

## ANÁLISIS DE PROCESOS COGNITIVOS EN GEOMETRÍA CON ESTUDIANTES DE PROFESORADO

Marco Antonio Rosales Riady

Universidad de Los Lagos. Universidade del Bío-Bío  
mrosales@ubiobio.cl

Chile

**Resumen.** Este reporte tiene como objetivo, presentar un análisis de la aplicación de dos reactivos que caracterizan procesos cognitivos de visualización propuestos por Duval (1998) y que intervienen en la resolución de problemas de geometría en estudiantes de primer año de Pedagogía en Educación Básica. Los resultados indican que la mayoría de los estudiantes logran articular parcialmente los distintos tipos de aprehensiones: perceptiva, discursiva y operativa. Al enfrentar las tareas encomendadas privilegian la aprehensión perceptiva, pero se les complejiza el proceso cuando les toca asociar la configuración figural con alguna propiedad o concepto

**Palabras clave:** formación de profesores, pensamiento geométrico.

**Abstract.** This report aims to present an analysis of the application of two reagents that characterize cognitive visualization process proposed by Duval (1998) and involved in the resolution of problems of geometry in freshmen of pedagogy in basic education. The results indicate that the majority of the students manage to partially articulate different types of apprehensions: perceptual, discursive and operational. Faced with tasks orders privilege the perceptual apprehension, but the process complicates them when you touch them to associate the figural configuration with some property or concept

**Key words:** training of teachers, geometric thinking

### Introducción

En el trabajo de Torregrosa y Quezada (2007) sobre la caracterización de los procesos cognitivos en geometría, se destaca la diferenciación entre ver y visualizar, ya que la primera acción es de carácter fisiológico, y la segunda de connotación cognitiva. Mencionan a investigadores como Arcavi, Zazkis, Hershkowitz, entre otros, quienes indican que visualizar es un proceso cognitivo complejo y que “está fuertemente relacionada con el razonamiento que se pueda tener al momento de interpretar una figura, de igual forma se relaciona con la representación que se pueda hacer de lo que se observa e interpreta.” (Castellanos, 2010). Para Duval (Castellanos, op. cit.) las representaciones es la única forma de tener acceso a los objetos matemáticos, y actúan como medio de comunicación entre el profesor, el estudiante y el saber. Además, se distingue un objeto de su representación solo cuando hay comprensión. Por otro lado, Duval (Castellanos, op. cit.), afirma que las representaciones mentales son el resultado de la interiorización de las representaciones externas, generándose así, los llamados procesos cognitivos, los cuales manipulan las representaciones. En este contexto, existe una estrecha relación entre visualización y razonamiento, de esta manera, al hacer buen uso del razonamiento los estudiantes podrán comunicarse y expresar más fácilmente lo que encuentren al enfrentar un problema planteado.

## Marco Teórico Conceptual

Duval establece la existencia de tres tipos de aprehensiones asociadas a la visualización. La *aprehensión perceptiva* se refiere a la identificación simple de una configuración, es un proceso básicamente intuitivo. La *aprehensión discursiva* es la actividad cognitiva que produce una asociación de la configuración con afirmaciones matemáticas, tales como definiciones, teoremas, axiomas, entre otras. Esta asociación es bidireccional, pudiendo ir de lo visual a lo discursivo, y viceversa. La *aprehensión operativa* consiste en la modificación de la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Ésta puede ser un cambio figural en la que se le añaden o quitan elementos a la configuración original, generándose nuevas subconfiguraciones. También, la aprehensión operativa puede ser de reconfiguración en la cual hay una manipulación como piezas de un puzle. En el análisis de las producciones de los estudiantes se toman en consideración estos tres tipos de aprehensiones y sus interacciones.

## Diseño Metodológico

### Respecto a los Objetivos

Se implementaron dos actividades geométricas, reactivos, que se les aplicaron a un grupo de estudiantes de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío, con el objeto de explorar las operaciones cognitivas de aprehensión vinculadas a la visualización en el modelo teórico de Duval, con particular atención a las construcciones geométricas en el plano. Particularmente, se esperaba que los estudiantes movilizaran conocimientos disciplinares en torno a, por una parte, propiedades de los triángulos y sus elementos primarios y secundarios, por otra, propiedades que vinculan al triángulo y la circunferencia. Así también, que manifestaran habilidades para: a) dibujar con instrumentos, tales como la regla y el compás; b) comunicar por escrito el procedimiento de construcción geométrica; c) visualizar conceptos y propiedades geométricas.

### Respecto a la Muestra

La muestra fue intencionada, ya que para esta actividad se consideró solo a los estudiantes que cursan la asignatura de “Geometría: Generalidades, Triángulos y Cuadriláteros”. Esta asignatura se imparte el segundo semestre del primer año de formación, siendo la primera del eje de geometría. El curso está compuesto de 44 estudiantes, de los cuales participaron 30 estudiantes quedando excluidos los ausentes.

### Respecto a las Condiciones de Aplicación

La aplicación de estas actividades se realizó el día y hora en que se imparte la asignatura, correspondiendo a un día martes de 09:40 a 11:00, con una duración de 70 minutos, más 10 minutos donde se organizó la actividad, en que se les informó el objetivo de la actividad, que no tendrían ayuda de parte del profesor, y que podían trabajar en parejas formadas espontáneamente. Por último, se les entregó la guía de trabajo con las correspondientes instrucciones, y con los aprendizajes esperados a alcanzar.

### Respecto al Diseño de los Reactivos

El diseño de los reactivos consideró que las actividades geométricas propuestas fueran abordables por parte de los estudiantes, acorde al estado de avance de la asignatura, y que se pudiera utilizar la regla y compás para la construcción de configuraciones figurales, sin usar tecnologías.

Se hizo un análisis preliminar de cada reactivo, tanto para la construcción, como para establecer el protocolo de construcción. A continuación, se presenta una síntesis del análisis preliminar.

El primer reactivo señala:

*Considere tres segmentos de recta. ¿Bajo qué condiciones se puede construir un triángulo con los segmentos dados? Al establecer tales condiciones, construya un triángulo dados sus tres lados utilizando sólo regla y compás. Establezca el protocolo de construcción.*

Para ser abordada esta actividad, los estudiantes deben hacer un análisis previo en cuanto a las magnitudes de los segmentos a considerar en la construcción, dejando de manifiesto una aprehensión discursiva. De todos los casos posibles, deben llegar a que para que exista un triángulo, la suma de las medidas de dos lados cualesquiera debe ser mayor a la medida del tercer lado.

Las configuraciones que les proporcionan dicha propiedad son las siguientes:

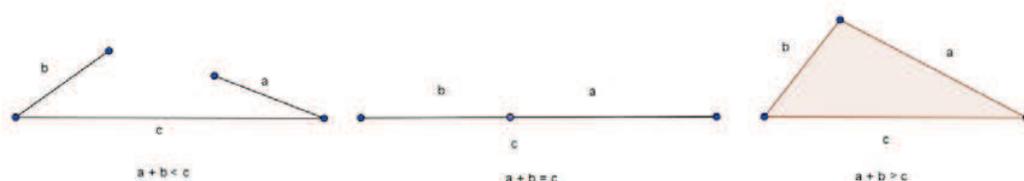


Figura 1

Claramente se deja en evidencia el cambio de anclaje, de lo figural a lo discursivo, en cada uno de los tres casos. Posteriormente a este análisis, los estudiantes se deben dar tres segmentos que satisfagan la condición, pudiendo ser todos congruentes, o bien, dos congruentes, o ninguno de ellos congruentes, dando origen a la clasificación de los triángulos según sus lados. Como requisito

básico para la construcción del triángulo requerido, deben saber trasladar un segmento, usando el compás y la regla. La configuración para un triángulo escaleno sería la siguiente:

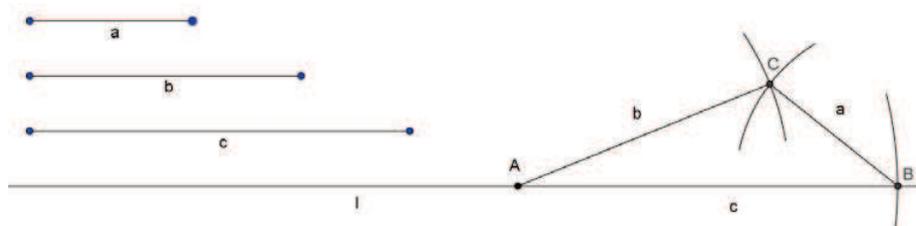


Figura 2

El protocolo de construcción sería:

1. Sobre una recta  $l$  se elige un punto  $A$ .
2. Con el compás, haciendo centro en  $A$  y abertura la longitud  $c$ , se determina el punto  $B$  en  $l$ .
3. Con el compás, haciendo centro en  $A$  y abertura la longitud  $b$ , se dibuja un arco arriba de segmento  $AB$ .
4. Con el compás, haciendo centro en  $B$  y abertura la longitud  $a$ , se dibuja un arco arriba de segmento  $AB$  que intersecte al anterior, determinando el punto  $C$ .
5. Con la regla se une el punto  $C$  con los puntos  $A$  y  $B$ , concluyendo la construcción.

Los estudiantes al comunicar por escrito este protocolo de construcción, dejan de manifiesto operaciones cognitivas de aprehensión. En particular, la aprehensión operativa, con anclaje de lo visual a lo discursivo, ya que redactan, en su mayoría, después de haber realizado la construcción. Más aún, depuran el mensaje de la secuencia, estableciendo los rótulos correspondientes, puntos y magnitudes, evidenciando luego un cambio de anclaje de lo discursivo a lo visual. También se presentan elementos auxiliares en la construcción como son los arcos que se utilizan para determinar los puntos que originan el triángulo requerido. El movimiento de la imagen mental de los tres segmentos, queda así representado por la configuración solicitada, el triángulo, desde el enunciado de esta actividad.

El segundo reactivo señala:

*“El punto de intersección de las tres bisectrices interiores de un triángulo es el centro de la circunferencia inscrita”. Represente la afirmación.*

La configuración asociada a esta actividad es:

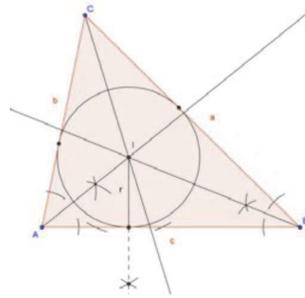


Figura 4

De la lectura de la consigna, los estudiantes, a través de la aprehensión discursiva deben asociar la configuración requerida con la definición de bisectriz de un ángulo. Luego aplican una aprehensión operativa, trazando la bisectriz de al menos dos de los ángulos interiores con el compás y la regla, y así determinar el punto de intersección de ellas. Así, nuevamente, se evidencia una asociación de la configuración en construcción con otra definición de incentro. En este caso, el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo. A continuación, aparece una tercera operación que deben realizar, determinar el radio de la circunferencia inscrita. Para ello, a través de una aprehensión operativa deben recurrir a la condición de perpendicularidad entre radio y cada uno de los lados del triángulo. Es decir, deben trazar la perpendicular a una recta, cada lado, desde un punto exterior, el incentro, para determinar el radio de la circunferencia inscrita. Por último, trazar la circunferencia inscrita en el triángulo.

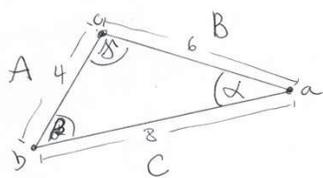
### Resultados de del Experimentación

Los resultados globales dejan en evidencia que no todos saben efectuar una construcción geométrica con regla y compás. Además, indican que la mayoría de los estudiantes logran articular parcialmente los distintos tipos de aprehensiones: perceptiva, discursiva y operativa.

#### Primer Reactivo

Del análisis de las respuestas de este reactivo se puede destacar que algunos estudiantes evidenciaron una aprehensión discursiva relativamente correcta, ya que no todos pudieron hacer una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas, en este caso, al observar el triángulo, cualquiera que sea, siempre se puede establecer que “la suma de las medidas de dos de sus lados es mayor que la medida del tercer lado”. Si bien, algunos estudiantes pudieron construir un triángulo, no siempre bajo la premisa de “dados los lados”, sino que partían diciendo, por ejemplo, “dibujaremos un triángulo rectángulo”. De la totalidad de los estudiantes, solo cuatro de ellos, se dieron primeramente los lados, para establecer las condiciones para asegurar la existencia de un triángulo. Por otro lado, los menos lograron establecer el protocolo de construcción.

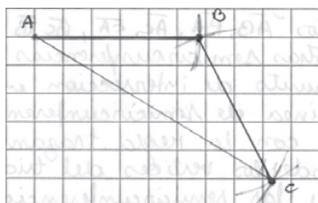
A modo de ejemplo, mostraremos un par de casos:



- ① La suma de 2 ~~sgtos~~ deberá ser siempre mayor al 3<sup>er</sup>o; en cualquiera de los casos
- $$\begin{aligned} A+B &> C \\ A+C &> B \\ B+C &> A \end{aligned}$$
- ② la suma de los  $\angle$  internos es  $180^\circ$
- $$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$
- ③ ~~la suma de los  $\angle$  externos es~~

Figura 5

- ❖ Una pareja estableció (figura 5) que “la suma de 2 sgtos deberá ser siempre mayor al 3<sup>er</sup>o; en cualquiera de los casos  $A+B>C$   $A+C>B$   $B+C>A$ ”, evidenciando una aprehensión discursiva, haciendo un cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo. De igual forma, asocia la configuración con el teorema que indica que “la suma de los  $\angle$  internos es  $180^\circ$ ,  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ”, pero no se relaciona con lo pedido en la consigna. Se arrepintieron tachando “la suma de los  $\angle$  externos es”. Ninguna de las restantes parejas de estudiante hizo un análisis que permitiera establecer las condiciones. Cabe hacer notar que la forma de rotular está invertida, los puntos con letras minúsculas y las magnitudes de los segmentos con letras mayúsculas, y también con números (4, 6 y 8), lo que nos permite inferir que es una forma de comprobar lo que comunica por escrito.



Utilizando segmentos consecutivos (que tienen un extremo en común)

1. Dibujamos un punto A, luego tomamos el compás le damos una abertura cualquiera para así dibujar el punto "B" y con la misma abertura del compás lo colocamos en el punto "B" para ubicar el punto "C".

Posteriormente utilizamos la regla para trazar una línea que una los puntos, para formar los segmentos.

Figura 6

- ❖ La figura 6, muestra la producción de una pareja de estudiantes que da cuenta de un “protocolo de construcción”, pero no se dan los segmentos. Lo redactado por ellos no dan cuenta del procedimiento. Las aprehensiones operativas utilizadas en la asociación de propiedades o teoremas de construcciones básicas no son las adecuadas. No fue posible establecer entre la producción la configuración y la descripción una correspondencia que permita justificar el procedimiento de construcción, por lo que se puede inferir dificultades de comunicación.

- ❖ Los conocimientos movilizados en esta situación, fueron muy elementales, ya que no se dieron los tres lados, para luego trasladarlos y construir la representación requerida. Dibujaron directamente el triángulo. Ninguno de las parejas estableció el protocolo de construcción esperado.

### Segundo Reactivo

Respecto a la construcción que solicita esta consigna, nuevamente algunos estudiantes muestran una construcción errónea, al confundir la definición de “bisectriz” con la de “transversal de gravedad”, por lo que queda en evidencia la falta de desarrollo de la aprehensión discursiva, el cambio de lo discursivo a lo figural, no se aprecia en algunos estudiantes, como en la figura 7.

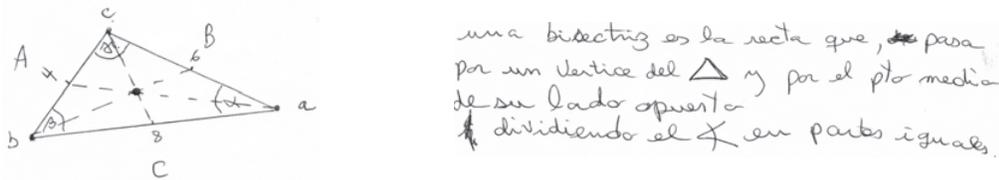


Figura 7

Además, la aprehensión perceptiva, es decir, la identificación simple de la configuración, el dibujo del triángulo con sus segmentos notables mal trazados, no permiten establecer la circunferencia inscrita como se muestra en la figura 8.

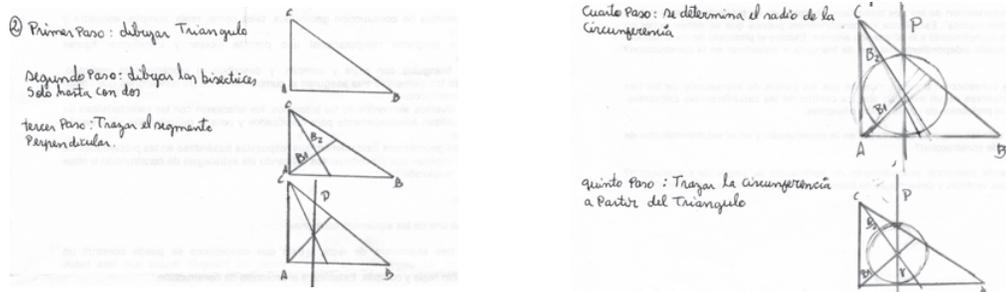


Figura 8

La asociación con la propiedad de las bisectrices interiores y la circunferencia inscrita no se ve reflejada en la configuración de la figura 9, a pesar de la explicación de esta pareja de estudiantes.

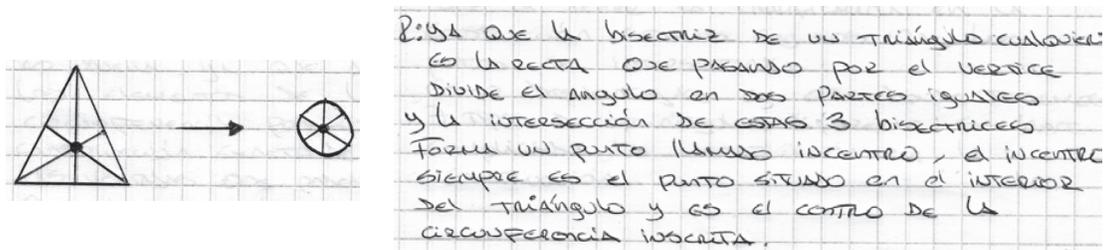


Figura 9

En conclusión, de la aplicación de ambos reactivos, los estudiantes presentan dificultades en la percepción visual de las figuras, lo que no les permite establecer propiedades de los objetos geométricos estudiados. No quedan en evidencia la articulación entre lo que se distingue visualmente de la configuración geométrica y las propiedades que cumplen dichos objetos. Además, presentan dificultades para argumentar los procedimientos utilizados en cada construcción abordada.

### Referencias bibliográficas

- Castellanos, I. (2010). *Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software geogebra con alumnos de II de magisterio*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Tegucigalpa. Honduras.
- Duval, R. (2001). *La geometría desde un punto de vista cognitivo*. PMME-UNISON. Consultado el 01 de marzo de 2013 en <http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm>.
- Guzmán Retamal, I. (2009). Actividades geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 19, 22-33.
- Torregrosa, G., Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 275-300.