

GESTIÓN DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS Y REFLEXIÓN DOCENTE: EL CASO DE LA MODELIZACIÓN Y LA ARGUMENTACIÓN EN EL AULA

Horacio Solar Bezmalinovic; Francisco Rojas, Andrés Ortiz y Rodrigo Ulloa

Universidad Católica de la Santísima Concepción.

Chile

Pontificia Universidad Católica de Chile

hsolar@ucsc.cl; frojass@uc.cl; aortiz@ucsc.cl; rulloa@ucsc.cl

Resumen. En este artículo, caracterizamos algunos aspectos que son importantes de considerar por parte del profesor para una gestión de las competencias de argumentación y modelización en el aula de Matemáticas. Se presenta el caso de dos profesoras que participaban en un seminario para el desarrollo de competencias matemáticas, a quienes se les registró la clase para ser analizada en el seminario. De los casos presentados, destacamos que el desarrollo de la argumentación depende principalmente de la gestión de aula, en cambio la competencia de modelización depende tanto del diseño de situaciones de aprendizaje como de su gestión en el aula.

Palabras clave: competencia matemática, modelo de competencia matemática, argumentación matemática, modelización matemática

Abstract. In this paper, we characterize some aspects that are important to consider by the teacher for a competences management the argumentation and modelling in the classroom. A case of two teachers who participated in a seminar for math competences development, who were recorded for analysis class at the seminary. In the cases presented, we emphasize that the development of the argumentation depends mainly on classroom management, however modelling competence depends on both the design of learning situations and their management in the classroom.

Key words: mathematical competence, mathematical competence model, mathematical argumentation, mathematical modeling

Introducción

Actualmente, el enfoque por competencias es considerado en la comunidad internacional como una propuesta educativa que va más allá del aprendizaje de contenidos. En el ámbito escolar, destacan algunos proyectos en torno a la implementación de este enfoque en matemática basados en las competencias propuestas por Niss (2002). En estas experiencias, el listado de competencias matemáticas corresponde a procesos matemáticos tales como razonar, argumentar, representar, calcular, modelar, resolver problemas y comunicar. Desde nuestro punto de vista una de las contribuciones del enfoque por competencias al currículo de matemáticas es dotarle una estructura orientada al desarrollo de procesos matemáticos (Solar, Azcárate y Deulofeu, 2012). Además, las competencias matemáticas, al sustentarse en procesos, se caracterizan por ser transversales a los núcleos temáticos y desarrollarse a largo plazo de manera cíclica en cada nivel educativo.

Para el desarrollo de competencias matemáticas en los alumnos, es esencial que los docentes cuenten con herramientas específicas que promuevan dicho desarrollo. En investigaciones desarrolladas en los últimos años (Solar et al., 2012a; Solar, Rojas, Ortiz y Ulloa, 2012), que ha dado pie al grupo “Competencias Matemáticas” (COMMAT), se ha logrado consolidar un Modelo

de Competencia Matemática (MCM) que permite a los docentes articular en su gestión de clases el trabajo con competencias matemáticas. Para ello, hemos propuesto una metodología de trabajo docente, en la cual se busca tanto la comprensión de dicho modelo por parte de los profesores como también impactar en el aula por medio de actividades bien organizadas, siguiendo el MCM como modelo didáctico para la gestión del conocimiento matemático.

En particular, nos hemos centrado en estudiar dos competencias que consideramos muy relevantes de promover en el aula: argumentación y modelización. En base a los resultados obtenidos en nuestras investigaciones, podemos señalar que los docentes se han apropiado de una manera diferente de estas competencias, que se ha reflejado tanto en sus reflexiones como en la gestión del aula (Solar, et al. 2012b).

En el estudio presentado, se caracterizan algunos de los aspectos que son importantes de considerar por parte del profesor para una gestión de las competencias de argumentación y modelización. A partir de estos antecedentes, la pregunta que guía este estudio es: ¿De qué manera la MCM contribuye a que los profesores gestionen argumentación y modelización en el aula?

Marco Teórico

El marco teórico que fundamenta este artículo desarrolla tres aspectos: el Modelo de Competencia Matemática (MCM), la competencia de modelización y competencia de argumentación.

Modelo de Competencia Matemática (MCM)

El Modelo de Competencia Matemática (MCM) que hemos propuesto se sustenta en la perspectiva funcional de las matemáticas, “mathematical literacy” (OECD, 2003). En concreto, el MCM para la competencia de modelización se conforma por cuatro componentes (Solar, 2009; Solar et al., 2012b):

- ❖ *Competencia matemática*: En base a los estándares de procesos del NCTM (2003) y las competencias matemáticas propuestas por Abrantes (2001), Niss (2002) y Pisa (OECD, 2003) acordamos elegir y optar por procesos matemáticos nucleares que denominamos competencias matemáticas, las cuales organizan y articulan el currículo de matemáticas.
- ❖ *Procesos matemáticos*: el significado de proceso se ha acuñado de la propuesta curricular del NCTM (2003). Cada competencia matemática se compone de procesos matemáticos; éstos están presentes de forma transversal a los contenidos matemáticos y se desarrollan a largo plazo.

- ❖ *Organizaciones matemáticas:* pese a que los contenidos matemáticos no se constituyen como el elemento estructurante del MCM, se hace necesario articularlos con los procesos o competencias matemáticas específicas. En particular se utilizaron las bases de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999), en la cual los contenidos matemáticos se estructuran en términos de Organizaciones Matemáticas, las cuales permiten establecer un núcleo de relaciones entre contenidos, desatomizándolos y permitiendo así una articulación con las competencias matemáticas. Una organización matemática nace como respuesta a un tipo de cuestiones problemáticas y está constituida por cuatro categorías de elementos: tipos de tareas, elementos técnicos, tecnológicos y teóricos.
- ❖ *Niveles de complejidad:* el progreso de la competencia se determina en términos de la complejidad de la actividad, que depende tanto de las tareas como de los procesos que la conforman. La expresión nivel de complejidad se adopta de los grupos de competencia de PISA (OECD, 2003) basados en la pirámide propuesta por de Lange (1995). En nuestro modelo de competencia, los niveles de complejidad se denominan de la misma manera que en PISA, pero se determinan de una forma distinta; además, a partir de nuestros estudios empíricos se ha visto la conveniencia de agregar un nivel más entre conexión y reflexión, el cual hemos denominado generalización, resultando así cuatro niveles de complejidad: reproducción, conexión, generalización y reflexión.

Competencia de Modelización

La modelización en el aula de matemáticas es uno de los tópicos que actualmente destaca en didáctica de la matemática y que está cada vez más vinculado con la noción de competencia. En el estudio I4 ICMI las competencias en la modelización han sido interpretadas principalmente de dos maneras: como las acciones a llevar a cabo en las fases de modelización (Kaiser, 2007), y como niveles de complejidad (Henning y Keune, 2007).

En términos generales, la modelización se presenta como las fases para resolver un problema proveniente de una situación real por medio de un modelo matemático (Maaß, 2006). Se inicia generalmente con una situación extramatemática, se simplifica a un modelo real, y se matematiza para obtener un modelo matemático; se resuelve dentro del modelo y se interpreta la solución de modo coherente con la situación inicial; finalmente se evalúa si responde a la situación original. Estos cinco pasos señalados son denominados fases de modelización.

Para caracterizar la competencia de modelización nos hemos sustentado en las fases de modelización de Maaß (2006), los trabajos sobre modelización en términos de matematización

conducidos por de Lange (1987), y los trabajos sobre modelización emergente (Gravameijer, 2007), este último enfoque ha sido de particular interés para atribuirle una función didáctica a la competencia de modelización. El término “emergente” se refiere tanto al carácter del proceso por el cual los modelos surgen en la educación matemática realista, como al proceso por el cual estos modelos apoyan la aparición de los modos matemáticos formales de saber. El modelo primero empieza a destacar como un *modelo* de las estrategias informales de los estudiantes. Entonces, con el tiempo el modelo gradualmente se convierte en una entidad propia y empieza a servir como un *modelo para* un razonamiento matemático más formal.

Competencia de Argumentación

En general, los análisis de argumentación en el aula se sustentan en el modelo argumentativo propuesto por Toulmin (1958), que sigue un proceso lineal desde los datos hasta las conclusiones. Esta secuencia consta de seis elementos (Goizueta y Planas, 2013). Para estudiar la argumentación en el aula de matemáticas, Krummheuer (1995) propone una secuencia de argumentación basado en el modelo argumentativo de Toulmin. Sin embargo, reduce el sistema original a cuatro elementos: datos, garantía, respaldo y conclusión.

Para nuestro análisis interpretamos los componentes del modelo argumentativo de Toulmin como procesos matemáticos. En efecto, nuestro estudio se enfoca en la caracterización de los procesos matemáticos que aparecen en la argumentación, a diferencia del tipo de análisis que realizan Krummheuer y otros autores que han seguido a Toulmin para estudiar la argumentación en el aula de matemáticas, que se centran en la secuencia argumentativa. A diferencia de Krummheuer, se considera como base el modelo argumentativo original de Toulmin, para así poder discutir en nuestra propia investigación qué papel juegan todos los procesos que conforman la estructura argumentativa.

En Solar et al. (2012a) se muestra un estudio realizado en un curso de 8° básico sobre qué procesos argumentativos de la estructura de Toulmin (1958) emergen en la implementación de una unidad didáctica de interpretación de graficas funcionales, obteniendo como resultado agregar el procesos de interpretación a la estructura argumentativa.

Metodología

La experiencia que presentamos, comenzó con la conformación de un seminario de 10 sesiones quincenales con 11 profesoras de primer y segundo año de educación primaria pertenecientes a establecimientos educacionales de la ciudad de Concepción (Chile) y alrededores. El seminario se organizó siguiendo una metodología de trabajo docente, que iniciaba con un estudio por parte de las profesoras del MCM a través el análisis conjunto de episodios de clases de otras profesoras,

grabados con el propósito de mostrar el desarrollo de competencias matemáticas. Como parte de la metodología de trabajo docente, una vez que las profesoras analizaban los episodios, se les sugería la implementación de actividades puntuales para el desarrollo de las competencias.

En este artículo se presenta el caso de dos profesoras, Graciela y Sandra, a quienes mediante una observación no participante, se les registró la clase para luego ser analizada mediante una discusión reflexiva en el seminario.

Análisis de Datos

En una de las sesiones del seminario se analiza un episodio de clase en que la profesora Graciela propone al curso la resolución del siguiente problema aditivo de composición: “Enrique tiene 26 gusanos de seda y Lorena tiene 38. ¿Cuántos gusanos de seda tienen en total los dos?”. Los niños resuelven utilizando diferentes técnicas, luego Graciela hace pasar a dos niños a mostrar sus cálculos, el primero mediante el algoritmo tradicional, y el segundo por la técnica del “trasvasije”. Graciela propone que se contrasten las dos técnicas y en particular que el niño que utilizó trasvasije explique al curso cómo es el procedimiento.

En la sesión del seminario, se discute cual es la competencia predominante en la gestión de la actividad. A continuación se presenta un extracto del seminario en que los docentes analizan el episodio de clase.

Guía: cual son las competencias predominantes en el video o en la gestión de esta actividad

Valentina: Puede ser el razonamiento y la argumentación... no se vio todo el video pero en lo poco que se vio, ella le pregunta a los niños como lo hicieron y llama a otro niño para modelar adelante y lo hizo de otra forma diferente al algoritmo tradicional y le fue consultando que él le diga como lo hizo, como lo fue haciendo, que explique a los demás como lo hizo.

Mónica: El cálculo y manipulación de expresiones también

Guía: ¿Por qué Mónica?

Mónica: Porque realizó procedimientos de cálculo

Guía: porque realizó procedimientos de cálculo

Mónica: los niños realizan los procedimientos...

Guía: ¿están de acuerdo con Mónica de agregar Cálculo y manipulación de expresiones? Hay alguna de esas dos que es más predominante. ¿María Antonia que piensas tu?

María Antonia: trabaja las dos en realidad porque se contrasta las dos técnicas

Guía: ¿Laura que piensas tu?

Laura: si porque (...), las dos técnicas quedan claras en este caso, queden bien identificadas el trasvasije y el algoritmo.

Guía: ¿Carmen?

Carmen: opino lo mismo que ella, porque en realidad los niños explicaron bien, fueron (a la pizarra), decían como lo hacían

Guía: ¿Tú estás de acuerdo Graciela con tus colegas?

Graciela: Siento que tuve la intención de que argumentarán pero yo no quedé conforme con su argumentación.

Guía: en qué caso no quedaste conforme

Graciela: Porque siento como que la parte del algoritmo tradicional fue muy mecánico, porque ni explico.

Guía: ¿y quién lo explicó?

Graciela: lo explique yo [en el seminario hay una exclamación de sorpresa] y la parte de la técnica del trasvasije, sabes que quedó un poco más clara pero igual su explicación fue un poco más mecánica que razonada y argumentada.

En el extracto del seminario, se discute cual es la competencia predominante en la gestión de la actividad, una parte de los profesores coinciden que es la competencia de cálculo porque se realizan diferentes procedimientos. No obstante Graciela interviene diciendo que el énfasis en esa parte de la clase es en la argumentación, y no precisamente en el cálculo, y en base a ello dice no estar del todo satisfecha con la argumentación de los niños dado que fue más mecánico que razonado. En el análisis de esta discusión se aprecia la importancia de tener claridad sobre la competencia que se promueve.

Otra sesión del seminario se diseñó para problematizar en torno a la modelización. Se analiza la implementación que hace la profesora Sandra, de una actividad cuyo propósito era que los niños utilizarán esquemas de barras para modelizar problemas de composición. Para ello, la profesora

propuso el siguiente problema: “Tengo 25 cajas con jureles y sierras. Si tengo 19 cajas de sierras, ¿cuántas cajas de jureles hay?”. En el episodio de la clase se observó cómo la profesora promueve el uso de esquemas, siendo lo ideal que los alumnos los utilicen para reconocer el tipo de problema aditivo (comparación) y plantear la operación. Sin embargo, en el episodio se evidenciaron grandes dificultades en los estudiantes para usar el esquema y reconocer la operación, lo cual se manifestó en el considerable tiempo invertido en la resolución del problema.

En la sesión del seminario las profesoras reflexionaron sobre las dificultades presentadas en el episodio de clase. A continuación se presenta un extracto de la discusión de las profesoras.

Ángela: Yo siento que a priori es muy complejo porque tu le estas trasladando los pescados que están al lado de la pantalla a una huincha [referido al esquema] que dice 19.... Pero yo siento que el objetivo de lograr la modelización del esquema, ese mismo yo le hubiera resuelto mostrándole el 19 que son tantos pescados, y que estos tantos son los jureles y tenemos que sacar la diferencia que son otros tipos de pescado y después cuando él ya tiene en la cabeza este cuento, ahí utilizamos la huincha porque el ya va a saber que este pedazo rojo es el total de todos los pescados.

Sandra: Yo tengo que asumir los siguiente, lo que pasa es que yo tiré mis chiquillos a los leones al tiro, y yo insisto que no fue muy fluido para ellos, y mi segundo problema yo lo tuve que haber hecho primero porque el esquema era de conchitas y lo le puse digamos 19, en la cinta le puse los 19 conchitas, y en la otra le puse 11 por ejemplo y había que sacar cuantas más tenía la amiga y ahí contaron solamente y la sacaron al tiro,

Sandra: Yo me hice un autoanálisis y llegué a la conclusión que no tuve que haber puesto este problema

Graciela: Yo creo que a lo mejor le faltó a Sonia quizás es rescatar la acción [aprobación otra profesora], porque aquí habían peces, pero habían dos tipos de peces y que tu necesitabas separar del cual había de cada tipo. Qué ellos supieran identificar para poder separar como condición para poder restar y en base a eso presentar el esquema.

En la discusión se puede apreciar que Ángela planteó que faltó dedicarle más tiempo a la comprensión de los datos del problema para luego usar el esquema para representar los datos; Sandra, aludió que los niños aun no estaban preparados para usar esquemas para este problema y que tuvo que comenzar con el segundo problema que presentó esa clase en que las colecciones

eran de la misma naturaleza (conchitas) y los niños identificaron la operación sin dificultad; y Graciela argumentó que faltó destacar la acción involucrada de separar para reconocer la resta antes de presentar el esquema. Por tanto, se llega a la conclusión de que el problema de comparación no fue el apropiado para introducir el uso esquemas, y que tuvo que haber sido con un problema más sencillo, por ejemplo, de juntar o separar (composición).

Conclusiones

De los dos casos presentados, destacamos que las condiciones para el desarrollo de la argumentación y modelización son diferentes. Para un adecuado desarrollo de la argumentación es importante que el docente realice buenas preguntas y explicitación de los razonamientos de los estudiantes, sin importar necesariamente el tipo de problema presentado. Ante estas características podemos decir que es una competencia asociada principalmente a la gestión de clase. En cambio para el desarrollo de la modelización es necesario tener claridad de los modelos que pueden emerger según el tipo de problemas, y un trabajo de estudio de estos modelos con los estudiantes. Estas características nos permiten señalar que la competencia de modelización depende tanto del diseño de situaciones de aprendizaje como de su gestión en el aula.

Referencias bibliográficas

- Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 125-143.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- De Lange, J. (1987). *Mathematics: insight and meaning*. Utrecht: OW y OC.
- De Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. En T. A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment* (pp. 87-172). New York: SUNY Press.
- Goizueta, M. y Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(1), 61-78.
- Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, M. Niss, (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 137-144). New York: Springer.

- Henning, H. y Keune, G (2007). Levels of modeling competence. En W. Blum; P. L. Galbraith; H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 225–232). New York: Springer.
- Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. En Haines, C., Galbraith, P., Blum, W., Khan, S. (Eds.), *Mathematical Modelling. The 12th ICTMA Study. Education, Engineering and Economics* (pp. 110-119). Chichester: Horwood.
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 113-142.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática. España: Thales.
- Niss, M. (2002) (coord). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish kom project*. Roskilde: Roskilde University.
- OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003*. Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas. Paris: autor.
- Solar, H. (2009). *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso*. Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Solar, H., Azcárate, C. y Deulofeu, J. (2012a). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(3), 133-154.
- Solar, H., Rojas, F., Ortiz, A. y Ulloa, R. (2012b). Reflexión docente y competencias matemáticas: un modelo de trabajo con docentes. *RECHIEM*, 6(1) 257-267.
- Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.