. Usualmente los estudiantes no se enfrentan a problemas que no tienen solución o que admiten más de una solución; tampoco abordan problemas con datos insuficientes o en donde algunos de los datos que se proporcionan son irrelevantes; esto es, no trabajan problemas con datos que tienen ruido (Arrieta y García, 2009).

Lo expuesto deja en evidencia una problemática considerada en este artículo que es la separación que existe entre la escuela y el entorno que autores como Lave (1988) y Walkerdine (1988) reportaron hace tres décadas. Esta separación lleva a que existan estudiantes como César reportado en Arrieta y Díaz (2014) quien vende chicles en Acapulco. César el vuelto realizando rápidos cálculos mentales y no puede hacer lo mismo con lápiz y papel.

La matemática que se enseña en la escuela dista del conocimiento que se considera científico y se distancia del conocimiento del hombre común, del tipo de saber que es aplicado en la vida cotidiana, lo que conlleva a que los estudiantes escasamente relacionen el saber escolar y el saber de la vida cotidiana, saberes que responden a diferentes epistemologías. La comprensión y procedimientos que se esperan de los estudiantes en la escuela son diferentes a los de la vida cotidiana (op. cit., 2014).

En nuestro país, los estudiantes de profesorado no están ajenos a esta problemática. Su formación está cargada de estructuralismo y aunque se han realizado cambios curriculares, sigue predominando un enfoque algorítmico. Los formadores de formadores consideran a la matemática como un discurso acabado, enseñan con un discurso que responde a sus referentes matemáticos, mismo que excluye a sus estudiantes de participar de la construcción del conocimiento y de la actividad humana. Su formación deja de lado los contextos sociales y culturales en los cuales emerge el conocimiento. Uno de los resultados de esta formación es que estudiantes de profesorado conciben a la matemática como una herramienta para resolver problemas.

Estudios internacionales como los del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA) realizados por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), que busca evaluar en qué medida los estudiantes que se acercan al final de la enseñanza escolar obligatoria han adquirido competencias esenciales para una completa participación en la sociedad, establecen la importancia de desarrollar en los estudiantes habilidades para modelar. Por su parte Blomhoj (2004) indica que el desarrollo de competencias para establecer, analizar y criticar modelos matemáticos, es relevante en cualquier nivel, al ser vista la modelación como una práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje. Asimismo argumenta que las actividades de modelación ayudan a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles se construyen importantes conceptos matemáticos.

El estudio que se reporta atiende, por una parte, a la reciente incorporación de la modelación en el currículum matemático de nuestro país. Y por otra a las evidencias que aporta Méndez (2006) ilustrando dificultades al transitar desde la correlación de dos variables a la correlación de más de dos variables. Concibiendo a la modelación como una práctica situada que se vivencia en diferentes comunidades y que permite tender puentes entre lo que se hace en la escuela y lo que se hace en comunidades no escolares (Arrieta y Díaz, 2014) esta investigación se plantea validar secuencias de enseñanza para estudiantes de profesorado que propicien el desplazamiento de correlaciones de dos variables a tres. Se recurre a la modelación y simulación de la elongación de un resorte y de un sistema de resortes.

Interesa aplicar la secuencia de modelación de un sistema de resortes para que los estudiantes construyan lo bilineal. Más allá del objeto matemático función de dos variables, se comprende por lo bilineal a todo lo relacionado a la correlación de dos o más variables: métodos de predicción, gráficas, ecuaciones, entre otros. Para estudiar ésta práctica situada nos centramos en determinar los argumentos, las herramientas matemáticas, los consensos que establecen los estudiantes al modelar discursivamente, colocando el énfasis en los métodos y herramientas con las que predicen y construyen modelos, en las formas de proceder y de argumentar al modelar un sistema de resortes.

Antecede a esta investigación lo realizado por Méndez (2006). La autora trabajó lo multilineal con estudiantes de Bachillerato en México. Reporta que lo multilineal se construye cuando se articulan dos o más modelos lineales. Esta investigación recurre de inicio a la secuencia utilizada por ella. Con base en prácticas de modelación de un sistema de resortes, a partir de una tabla los estudiantes predicen, levantan un modelo algebraico y un modelo gráfico.

Marco teórico

La perspectiva teórica con que se aborda la investigación es la socioepistemología. Se suscribe la concepción de aprendizaje situado de Lave y Wenger (1991) quienes consideran al aprendizaje como un proceso de aumento de experiencias, un acopio de crecimientos, de identidad, de pertenencias y de experiencias prácticas; una dimensión integral e inseparable de la práctica social, proceso que se da siempre y cuando un grupo de personas acuerdan un objetivo común, para realizar una actividad que todos experimentan y reconocen como significativa; que permite a los actores experimentar la propia práctica con un significado pleno, debido a que la propia aportación al trabajo del grupo produce en los aprendices un proceso de construcción de la identidad y se abre en ellos el acceso a un fondo común de prácticas, de solución de problemas y de saberes basados en la experiencia.

Desde esa concepción de aprendizaje se desprende que el estudio de las interacciones que se dan entre los estudiantes en el proceso de aprendizaje o al momento de ejercer la modelación, en las que los conocimientos son utilizados con intenciones situadas en un contexto, permitirá caracterizar prácticas de construcción de conocimiento matemático, en este caso de "lo bilineal", cuando se trata con los fenómenos (Arrieta, 2003).

Al decir de Arrieta y Díaz (2014) la separación de la escuela respecto de su entorno se debe a que ambas difieren en las intenciones, las herramientas, los argumentos y los procedimientos, lo que lleva a considerar que para estudiar la modelación como una práctica situada es necesario centrarse en cinco elementos: las intenciones ¿por qué se hace lo que hace?, los procedimientos ¿cómo lo hace?, las herramientas ¿con qué lo hace?, los argumentos ¿cómo se justifica? y sus procesos de emergencia y de constitución ¿cómo emerge y cómo se constituye?

La concurrencia de los cinco elementos lleva a los autores antedichos a considerar a la modelación como una práctica situada no estática, una práctica situada deviniendo en el tiempo, a la que llaman *práctica-con-vivencia*, reiterando que se concibe a ésta como la articulación de dos entes iniciales, para actuar sobre uno de ellos a partir del otro. El ente (tabla, gráfico, fórmula algebraica) toma el estatus de herramienta cuando el actor lo convierte en modelo para intervenir en el otro ente. Se transforma entonces en un nuevo ente, el modelo, que se denomina mo. Resulta adherido a lo modelado, que se denomina ma. La articulación constituye una nueva entidad para la vivencia de quien modela. En el caso del cardiólogo, este "toca" el corazón de su paciente, lo interviene a partir de su electro. Esta nueva entidad se denota por la díada (ma, mo) = (corazón, electro) y se la llama dipolo modélico, DM (op. cit., 2014). En suma, este estudio suscribe a la modelación como una práctica que articula dos entidades con intención de intervenir en una de ellas (lo modelado) a partir de la otra (modelo). No trata con representaciones sino que con la construcción de nuevas entidades a partir de la articulación de dos entes. Con ello crea nuevas realidades.

En la socioepistemología los modelos son usados como herramientas para argumentar (Arrieta, 2003). Desde esta mirada el gráfico no es una representación. Es un dibujo que se convierte en modelo cuando se usa para intervenir en lo modelado, cuando pasa a formar parte del acto de modelar. Caracterizar las prácticas de modelación por el acto de modelar permite, a la práctica que sustenta un diseño de aprendizaje, la posibilidad de sustentar una continuidad entre esferas de prácticas (Arrieta y Díaz, 2014). Estas esferas de prácticas se corresponden con las prácticas de la actividad matemática escolar, las prácticas de la matemática científica y las prácticas de uso no escolar de las matemáticas.

Puntualizan los autores que el potencial de ésta concepción de modelación radica en la fuerza que conlleva la articulación y la intencionalidad de intervenir, la necesidad de interactuar con la entidad que se desea intervenir, es decir la necesidad de experimentación. El acto de modelar permite caracterizar las prácticas de modelación. El acto de modelar devela las fases que componen las prácticas, distinguiendo las necesarias y las suficientes así como las intencionalidades de las mismas. Los entes matemáticos al ser usados en el acto de modelar son herramientas que se presentan como modelos: ecuaciones o sistemas de ecuaciones algebraicas y/o diferenciales, gráficas cartesianas, trayectorias, formas geométricas, datos organizados en tablas, descripciones verbales, datos en hojas de cálculo, entre otros.

Metodología

El diseño que se aplicó a estudiantes de profesorado "La elasticidad de un sistema de resortes" tiene por intención que los estudiantes modelen bilinealmente la elasticidad de un sistema de resortes. Parten de una tabla de datos numéricos dada y, mediante actividades, predicen, construyen el modelo algebraico y el modelo gráfico, mismos que articulan con el fenómeno. El diseño está estructurado en dos fases, la interacción con el fenómeno o experimentación y el acto de modelar. La dinámica del diseño considera el trabajo en equipo.

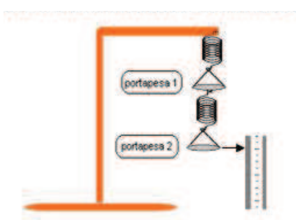
Fase 1: La interacción con el fenómeno o experimentación

La modalidad de la experimentación puede ser presencial, virtual o discursiva. En este caso se consideró la discursiva. Esta se da cuando la experimentación se establece desde una tabla inicial de datos, proponiendo actividades para desarrollar: describir el fenómeno con sus propias palabras, predecir la posición del portapesas cuando se colocan en él determinados pesos.

Fase 2: El acto de modelar vía la predicción

Se articula la tabla de datos con la elasticidad del resorte: se predice la posición del indicador de elongación del resorte con distintos pesos, a partir de la tabla de datos y con datos que no aparecen en la tabla.

Se le presentan la siguientes situaciones: **Si colocamos 30 grs. en la pesa 1, p1 y 30 grs. en la pesa 2, p2 ¿en qué posición estará el indicador?; ¿50 grs. en p1 y 10 grs. en p2?; ¿17 grs. en p1 y 24 grs. en p2?**



Peso (g) en la porta pesa 1	Peso (g) en la porta pesa 2	Posición del indicador (mm)
0	0	45
20	0	75
0	20	95
40	0	105
0	40	145

Figura 1: Interacción con el fenómeno a partir de datos dados

Al enfrentarse a estas situaciones los estudiantes deben buscar algún conocimiento que les permita predecir. Estos pueden ser la regla de tres o el promedio, entre otros. Dado que no cuentan con pesas de 10 grs. entonces utilizan la tabla para responder. Pudiera suceder que ocupen razón de cambio. Bajo esta concepción de modelación, al construir herramientas de modelación, están modelando.

Para la construcción del modelo algebraico se les presenta la siguiente situación: Si colocamos p1 gramos en el portapesas 1 y p2 gramos en el portapesas 2 ¿en qué posición estará el indicador? La intención en esta situación es que los estudiantes construyan un modelo algebraico del fenómeno. Construyen la fórmula calculando las razones de cambio, es decir lo que se estira el sistema al colocar un gramo en la pesa p1, $\frac{\Delta x}{\Delta p1}$ y lo que se estira el sistema al colocar un gramo en el porta pesas 2, $\frac{\Delta x}{\Delta p2}$. Para encontrar la posición del indicador deben multiplicar los gramos colocados en el porta pesas 1 por $\frac{\Delta x}{\Delta p1}$, luego sumar el producto de los gramos en el portapesas 2 por $\frac{\Delta x}{\Delta p2}$ para luego sumar la posición inicial. Esto les llevará a escribir el modelo algebraico $\frac{\Delta x}{\Delta p1}p1 + \frac{\Delta x}{\Delta p2}p2$ + la posición inicial = $x(p1,p2)$. En esta situación los estudiantes habrán encontrado una relación entre las variables, misma que se transforma en modelo algebraico. Este hecho lo logran partiendo de la tabla a la que transforman en modelo numérico.

Luego se les solicita que haga una gráfica.

En la puesta en escena participaron estudiantes de profesorado de matemáticas de una universidad en Santiago de Chile, participantes de un curso de modelación. Se trató de 15 estudiantes organizados en cinco equipos de tres miembros. Se trabajó en dos sesiones que cubrieron siete horas. Interesó en particular el análisis de las interacciones que surgen en la puesta en escena. Para ello se grabaron cintas de video y audio que fueron transcritas para el análisis a posteriori.

Análisis de los resultados

En el acto de modelar-predecir, en el que se solicita determinar la elongación del resorte al colocar 30 grs. en el portapesas se aprecian dos métodos.

Al primero lo llamamos el "método de Camilo".

> *"El peso total que se colocará en los resortes es 60 grs, si colocamos todo el peso en el portapesas1 el estiramiento será mínimo, pues sólo afecta al resorte 1, la posición será 75.Si colocamos todo el peso en el portapesas 2 será máximo. La posición será 16, entonces si colocamos 30 grs en el portapesas1 y 30 en el portapesas2 estará en la mitad. O sea en 120".*

Realizó el siguiente cálculo: 165 + 75 = 240 : 2 = 120.

Llamamos al segundo "el método de Camila".

> *"3º grs se encuentran entre 20 y 40, dejando constante el peso 2 se calcula la diferencia de elongación que es 105 -75 y da 30, como 30 se obtiene al sumar 20 y 40 y dividirlo por 2, al dividir 30 por 2 da 15, a la posición de 20 que es 75 se le suma 15 con lo que se obtiene*

la elongación del peso 1 que es 90, al dejar constante el peso 1, utilizando el mismo método se obtiene la elongación del peso 2, luego se suman ambas elongaciones".

A analizar el trabajo realizado por los equipos se aprecian similitudes en dos grupos que utilizan la ecuación de la recta para predecir. Para ello separan la tabla en dos tablas, calculan las diferencias de elongación por separado y como la diferencia es constante, identifican la relación como lineal, encuentran las ecuación de ambas rectas las que utilizan para calcular las elongaciones y luego las suman. Se diferencian en que el segundo equipo agrega una sola vez la posición inicial, según se aprecia en la evidencia (fig. 2)

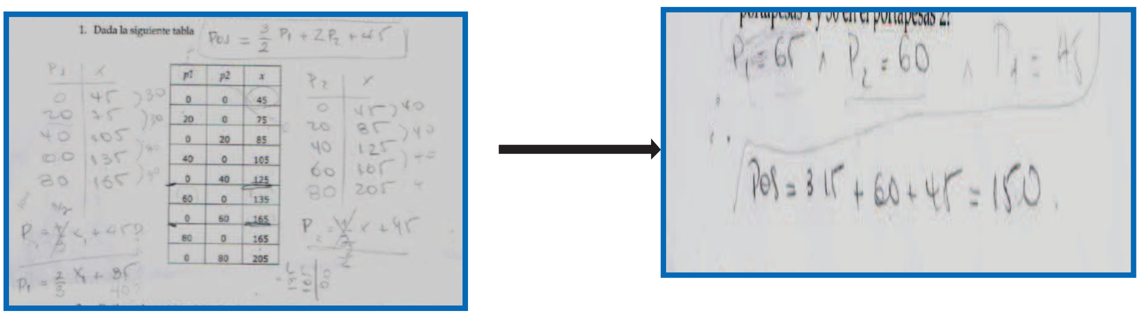


Figura 2: Utilización de la ecuación de la recta para predecir

El primer grupo concibe lo bilineal como dos procesos lineales disjuntos. El segundo equipo, al predecir el sistema, ve lo bilineal como un solo sistema pues solo suman una vez la posición inicial de 45. Un tercer equipo utiliza la razón de cambio para predecir y su forma de predecir lo lleva al modelo algebraico $x(P1, P2) = \frac{\Delta X}{\Delta P1} * P1 + \frac{\Delta X}{\Delta P2} * P2$. El cuarto equipo concibe lo bilineal como dos procesos lineales disjuntos. Predice a través del modelo numérico en las tres primeras preguntas utilizando punto medio y regla de tres. En una de las preguntas cambia la forma de predecir: utiliza las razones de cambio lo que le lleva al modelo algebraico. La centración en lo lineal le obstaculiza la construcción del modelo gráfico para predecir. En el quinto equipo se aprecia la emergencia de lo bilineal: aunque conciben lo bilineal como dos modelos lineales disjuntos como se aprecia en la gráfica que construyen, al momento de predecir "qué sucede si se colocan 30 grs en ambas. Para argüir los grupos recurren a argumentos gráficos, figurativos y tabulares como se aprecia en los esquemas siguientes.

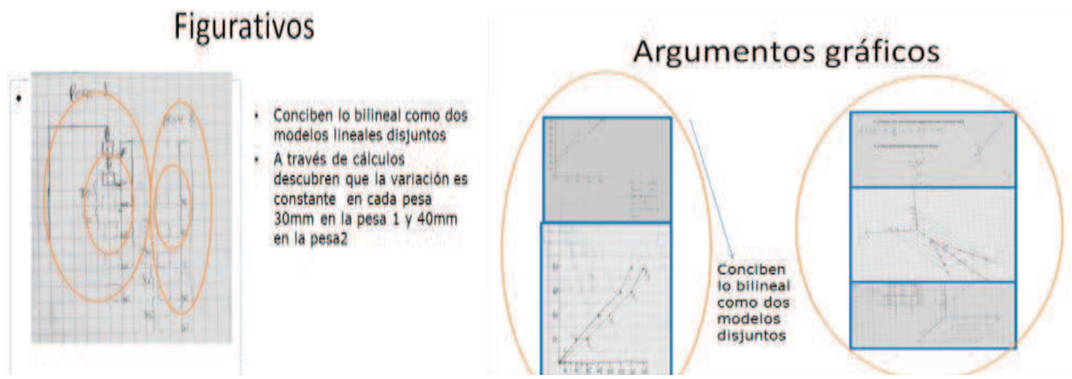


Figura 3: Argumentos utilizados para predecir

Conclusión

En la puesta en escena del diseño, las formas o métodos que los actores utilizan para predecir son los métodos de “punto medio o promedio”, “regla de tres” y “razones de cambio parciales”. Este último método consiste en calcular cuánto se estira el sistema de resortes cuando se coloca un gramo en el portapesas 1 y cuanto se estira cuando se coloca un gramo en el portapesas 2; multiplicar estas cantidades por los gramos que se colocan en cada portapesas; y sumar la posición inicial. Uno de los grupos argumenta verbalmente que la idea es buscar una fórmula. Privilegian los modelos algebraicos. Los tipos de argumentos usados son figurativos, verbales, algebraicos y numéricos. El plano no se constituye como modelo gráfico. En los argumentos gráficos se aprecia la imposibilidad de obtener el plano como modelo gráfico. Concebir lo bilineal como dos procesos lineales disjuntos lleva a los actores a construir los modelos algebraicos y gráficos como la suma de modelos lineales. Lo bilineal emerge al considerar a los dos resortes como un sistema.

Referencias bibliográficas

Arrieta J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav – IPN, México.

Arrieta, J. y García, C. (2009). Un estudio del tratamiento de datos con ruido en los sistemas escolares. *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa.* V24, pp. 453-463.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2014). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. Aceptada en *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*.

Blomhøj, M. (2004). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. Traducción de M. Mina. Tomado el 18.09.13 de
http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_23/23_2_Modelizacion1.pdf.

Gómez, S. Arrieta, J. y Díaz, L. (2012). Exploración de lo bilineal desde la práctica social de modelación de un sistema de resortes. *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa.*

V 26, 1320- 1326.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Méndez, M. (2006). *Las prácticas sociales de modelación multilineal; modelando un sistema de resortes.* Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas, México.

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality*. London: Routledge.