

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE UN PROCESO DE ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO “PROPORCIONALIDAD”

Francisco Javier Parra Bermúdez, Ramiro Ávila Godoy y Jesús Ávila Godoy
Universidad Autónoma de Baja California, Universidad de Sonora México
fjparra@correo.física.uson.mx, ravilag@gauss.mat.uson.mx, jag_virgo@hotmail.com

Resumen. Presentamos un análisis didáctico del uso del significado del *objeto matemático proporcionalidad* en una situación problemática de un tema de cinemática, apoyándose en las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación. Nuestros análisis se realizan desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), considerando las facetas que conforman una idoneidad didáctica. La experiencia se realizó con estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora.

Palabras clave: proporcionalidad, obstáculo, objeto matemático, significado, idoneidad didáctica

Abstract. We present a didactic analysis of the use of mathematical object meaning of proportionality in a problematic situation of a cinematic theme, based on the New Technologies of Information and Communication Technologies. Our analysis is conducted from the perspective of the onto-semiotic approach Cognition and Mathematics Instruction (EOS), considering the facets that make up a didactical suitability. The experiment was conducted with engineering students at the University of Sonora.

Key words: proportionality, obstacle, mathematical object, meaning, didactical suitability

Introducción

Se asume que el propósito fundamental de la investigación en Matemática Educativa es elevar la calidad de los aprendizajes de los estudiantes, lo cual lleva implícita la necesidad de mejorar los procesos de enseñanza de la disciplina, lo que a su vez plantea como un requerimiento fundamental a investigar, la elaboración de una metodología que permita describir, explicar y valorar los procesos que se dan en el aula escolar. El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2009; Godino y Neto, 2013) incluye una metodología con este propósito: analizar los procesos de instrucción y estudio que se llevan a cabo en el aula tratando de determinar el grado de idoneidad didáctica (ID) de dichos procesos.

Dicha metodología proporciona elementos para analizar los fenómenos áulicos desde seis perspectivas diferentes, cada una de las cuales se corresponde con un factor cuya influencia en el proceso de estudio se considera determinante. Pretendemos ilustrar el uso de la metodología mencionada analizando lo sucedido en una clase del laboratorio de mecánica desarrollada en un curso que se imparte dentro de un proyecto más general en el que se investiga el papel de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (NTIC's) en la construcción de significados de los objetos matemáticos en el contexto de la Mecánica Newtoniana (MN), que tiene como antecedente un reporte anterior (Parra, Ávila y Ávila, 2013).

Esta contribución consta de tres apartados y las conclusiones, en el primero se exponen algunas herramientas conceptuales que sustentan la metodología; en el segundo se describe el diseño de la

actividad de estudio y su contexto; y en el tercero, se muestra la valoración didáctica de la experiencia de enseñanza llevada a cabo con estudiantes de Ingeniería en un primer curso de Física, utilizando una simulación computarizada para un tema de mecánica.

Algunos Aspectos Teóricos

La metodología propuesta en el EOS para el análisis de la actividad didáctica y la valoración de su idoneidad se deriva de un sistema de supuestos y categorías que hacen operativas las diversas idoneidades parciales, especialmente las dimensiones epistémica y cognitiva. En el EOS son fundamentales los términos: Objetos matemáticos (situación problemática, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos, lenguaje en sus diversas representaciones: gráfico, numérico, analítico y verbal), significado (institucional y personal) y obstáculo. Éste último lo caracterizamos como un significado que lleva al sujeto a interpretar inadecuadamente un problema.

Una idoneidad didáctica (Godino y Font, 2006) consta de 6 facetas:

- a) *Epistémica*: grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia. Las situaciones problemáticas constituyen un elemento central y el logro de una idoneidad epistémica alta requiere diversos objetos de la Matemática: definiciones, procedimientos, proposiciones, así como la justificación de los mismos en sus representaciones (gráfica, numérica, analítica y verbal). Las tareas deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversos objetos y que los estudiantes conjeturen, interpreten, generalicen y justifiquen las soluciones.
- b) *Cognitiva*: grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos (Vygostki, 1934) y proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados. Los estudiantes deben aprender la Matemática entendiéndola, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de sus experiencias y conocimientos previos al hacer frente a situaciones problemáticas.
- c) *Afectiva*: grado de implicación (actitudes, emociones, intereses y necesidades) del alumnado en el proceso de estudio. Lo cual se manifiesta en ciertos indicadores: las tareas tienen interés para los alumnos, se suponen situaciones que permitan valorar la utilidad de la Matemática en la vida cotidiana y profesional. Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.
- d) *Interaccional*: grado de identificación y solución de conflictos, esto es cualquier disparidad entre sujetos (instituciones o individuos) sobre los significados atribuidos a un objeto) antes, durante y

después del proceso de instrucción. En la interacción entre alumnos: se favorece el diálogo y comunicación entre ellos. Se implementa la evaluación formativa con la observación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes.

e) *Mediacional*: disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se usan materiales manipulativos e informáticos (cabri, geogebra, applets,...) que permiten introducir las situaciones problemáticas, definiciones y las proposiciones son contextualizadas y motivadas usando modelos concretos y visualizaciones mediante simulaciones computarizadas. El número de alumnos, horario y condiciones del aula, permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. El tiempo (presencial y no presencial) es adecuado, se dedica el tiempo suficiente a los contenidos más importantes y que presentan más dificultad de comprensión.

f) *Ecológica*: los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con el currículo, se presenta una apertura hacia la innovación didáctica basada en la investigación y la práctica reflexiva e integración de las NTIC's. Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinarios.

La ID es una herramienta metodológica didáctica útil para la formación de profesores, para orientarlo de manera global y sistemática en el diseño, implementación y evaluación de su práctica docente, propuestas curriculares, experiencias de enseñanza y aprendizaje en la clase teórica, conferencias y el laboratorio de cómputo, por citar algunas.

Descripción de la Actividad Didáctica

En este apartado se describen algunos aspectos de la estrategia de enseñanza, diseñada e implementada para el estudio de la caída libre de un cuerpo utilizando una simulación computarizada en línea. Se plantearon 13 actividades en una hoja de trabajo a partir de un problema (llenar 2 tablas y contestar 11 preguntas), a un grupo de 20 estudiantes del segundo semestre que cursaban el laboratorio de la asignatura de Física I (Mecánica) de la carrera de ingeniería civil de la Universidad de Sonora. El curso era de 7 horas a la semana, 5 de teoría y 2 de laboratorio, con un profesor de teoría y otro de laboratorio que es el referente en esta experiencia. Se disponía de 7 computadoras en un aula del laboratorio de Física, y de una hoja de trabajo para cada estudiante donde se presentaron las actividades.

Para visualizar el experimento virtual es necesario ingresar a la página web: <http://didactica.fisica.uson.mx/> y seguir la ruta: sala didáctica, cursos, curso de Física con ordenador – acceder al tema: *Cinématica (Movimiento rectilíneo: Movimiento de caída de los cuerpos)*. La PC debe tener instalado el JAVA. En la Fig. 1 se muestra la simulación para el movimiento de caída de los

cuerpos, la cual genera una tabla de datos de cuatro columnas: tiempo, posición, velocidad y aceleración, además una gráfica de posición contra tiempo (x vs t). Las condiciones iniciales para la altura y la velocidad inicial son manipulables. El Problema consiste en dejar caer un cuerpo desde una altura de 100.0 m Se pide a los estudiantes llenar la tabla 1 para 10 tiempos diferentes y obtener las velocidades. Enseguida con los datos anteriores construir la tabla 2: obtener 8 cambios de velocidades con respecto al tiempo, usando la expresión: $(v_f - v_i)/(t_f - t_i) = a$. Posteriormente se plantean 11 actividades cuya información y resultados se describen en la sección siguiente del presente reporte.

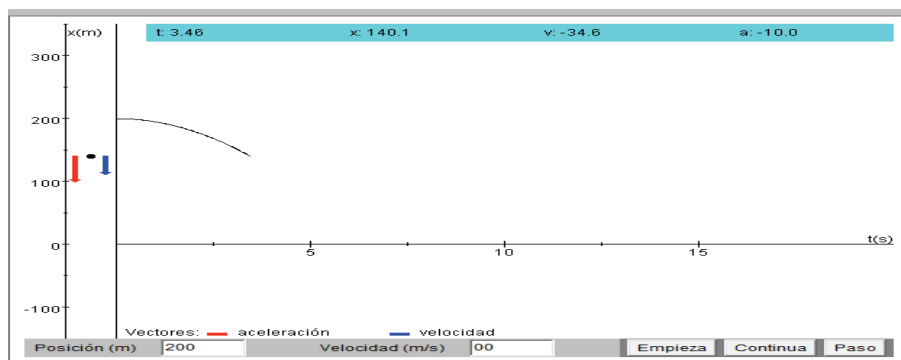


Figura 1. Corrida de un applet en línea para la caída de los cuerpos.

Valoración de la Idoneidad Didáctica de la Actividad Implementada

En esta sección se describe lo sucedido en el aula sobre el objeto de estudio y se muestran nuestras valoraciones didácticas a nivel de conjeturas. Empezamos presentando algunos resultados y su análisis de las respuestas de los estudiantes a las actividades de la hoja de trabajo, que nos permitió explicar y valorar lo sucedido en las facetas epistémica y cognitiva. La información sintetizada sobre las respuestas de los estudiantes a la tabla 2 y a las 11 actividades, se presentan en la Figura 2.

Una aclaración pertinente: Considerando que la valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio, de acuerdo con la metodología propuesta en el EOS, requiere valorar la idoneidad de cada una de las facetas de dicha metodología y que esto requiere recoger y analizar una gran cantidad de datos de muy diversa naturaleza y que el espacio de que se dispone para presentar este reporte es muy limitado, el análisis que se presenta aquí está restringido a dos de las facetas: la epistémica y la cognitiva.

Para llevar a cabo este análisis se utilizó la información de las actividades realizadas y la de las interacciones profesor-estudiantes registrada a manera de bitácora y de grabaciones de audio del suceso que ocurrió en un aula de laboratorio de Física. El propósito de las actividades propuestas y

promovidas por el profesor y realizadas por los estudiantes, fue que los estudiantes detectaran el tipo de proporcionalidad que se presenta en el fenómeno físico de caída de los cuerpos y logran modelarlo matemáticamente. Además como parte de la formación de profesores pretendemos mostrar el uso del análisis y evaluación de la ID en un proceso de estudio. Para lo cual nos planteamos las siguientes preguntas: a) ¿En qué medida es idóneo el proceso de enseñanza y aprendizaje observado? b) ¿Qué cambios se podrán introducir para mejorar la idoneidad?

Epistémica

La observación del proceso de estudio nos permite caracterizar el sistema de prácticas operativas y discursivas efectivamente implementadas, relativas a la actividad de estudio de la caída libre de un cuerpo y del objeto matemático proporcionalidad (OMP). La comparación de estas prácticas con el significado pretendido nos permite identificar diversos desajustes y formular conjeturas sobre la idoneidad del proceso de estudio, en cuanto a su dimensión epistémica. Con respecto al llenado de la Tabla I de la hoja de trabajo: la simulación por su diseño, aparece con ciertas condiciones iniciales que no coinciden con las del problema planteado, sin embargo la mayoría de los estudiantes activan la simulación sin considerar lo anterior. Por lo que el profesor hace ese señalamiento a todo el grupo. Lo anterior podría evitarse si en la hoja de trabajo aparecieran con más detalle aspectos como: Verificar las condiciones iniciales de la simulación, por ejemplo considerar la caída a partir del reposo.

Los estudiantes muestran dificultades y pocos logros en detectar, la relación de proporcionalidad entre la velocidad y el tiempo de caída del cuerpo, así como la cte. de proporcionalidad, y modelar matemáticamente el fenómeno físico, con una fórmula matemática que les permita predecir la velocidad para cualquier tiempo específico. Para modelar el fenómeno de caída con las condiciones iniciales presentan la expresión:

$$v = v_0 - gt \text{ o sólo un caso particular, por ejemplo: } v = -10.0m/s \text{ para } t = 1.0s.$$

En las respuestas pocos argumentan, a pesar de que en algunas actividades se formulan preguntas tales como ¿por qué?, ¿qué podemos decir? y en otras se pide a los estudiantes que justifiquen su respuesta. Por ejemplo en la 7: difieren del valor de la aceleración (gravedad) dado por la simulación a pesar de que ésta lo indica en todo el recorrido.

Cognitiva

Para el llenado de la Tabla II, el 40% de los estudiantes contestó que la aceleración es constante, a pesar de que el valor de ésta siempre aparece en el experimento virtual, por lo que conjeturamos que el problema lo descontextualizan del tema de caída libre y de la simulación. Al parecer lo

importante es manipular datos y obtener un resultado. Con respecto a la actividad I(A1). ¿Cuál es el valor del cambio de velocidad por segundo? El 70% contestó 10m/s, cabe señalar que del porcentaje anterior, 8 estudiantes de 14 no fueron congruentes con los datos que expresaron en la tabla II, donde la aceleración la consideraron variable. Para la A2. ¿Permanece constante o variable el cambio de velocidad por segundo? El 50% (10 estudiantes) responden que es constante, de los cuales, 4 consideran que el cambio de velocidad por segundo es 10 m/s en la A1, y en A2 responden que el cambio de velocidad es variable.

Para la A3. ¿Qué podemos decir de la velocidad con respecto al tiempo, conforme éste transcurre? 2 estudiantes responden que varía, 2 que es aproximadamente cte., 4 que disminuye negativamente y 12 (60%), que aumenta negativamente. Para la A4. ¿Qué significa físicamente el valor del cambio de velocidad por segundo? 4 estudiantes (20%), responden que la aceleración, 14 (70%) contestan que es la velocidad (de los cuales 4 consideran que es cte., 6 que aumenta, y 4 que es instantánea); 2 contestan ambiguamente como que es la “caída”. Para la A5. ¿Cuál sería la expresión matemática (fórmula) que relaciona la velocidad y el tiempo con la cual se pudiera calcular la velocidad en cualquier instante, por ejemplo para $t=1.34$ s? El 60% contestan que es la expresión: $v = v_0 -gt$, el 30% responden expresiones ambiguas tales como: $t_f-t_i(-10)$ y el 10% presentan un cálculo, por ejemplo, $v(1.34)=6.7$.

Para la A6. ¿Existe algún tipo de proporcionalidad entre la velocidad y el tiempo? Si la respuesta es no, di por qué; si la respuesta es sí ¿qué tipo de proporcionalidad es? El 70% considera que sí, sin embargo las argumentaciones son muy diversas: “la velocidad aumenta de 10 en 10m/s y la cte., es la aceleración” (2 estudiantes), “porque la velocidad es cte.”(6 estudiantes) o “porque $\Delta v/\Delta t$ es la distancia” (4 estudiantes) y 2 responden que no, “porque no avanza igual al transcurrir el tiempo”, 4 no contestan. Para la A7. Bosqueja la gráfica (v vs t), ¿Qué puedes decir de la relación entre la velocidad y el tiempo con base en la gráfica?, 50% contestan que es una parábola pero no la “leen” para el movimiento, 2 consideran que es una recta, 2 establecen relaciones entre las velocidades ($v_2=2v_1$), 2 expresan “por la forma la a es cte., y la velocidad aumenta”, 4 no contestan.

Para la A8. ¿Cómo puedes calcular la pendiente de la gráfica (v vs t)?, el 100% presentan expresiones equivalentes, pero el 50% más ligada al problema físico esto es: $(v_f - v_i)/(t_f - t_i)$, el otro 50% $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, con respecto a ésta última la mayoría no saben relacionar las variables con el fenómeno físico, por ejemplo $(y_2 - y_1)$, se relaciona con la velocidad o con el tiempo. Lo anterior hace suponer que unos acuden más a la memorización, la palabra pendiente les evoca la fórmula matemática, y otros tratan de aplicarla, pero en su totalidad no la calcularon. Para la A9. ¿Qué significa físicamente la pendiente de la gráfica (v vs t)? El 40% responden que es la aceleración, 40% que es el cambio de velocidad y 20% la distancia. Para la A10. ¿Qué puedes decir, si la gráfica es

paralela al eje del tiempo?, el 60% consideran que la velocidad es cte. (8 estudiantes) y 4 que es un MRU, 40% consideran que: “...no cae, está en reposo, la aceleración tiende a cero...” Para la A11. ¿Cuál es la ecuación que mejor se ajusta a los puntos de la gráfica v contra t ? Esta actividad tiene similitud con la 5, sin embargo las respuestas son más ambiguas, aunque persisten expresiones tales como: $t_f t_i(-10)$, o aún más generales, como: $v_f = v_o + at$. En la actividad realizada, al preguntarles ¿qué les causó mayor confusión?, manifestaron: “...encontrar o hacer las relaciones matemáticas...”, “...encontrar las relaciones matemáticas entre los factores...”.

Por lo anterior concluimos que al pretender resolver la situación problemática, en los estudiantes se manifiesta un conflicto cognitivo basado en un obstáculo que podemos denominar *cultural*, por la enseñanza recibida: dados unos datos obtener siempre un resultado numérico o algebraico, una fórmula general, sin una comprensión y argumentación en el contexto físico. Saber Física y Matemáticas es saber fórmulas y no construirlas, por lo que presentan un modelo fuera del contexto del problema trabajado con la simulación computarizada. Los significados personales de los estudiantes se van construyendo progresivamente a lo largo del proceso de instrucción, partiendo de unos significados iniciales al principio del proceso, y alcanzando unos determinados significados finales (logrados o aprendidos), sin embargo algunos de sus significados llegan a convertirse en serios obstáculos ante nuevas situaciones que les impiden ser competentes en el análisis, interpretación, argumentación y solución de problemas.

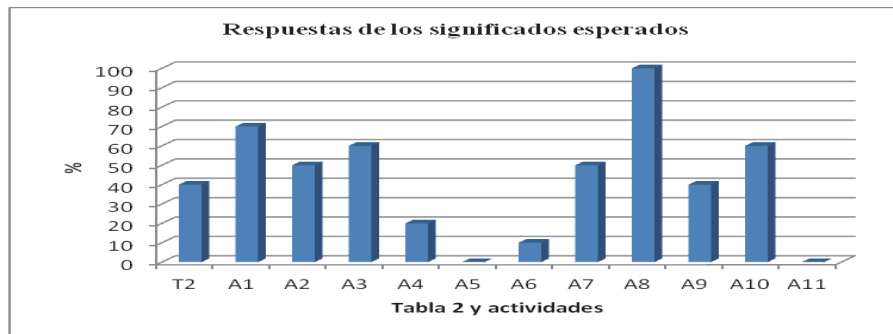


Figura 2. Se muestran los porcentajes de las respuestas de la tabla 2 y de las 11 actividades.

Conclusiones

En la teoría del EOS, consideramos que en la enseñanza de la Matemática, los alumnos puedan examinar y utilizar varias representaciones como una parte natural de la manera de resolver los problemas en diversos contextos y que es necesario romper con el enfoque cultural de la enseñanza tanto de la Física como de la Matemática que las reducen a resultados numéricos y fórmulas alejados de una comprensión conceptual de los significados institucionales de los objetos matemáticos.

Un obstáculo cultural que se manifiesta en el estudiante es que aprender significa manipular fórmulas desligadas de un contexto, no es aprender a “hacer” fórmulas, sino retener la información que le dieron para obtener resultados, lo que le queda de la escuela es que aprender Física es recordar fórmulas y no construirlas. El estudiante procede a dar respuestas numéricas por la formación recibida, dado que los problemas que plantean los profesores tienen siempre información suficiente para resolverse, es decir a partir de datos que se les dan obtener siempre un resultado. Siendo que en los problemas de la realidad social similares a los de la práctica profesional de los ingenieros difícilmente los problemas tienen la información suficiente para su solución. Por eso es imprescindible investigar tanto el aprendizaje de los estudiantes como la formación de los profesores.

Referencias bibliográficas

- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado el 10 de junio de 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Godino, J. y Font, V. (2006). *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio de las matemáticas*, *Paradigma*, 27 (2), 221-252.
- Godino, J. y Neto, T. (2013). *Actividades de iniciación a la investigación en Educación Matemática*. Recuperado el 20 de septiembre de 2013 de <http://www.ugr.es/~jgodino/>
- Parra, F.J., Ávila, R., Ávila, J. (2013). El significado del objeto matemático proporcionalidad. Su origen y desarrollo. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, (pp 1239-1248). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Vygostki, L. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica-Grijalbo.