REFLEXIONES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS AL ANALIZAR LOS ERRORES DE LOS ESTUDIANTES

Leticia Sosa Guerrero, Elvira Borjón Robles y Judith A. Hernández Sánchez
Universidad Autónoma de Zacatecas México
lsosa19@hotmail.com, eborjon@matematicas.reduaz.mx, judith700@hotmail.com

Resumen. En este artículo presentamos algunos resultados correspondientes a una experiencia en la formación de profesores. En un taller de actualización para profesores, con el objetivo de provocar la reflexión del profesor a través del análisis de errores de los estudiantes, se les asignó una tarea a un grupo de profesores de matemáticas. Mostramos un estudio de caso constituido por una profesora de nivel bachillerato, la tarea encomendada y la puesta en común en el grupo. Las reflexiones se orientan principalmente a tratar de buscar formas para poder dar un tratamiento didáctico a aquellos errores, además de conocer lo que piensan los estudiantes a través del análisis de los errores e incluso, intentar que los alumnos sean capaces de reflexionar sobre sus errores, construir su conocimiento, y dominar mejor los contenidos matemáticos.
Palabras clave: reflexión del profesor, conocimiento del profesor, análisis de errores, matemáticas.
Abstract. In this paper we report some results about an experience in the mathematics teacher training. We try to form a learning environment through a refresher course for teachers, from their own reflections on the analysis of the errors made by students in mathematics class. We assigned a task to a group of mathematics teachers. We show a case study (of a teacher of high school level), the task assigned and the implementation of the task in working group. The reflections are mainly aimed to seek ways to provide a didactic treatment to those errors as well as knowing what the students think through the analysis of the errors and that students will be able to reflect on theirs errors, build their knowledge, and better master the mathematical content.
Key words: reflection of teacher, teacher knowledge, analysis about error, mathematics

Introducción

Las investigaciones de Ball (2002), Jaworski (2002) y Kilpatrick (2003), después de que Shulman (1986) introdujo la noción de conocimiento didáctico del contenido (PCK – Pedagogical Content Knowledge), ponen de relieve varias cuestiones sobre el profesor de matemáticas. Con énfasis en la enseñanza, el conocimiento y las habilidades que pone en acción el profesor, así como en los procesos de aprendizaje para los cuales el profesor desarrolla esos conocimientos y habilidades, y en los contextos de formación que ofrezcan oportunidades de aprendizaje para ello (Gómez, 2007).

De hecho, hoy en día el conocimiento del profesor sigue siendo objeto de estudio. A nosotros nos interesa estudiar no solo el conocimiento del profesor sino también esa parte importante en su formación: la reflexión sobre su quehacer profesional. En este documento presentamos las reflexiones del profesor al analizar los errores de los estudiantes, bajo la hipótesis de que uno de los conocimientos que necesita el profesor está relacionado con saber cómo piensan o pueden pensar matemáticamente sus estudiantes al impartir un tema concreto, en el cual está inscrito el conocimiento concerniente con el análisis serio y profundo de los errores de sus estudiantes.

Fundamentos Teóricos

Para Shön (1983), la reflexión es una característica de una buena práctica y existen dos tipos de reflexión que pueden ocurrir y que determinan el conocimiento profesional del profesor: reflexión en la acción y reflexión sobre la acción. La reflexión en la acción es el proceso mediante el cual los profesores hacen explícito el conocimiento en la acción, significa detenerse a pensar durante la propia acción acerca de las razones por las que actuamos y las consecuencias de esa actuación. En tanto que, la reflexión sobre la acción es el proceso de análisis que efectúa el profesor *a posteriori* sobre las características y los procesos de las acciones que ha realizado.

El conocimiento profesional es un conocimiento necesario y específico de cada profesión. De acuerdo con Tamir (1991), el conocimiento profesional es el cuerpo de conocimiento y habilidades que son necesarios para funcionar con éxito en una profesión particular. En ese sentido, asumimos que es complejo comprender el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y más aún aquél que pone en acción para analizar, estudiar y poder dar un tratamiento didáctico a los errores de los estudiantes además de que todavía hay mucho que estudiar al respecto.

De hecho, en la propuesta del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT –Mathematics Knowledge for Teaching- Ball, Thames y Phelps, 2008) se pone de relieve que el profesor, aparte de identificar los errores de los estudiantes, analice la naturaleza de los errores. Empero, consideramos que también es necesario profundizar en el entendimiento del aprendizaje de los estudiantes mediante el error.

Ya desde hace años existe una preocupación por el estudio de los errores, por ejemplo, Brousseau (1997) retoma de Bachelard (1938) el término de obstáculo epistemológico y lo explica como sigue:

> […] el error y el fracaso no tienen el papel simplificado que a veces se les quiere asignar. El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus logros, pero que, ahora se revela como falso o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, sino que constituyen obstáculos (Brousseau, 1997, p. 84).

Más aún, Astolfi (2004) expresa que:

> El problema del error en el aprendizaje es seguramente tan antiguo como la enseñanza misma. Sin embargo, nos encontramos continuamente con el error en la vida diaria, y el

> sentido común no deja de repetirnos que sólo dejan de equivocarse los que no hacen nada… [...] (Astolfi, 2004, p. 7).

Inclusive, hay autores que reconocen que el error no es fácil de desaparecer pues puede ser persistente pero si es atendido puede contribuir de manera positiva en el proceso de aprendizaje (Brousseau, Davis y Werner, 1986, citados en Vrancken et al., 2006). Ante la importancia del error en el aprendizaje de los estudiantes, se hace eminente llamar la atención en los conocimientos que requiere el profesor para dar un tratamiento didáctico a esos errores, así como profundizar en conocer cómo puede desarrollarse ese conocimiento. Sin lugar a duda, esto no es trabajo fácil, pues es complicado definir y delinear las tareas que el profesor ha de desempeñar en el proceso de enseñanza y aprendizaje e identificar, conocer y comprender los saberes necesarios para ello.

Metodología

La investigación que aquí se presenta está inscrita en el paradigma interpretativo (Latorre, Del Rincón y Arnal, 1996), es de corte cualitativa en términos de Erickson (1986), quien pone de relieve a la característica que más distingue a la indagación cualitativa, la interpretación. En cuanto al método, dado que nos interesa profundizar en la interpretación de la reflexión que una profesora pone en acción en torno al conocimiento de los errores cometidos por los estudiantes, el método consiste de un estudio de caso (Stake, 2005). El caso está constituido por una profesora (Mari) de bachillerato con 12 años de experiencia, Mari es reconocida como una buena profesora por las autoridades de su institución, sus exalumnos y sus pares. Respecto a la técnica, la fuente primaria de información es la observación de las sesiones del taller (videograbaciones).

El caso que aquí nos ocupa es parte de una investigación más amplia cuyo objetivo es analizar los fenómenos que aparecen durante un taller en el que participaron 15 profesores de nivel medio superior realizado durante una semana, 2 horas al día. A todos los participantes se les explicó el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza y posteriormente se les asignó una misma tarea. Se les pidió que identificaran un error “común” de los alumnos en un contenido matemático concreto, luego deberían tratar de explicar los posibles pensamientos matemáticos que le permiten al estudiante dar esa respuesta errónea y finalmente hacer una propuesta concreta para dar un tratamiento didáctico a ese error en los estudiantes. Además, se les solicitó que presentaran lo realizado ante el grupo y que entregaran un reporte de ello por escrito.

Resultados

Mari propone que un error común en sus estudiantes consiste de las malas interpretaciones en el cálculo de límites, encontrando entre estos, situaciones, como por ejemplo, la siguiente $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$:

> El error frecuente que los alumnos de nivel medio superior comenten cuando tienen problemas como este, es el de pensar que el resultado de este límite es infinito. Los alumnos son propensos a escribir expresiones como las siguientes cuando se está trabajando con límites:
>
> $\lim_{x \to 4} \frac{1}{x-4} = \infty$ y $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \infty$ (Mari en su exposición ante el grupo)

Al respecto, Mari presenta como posibles razonamientos/pensamientos de los estudiantes ante esos errores lo siguiente:

> Para estos casos, el pensamiento matemático que subyace en los alumnos cuando resuelven estas situaciones es el hecho de generalizar el análisis de las tendencias de x, cuando ésta se acerca al dos [para el caso $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \infty$], pero sin tener en cuenta que las tendencias laterales pueden provocar cambios en los signos de los resultados que se obtienen. Es decir, los estudiantes llegan a pensar que cualquier número que se divide por un número muy pequeño, es infinito. (Mari en su exposición ante el grupo –el agregado en corchete es nuestro).

Interpretamos que Mari quiere hacer notar que en ese error de los estudiantes, ellos sólo se fijan en evaluar la función en el punto de tendencia de *x* y no propiamente en el límite de la función en el punto de tendencia de *x*.

Además, Mari agrega que:

> En primer lugar debemos señalar, que con esto se está destacando la noción que tienen los alumnos de que el infinito es un número, siendo que el infinito es una tendencia, una expresión, y no un número. En segundo lugar, existe una necesidad del docente de subsanar, y corregir esta concepción del alumno de que todo número fijo que se divide por un número cercano a 0 "es" infinito, y cambiar el pensamiento con respecto a los límites de funciones como las que planteamos en los ejemplos anteriores. (Mari en su exposición ante el grupo).

La propuesta de tratamiento didáctico que plantea Mari para ese error es el uso de distintas representaciones: gráfica y numérica. La estrategia de Mari consiste en trabajar estas dos perspectivas de la siguiente manera:

1. Sin decirle al estudiante que el resultado al que está llegando es incorrecto (al responder infinito en los límites anteriores), trabajar el límite de las funciones desde una tabla de valores.

   Mari considera que:

   > Este mecanismo resulta provechoso a la hora de entender el comportamiento de los límites en ciertos puntos, puesto que el alumno, desde una experiencia personal, siente mayor seguridad al sacar cuentas, al ir "probando" mediante el ensayo y el error lo que va sucediendo con la función en los puntos indicados.

   Mari supone que este mecanismo le da seguridad al estudiante sobre los caminos que utiliza y las acciones que realiza, antes de pasar a conceptos formales. Además, Mari expresa que:

   > El docente en este caso debería servir de guía incitando interrogantes, como por ejemplo, ¿qué significa que una función tenga límite infinito?, ¿cómo es el comportamiento de una función cuando su límite va a infinito?, ¿qué está pasando en las cercanías del punto de límite?

   y que a partir de esas preguntas y de las respuestas de los estudiantes el profesor pueda realizar una tabla donde se visualicen esos comportamientos y genere una forma de análisis de los límites laterales como se muestra en la siguiente tabla:

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	3	3,00001	3,0001	3,001	3,01
f(x)									

   De tal forma que con esta tabla, el profesor y los alumnos puedan ver los valores diferentes que la función podría tomar en los puntos cercanos al punto de límite y de esa manera determinar que el comportamiento de la función por derecha y por izquierda es diferente. Esta sería una forma de ver tendencias laterales por izquierda y por derecha de una función en un determinado punto de límite.

2. Luego, si con esto no se logra "convencer" a los estudiantes, entonces también se les podría proponer hacer un gráfico de la función, ya sea en pizarrón, o mediante un

software, para ver, junto con la tabla, como sería el "dibujo" de la función. La Figura 1 siguiente, refleja la gráfica de la función mediante la utilización de un software:

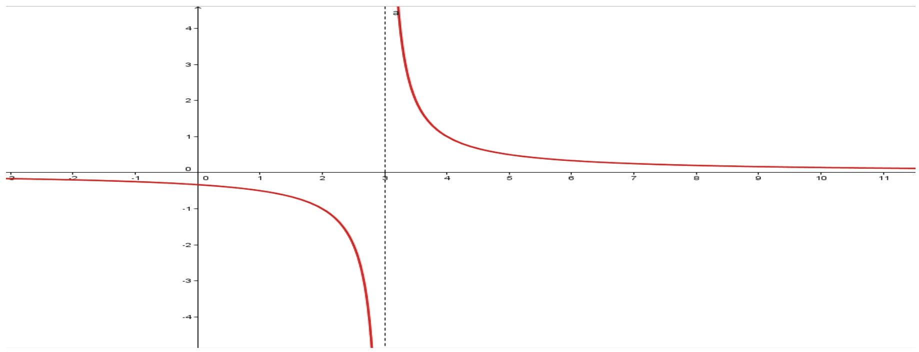

Figura 1. Gráfica de la función.

La idea de Mari es que vean la función en forma de "foto", que noten cómo se comporta la función cuando la variable se acerca al tres por la derecha y por la izquierda, haciendo hincapié en un entorno reducido centrado en tres, introduciendo así la idea del límite en un intervalo que este centrado en el punto de límite, y que sea lo más pequeño posible. A ella, le interesa hacer notar que las tendencias son muy diferentes, y que si bien se dirigen al infinito, lo hacen en distinto sentido. En esta dirección, Mari reflexiona en cuanto a la enseñanza y expresa: "[…] aquí la docente debería introducir en los alumnos la noción de que este hecho no se traduce en que el límite de la función es infinito, sino más bien que no existe el límite en dicho punto".

3. Después de lo anterior, Mari propone continuar trabajando con más ejemplos como los anteriores de tal forma que el estudiante visualice comportamientos desde lo gráfico o desde lo numérico porque ella considera que eso ayuda mucho a los alumnos que tienen dificultades para comprender por primera vez el concepto de límite.

4. Posteriormente, luego de trabajar los puntos anteriores, para completar el concepto de límite, Mary plantea trabajar ya con la definición formal de límite de una función:

> Sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene a un número "a", exceptuando posiblemente a "a". Decimos que el límite de f(x) a medida que x se acerca a "a", es L, y se escribe: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - a| < \delta$. (p. 105).

5. Finalmente, con todas estas propuestas Mari esperaría que sus estudiantes revisen su respuesta inicial sobre el infinito como límite, y que puedan trabajarlo desde la concepción de un entorno reducido en $x=3$.

Ella reconoce que esta actividad le representa "[…] las formas de enseñanza que de a poco vamos aprendiendo en nuestra carrera." Y que esto en sí es sólo una propuesta, una hipótesis, lo cual conlleva a seguir mejorando la propuesta una vez que se vaya poniendo en práctica.

En general, a pesar de que el profesor pueda identificar y analizar los errores de los estudiantes, eso no implica que todos los errores tengan un tratamiento mecánico cuando se presentan en la clase, por tanto, en la práctica docente el profesor debe ser científico e ir construyendo el objeto a enseñar (Sosa, 2006).

Las reflexiones finales de la profesora son expresadas en los siguientes términos:

> Aprender a reflexionar sobre estos posibles comportamientos de los alumnos frente a diferentes situaciones, permite que podamos desarrollar más nuestro *pensamiento reflexivo*, en tanto que seamos capaces, no solo de advertir los errores que se puedan producir en el aula, sino también que podamos pensar de qué formas podemos subsanar estos errores, pero no corrigiendo a nuestros alumnos, y descartando sus procedimientos como equivocados. Debemos hallar la forma de enriquecer su conocimiento con esos errores, apelar a los *conocimientos comunes* que se tengan dentro del curso, para poder complementarlos con los *conocimientos especializados* (Sosa, 2012) que tenga el docente sobre determinado contenido matemático, pero evitando la enseñanza de forma "tradicional", es decir, que solo el docente posee conocimiento, lo explica, y los alumnos deben atenerse a aplicar lo que el docente ha dicho. Para ello es necesario que conozcamos a nuestros estudiantes, y con formas de ver los contenidos como éstas, por medio de análisis de los errores, de trabajar con respuestas que pueden ser inesperadas para los profesores, podemos garantizar un aprendizaje más significativo, donde los alumnos sean capaces de reflexionar sobre sus prácticas, construir su conocimiento, y dominar mejor los contenidos matemáticos. (Mari en su documento final escrito).

Mari agrega:

> Además, apenas comenzamos con el trabajo, estas situaciones son las que generan un cambio, una reestructuración de las bases tanto didácticas como matemáticas que trae un profesor al ingresar al aula, y permiten esta apertura, esta reubicación del docente frente a sus estudiantes. (Mari en su documento final escrito).

Sabemos al igual que Mari, que estos resultados son apenas un inicio de lo que nos falta por estudiar, por entender y comprender de los conocimientos del contenido y didácticos del contenido del profesor de matemáticas en el aula, de las carencias y fortalezas de los conocimientos del profesor que nos expresan a través de sus reflexiones.

Conclusiones

Aún hay mucho por investigar en cuanto a los conocimientos del profesor para enseñar matemáticas, de tratar de conocer incluso, cómo se usan esos conocimientos en la dinámica en el aula y bajo qué interacciones, y cómo desarrollar esos conocimientos en el profesor, sin olvidar el papel de la reflexión del profesor para mejorar su propia práctica docente. Esto, tratando de aspirar a llegar algún día a ser capaces de explicar al menos una parte de lo que Goldhaber (2002) llama el misterio de la enseñanza.

Los errores integran una parte fundamental en el aprendizaje de los alumnos, pues pueden servir para implicar al estudiante en la actividad de explicar sus propios errores y reflexionar sobre éstos. Esto pone de relieve el hecho de que el profesor sea consciente e intervenga en la enseñanza para sacar provecho a los errores para mejorar el aprendizaje del estudiante (Sosa y Aguayo, 2013). Con ello, es natural cuestionarse sobre los conocimientos que ocupa el profesor para dar un tratamiento didáctico a los errores de los alumnos y de qué forma pueden desarrollarse esos conocimientos (Sosa, 2011). En todo este proceso, la reflexión del profesor juega un papel fundamental si la consideramos como una característica de una buena práctica y que determinan el conocimiento profesional del profesor (Shön, 1983).

Por lo tanto, consideramos que analizar los errores de los alumnos de una manera consciente y detallada y además, ocuparse de diseñar el tratamiento didáctico para subsanar el error de sus alumnos, constituye una oportunidad de aprendizaje para el profesor y en particular, eso puede ayudar a fomentar y enriquecer su propio conocimiento profesional (Sosa, Huitrado, Hernández, Borjón y Ribeiro, 2013). Las reflexiones de la profesora giran en torno a intentar entender posibles comportamientos de los alumnos frente a diferentes momentos de aprendizaje, para advertir los errores que se puedan producir en la clase y tratar de buscar formas para poder dar un tratamiento didáctico a aquellos errores.

Además de hallar la forma de enriquecer los conocimientos del profesor y conocer a los estudiantes a través del análisis de los errores, incluso hacer que los alumnos sean capaces de reflexionar sobre éstos, construir su conocimiento, y dominar mejor los contenidos matemáticos. Más aún, generar una reestructuración de los conocimientos y acciones tanto didácticas como matemáticas que trae un profesor al ingresar al aula, que permitan una apertura al cambio con la intensión de mejorar su práctica frente a los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Astolfi, J. (2004). *El "error", un medio para enseñar*. Díada, Sevilla. Disponible en http://blogfcbc.files.wordpress.com/2012/03/7-astolfi-elerror.pdf

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico.* Siglo XXI, México.

Ball, D.L. (2002). What do we believe about teacher learning and how can we learn with and from our beliefs? En D. S. Mewborn, D.Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Matematics Education*. *3*, 3-19.

Ball D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407.

Brousseau, G. (1997): "Epistemological obstacles problems and didactical engeneering" en Balachef, N., Cooper, M., Sutherland, R. y Warfield V. (Eds.) *Mathematics Education Library*, Kluwer Academic Publishers.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research of teaching. En M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*, pp. 119-161. Nueva York, Macmillan.

Goldhaber, D. (2002). The mistery of good teaching. *Education Next*, 2(1), 50-55.

Jaworski, B. (2002). Layers of Learning in Initial Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(2), 89-92.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Universidad de Granada.

Latorre, A., Del Rincón, D., Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Hurtado ediciones.

Kilpatrick, J. (2003). Promoting the proficiency of U.S. mathematics teachers through centers of learning and teaching. En R. Strässer, G. Brandell; B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education*. 143-157. Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciencies.

Schön, D. A. (1983). *The Reflective Practitioner: how professionals think in action*. New York: Basic Books.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association, 15*(2), 4-14.

Sosa L. (2006). *Tipos de concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje. Un estudio con profesores en servicio.* Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México.

Sosa L. (2011). *Conocimiento Matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. Tesis doctoral publicada en http://hdl.handle.net/10272/4509.

Sosa, L. (2012). *Profesionalización docente. Conocimiento Matemático para la Enseñanza.* Seminario de capacitación y de posgrado. Universidad de Villa María, Córdoba, Argentina.

Sosa, L. y Aguayo, L. (2013). Pensamiento numérico: errores frecuentes de los estudiantes en la enseñanza. *5º Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas*. UNAM, México.

Sosa, L., Huitrado, J.L., Hernández, J., Borjón, E. y Ribeiro, M. (2013). Uma oportunidade para o profesor aprender analizando os erros dos alunos – Un exemplo de Álgebra. In atas *XIX Encontro Nacional de Professores de Matemática (ProfMat 2013)*, Lisboa: APM.

Stake, R.E. (2005). *Qualitative Case Studies. The Sage handbook of qualitative research (3rd ed.)*.Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Tamir P. (1991). Professional and personal knowledge of teachers and teachers educators. *Teacher and Teaching Education, 7* (3), 263-268.

Vrancken, S., Gregorini M.I., Engler, A., Müller, D. y Hecklein, M. (2006). *Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite.* Universidad Nacional del Litoral. Argentina.