CONSTRUÇÃO DOS SÓLIDOS PLATÔNICOS NA SUPERFÍCIE ESFÉRICA: UMA INTRODUÇÃO AOS CONCEITOS DE GEOMETRIA ESFÉRICA ATRAVÉS DO *SOFTWARE SPHERICAL EASEL*

Viviane Beatriz Hummes y Adriana Breda
UFRGS, PUC/RS. Brasil
vivihummes@gmail.com, adriana.breda@gmail.com

Resumen. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de atividade, no terceiro ano do Ensino Médio, a fim de introduzir o estudo da Geometria Esférica por meio da construção dos sólidos platônicos na superfície esférica, através do *software* de geometria dinâmica *Spherical Easel*. Por meio desta, esperamos a interação dos alunos, de modo que conceitos da Geometria Euclidiana possam ser resgatados e comparados com os da Geometria Esférica.
Palabras clave: Geometria Esférica, Sólidos Platônicos; Spherical Easel
Abstract. This work aims to present an activity proposal to be applied in the third grade of high school, in order to introduce the study of Spherical Geometry, through the construction of platonic solids on spherical surface, using the dynamic geometry Spherical Easel software. Through this activity, we expect students to interact, so that concepts of Euclidean Geometry may be recovered and compared with the Spherical Geometry.
Key words: Spherical Geometry, Platonic Solids; Spherical Easel

Introducción

Este trabalho pretende apresentar uma sequência de atividades que tem como objetivo introduzir a aprendizagem de conceitos básicos de Geometria Esférica, estabelecendo conexões com conceitos da Geometria Euclidiana. A partir da tesselação das faces dos sólidos platônicos na superfície esférica, por meio do *software* de Geometria Dinâmica, denominado *Spherical Easel*, pretende-se fomentar, no terceiro ano do Ensino Médio, a construção de um pensamento geométrico capaz de apontar diferenças e semelhanças entre alguns conceitos da Geometria Esférica com alguns da Geometria Euclidiana.

Na escola básica, ensinamos e aprendemos que a Geometria Euclidiana soluciona satisfatoriamente problemas em superfícies planas. Contudo, o universo ao nosso redor não é perfeitamente plano e, assim, percebemos que há um vasto número de problemas que, para serem resolvidos, demandam a utilização de ferramentas que a geometria de Euclides não disponibiliza. Existem muitas situações em que as superfícies curvas requerem atenção. Talvez uma das mais eminentes seja a prática da navegação, onde obviamente a curvatura da Terra não pode ser desprezada. Em muitas ilustrações, temos a impressão de que um navio percorre linhas retas quando imaginamos um percurso entre dois pontos no mar. No entanto, levando em conta a realidade, verificamos (devido ao fato do navio acompanhar a curvatura da Terra) que o trajeto descrito é um arco, o que, contradizendo a Geometria Euclidiana, evidencia que a menor distância entre dois pontos nem sempre é uma linha reta.

Conteúdos relacionados às Geometrias Não-Euclidianas encontram-se praticamente ausente dos livros didáticos e, tradicionalmente, não têm sido abordados nas aulas, tanto nas aulas da educação básica como nas de nível superior. Este assunto é, certamente, pouco conhecido entre professores do Ensino Médio. Acreditamos que isso se deve, entre outras coisas, à complexidade matemática que o tema exige, fazendo do mesmo, uma área bastante técnica, até mesmo no meio acadêmico. Além disso, existem poucos trabalhos acadêmicos que investigam o ensino de Geometrias Não-Euclidianas no Ensino Médio e, nesse sentido, faltam subsídios para auxiliar os professores da Educação Básica.

Mesmo diante desse cenário, esperamos, com esta proposta de trabalho em sala de aula, fornecer um possível caminho aos professores de matemática para que as Geometrias Não-Euclidianas, vinculadas ao apoio da tecnologia, possam ser abordadas no Ensino Médio, de forma que, a partir da prática profissional, este assunto passe a integrar o currículo de matemática escolar.

Fundamentação teórica

Algumas pesquisas vêm sendo desenvolvidas abordando o estudo de Geometrias Não-Euclidianas. Um exemplo é a dissertação de mestrado de (Souza, 1998) que, numa pesquisa de cunho qualitativo, analisou o 5º postulado de Euclides sob três aspectos: o matemático, o histórico e o qualitativo. Seu estudo teve como foco o conhecimento dos professores sobre a problemática gerada por este postulado, a influência dos livros-didáticos no ensino da Geometria, e a importância das Geometrias Não-Euclidianas para a atualidade. Apoiada na história da matemática, a investigação foi realizada com 35 alunos de graduação e 30 professores de matemática. Este estudo evidenciou que a autora procurou destacar a importância dos professores abordarem o ensino das noções de Geometria desde as séries iniciais até as séries mais avançadas do ensino básico. Neste sentido, (Souza,1998) cita inúmeros exemplos para o ensino e a utilização das Geometrias Não-Euclidianas nas escolas, tanto para o nível médio, quanto para o nível superior.

Outro exemplo é pesquisa de (Bonete, 1999), que em sua dissertação de mestrado apresenta uma pesquisa que teve por objetivo refletir e discutir o ensino das Geometrias Não - Euclidianas nos cursos de Licenciatura em Matemática. Sua investigação envolveu a realização de três experiências com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, para os quais desenvolveu uma proposta didática para o estudo dessas geometrias, visando capacitar futuros professores para seu ensino na escola. A autora considera que o estudo das Geometrias não Euclidianas deve partir da exploração dos conceitos da Geometria de Euclides, tendo em vista que o desenvolvimento dessas geometrias ocorreu mediante as especulações em torno do Quinto Postulado euclidiano. A autora elaborou a pesquisa a partir de uma pesquisa de cunho documental sobre o desenvolvimento da Geometria Euclidiana e das Geometrias não Euclidianas, visando identificar suas diferenças e semelhanças.

Justificamos nossa forma de trabalho, em sala de aula, apoiando-nos nas ideias de (Gravina, 1998), que aponta que a aprendizagem é um processo construtivo, que depende fundamentalmente das ações do sujeito e de suas reflexões sobre estas ações, onde todo conhecimento está voltado à ação. Isto ocorre desde o mais básico nível sensório motor ao mais sofisticado patamar de operações lógico-matemáticas, (Piaget, 1967).

As teorizações piagetianas apontam que a partir dos doze anos de idade, inicia-se um novo estágio na vida do aprendiz: a fase das operações formais. Cognitivamente, é o início da fase adulta. Nesse momento, o adolescente apresenta certo domínio do pensamento dedutivo e lógico, sendo capaz de relacionar conceitos com determinado grau de abstração e raciocinar sobre possíveis hipóteses e comparações mais complexas.

Pensando nesse processo, compreendemos que é possível propor uma atividade sobre geometria Não-Euclidiana no final da escola básica, mais especificamente, no final do Ensino Médio. Pois, mesmo que o conteúdo envolva certo domínio de abstração cognitiva, entendemos que, desde que se tenham trabalhados os estágios pré-operacionais e os estágios das operações concretas, previstos em Piaget, é possível avançar no estágio formal, de forma que o aluno possa comparar conceitos, criar hipóteses sobre os mesmos e chegar às suas próprias conclusões sobre o conteúdo proposto.

Contudo, mesmo que o estágio das operações formais trate de uma abstração mental, onde o aluno apresenta capacidade de operar lógico-dedutivamente, compreendemos que a utilização de uma ferramenta de apoio, que promova a construção e a visualização é deveras importante para a efetivação do trabalho.

A ideia de utilizar a tecnologia associada ao estudo de Geometria Esférica na educação básica está diretamente associada com concepção de (Borba, 2010) sobre o papel que *softwares* podem assumir em sala de aula. Para este autor, a interação entre alunos, professor e mídia vai além da amostragem visual, pois o *software* configura-se como parte integrante do processo de fazer matemática. O uso desse instrumento nas aulas propicia uma postura investigativa que possibilita um envolvimento maior dos estudantes com o conteúdo e encaminha-os a evoluírem suas ideias a ponto de criarem conjecturas, torná-las válidas e criar subsídios para a elaboração de uma demonstração matemática.

A partir dessa esteira, apresentamos uma proposta de como trabalhar Geometria Esférica no final da educação básica, demonstrando, a partir da construção de sólidos esféricos feitos pelos alunos, alguns conceitos e conjecturas que possam ser elaborados a fim sejam comparados com os da Geometria Euclidiana.

Metodologia de trabalho em sala de aula

Neste trabalho, apresentamos uma sugestão de como abordar o estudo das Geometrias Não-Euclidianas, especificamente a Geometria Esférica, no terceiro ano do Ensino Médio, estabelecendo conexões com conceitos da Geometria Euclidiana. Para tanto, propomos a construção dos cinco sólidos de Platão na superfície esférica, através do *software* de Geometria Dinâmica *Spherical Easel*, como atividade introdutória ao estudo de conceitos da Geometria Esférica.

São cinco os Sólidos Platônicos Esféricos, resultantes da tesselação das faces dos Sólidos Regulares de Platão na superfície esférica. A base de todas as construções das faces dos sólidos platônicos na esfera é o octaedro. Além de ele ser a geratriz de todos os outros sólidos, as suas faces são mais fáceis de representar na superfície esférica. Desta forma, sugerimos que o primeiro sólido de Platão a ser construído seja o Octaedro Esférico.

Desenhando-se três círculos máximos, onde cada um é perpendicular aos outros dois, forma-se o Octaedro Esférico. Ao produzi-lo, formam-se oito triângulos esféricos como mostra a Figura 1.

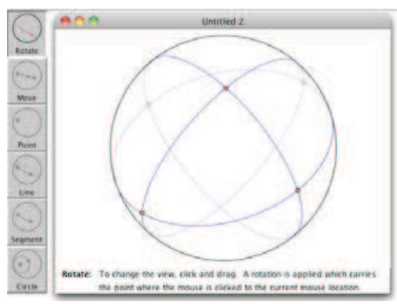

Figura 1. Octaedro Esférico construído no *software Spherical Easel.*

Após os alunos realizarem a construção do Octaedro Esférico existe a possibilidade de que os estudantes questionem o fato dos triângulos serem arredondados e, desta forma, acreditamos que, a partir daí, se possa introduzir a noção de triângulo esférico. Através de uma diálogo coletivo, a idéia é que se promova uma discussão de que a imagem gerada pelo computador leva à suposição de que a soma dos ângulos internos do triângulo esférico é maior que 180º e por conseqüência, possa-se criar a percepção de que temos outro tipo de triângulo, diferente do triângulo euclidiano.

Dando sequência à atividade, indicamos os passos para a construção dos demais sólidos de Platão, no *software Spherical Easel*: Hexaedro Esférico, Tetraedro Esférico, Dodecaedro Esférico e Icosaedro Esférico.

Para a construção do Hexaedro Esférico as etapas são: construir o baricentro (ponto de intersecção das medianas do triângulo esférico) de cada um dos triângulos do octaedro esférico;

unir cada baricentro com os baricentros adjacentes e eliminar as arestas do octaedro esférico. Com isso, formam-se seis quadrados esféricos como mostra a Figura 2.

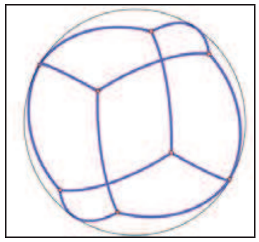

Figura 2. Hexaedro Esférico no *software Spherical Easel*.

Acreditamos que essa construção possibilita que os alunos revisem conceitos da Geometria Plana e, ao mesmo tempo, comparem estes conceitos com os da Geometria Esférica. Um exemplo é o quadrado esférico, que é diferente do quadrado plano, pois apresenta os quatro lados e quatro ângulos congruentes, contudo estes ângulos não são retos.

A seguir, sugerimos que seja realizada a construção do Tetraedro Esférico. Seguindo os passos: selecionar uma face do cubo esférico e traçar uma diagonal nesta face; traçar diagonais em todas as faces restantes, de modo que, no vértice da face que termina uma diagonal, tenha início a diagonal da outra face; eliminar as arestas do cubo esférico, terminado, desta maneira, o tetraedro esférico.

Assim, forma-se quatro triângulos esféricos como mostra a Figura 3.

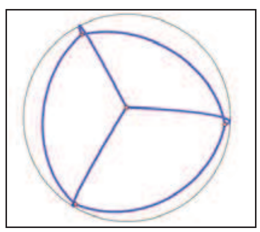

Figura 3. Tetraedro Esférico no *software Spherical Easel*.

A partir da construção, salientamos ser interessante uma discussão sobre a possível nomenclatura da figura, denominada Tetraedro Esférico. Com esta construção, os alunos podem revisar o conceito de diagonal da Geometria Plana e refletir qual o significado deste na Geometria Esférica.

Continuamos com a construção do Dodecaedro Esférico: fazer uma circunferência cujo raio tenha a medida da aresta da face do hexaedro esférica, construída anteriormente; cobrir a superfície esférica com triângulos equiláteros, cujos lados tenham a medida desta aresta, Figura 4.

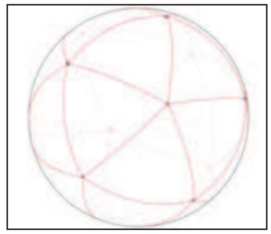

Figura 4. Etapa da construção do Dodecaedro Esférico.

Concluindo a tesselação do Dodecaedro esférico seguindo os seguintes passos: construir o baricentro de cada um desses triângulos; unir os vértices desses triângulos ao baricentro; tendo em vista que a distância do vértice do triângulo ao baricentro é a aresta do pentágono e que a soma dos ângulos da união resultante do item 3 é 360º (cada ângulo mede 120º), terminar a construção do dodecaedro esférico.

Desta maneira, formam-se doze pentágonos esféricos como mostra a Figura 5.

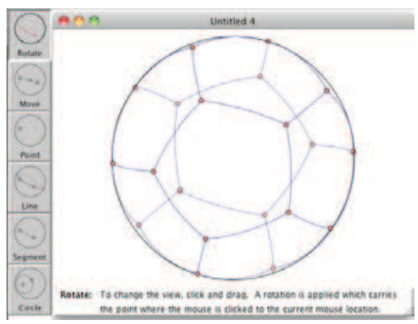

Figura 5. Dodecaedro Esférico no *software Spherical Easel*.

Por fim, terminamos a atividade com os passos para a construção do Icosaedro Esférico: selecionar uma face do dodecaedro esférico e construir a mediatriz de cada uma de suas arestas (fazer o mesmo com todas as outras faces); unir o circuncentro de cada uma dessas faces, por intermédio dessas mediatrizes; eliminar as arestas do dodecaedro e o icosaedro esférico está pronto.Desta maneira, formam-se vinte triângulos esféricos como mostra a Figura 6

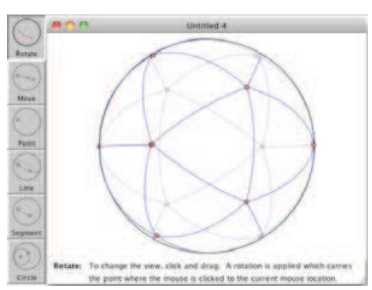

Figura 6. Icosaedro Esférico no *software Spherical Easel*.

Com este trabalho propomos uma sequência de atividades, que consiste na tesselação das faces dos sólidos platônicos na superfície esférica, com a intenção de contribuir para o ensino-aprendizagem de conceitos básicos da Geometria Esférica, revisitando e consolidando conceitos da Geometria Euclidiana.

Nesse sentido, acreditamos que o computador potencializa a aprendizagem dos alunos devido às condições de interatividade que ele permite e pela possibilidade de manipulação rápida das figuras, permitindo visualizar as figuras geométricas de vários ângulos e efetuar diversas construções em tempo real.

Aspectos Finais

Acreditamos que a construção dos sólidos platônicos na superfície esférica possibilita que os alunos revisem conceitos da Geometria Plana e, ao mesmo tempo, comparem estes conceitos com os da Geometria Esférica, ressignificando-os.

Com a construção do Octaedro Esférico, por exemplo, é possível que os alunos questionem o fato dos triângulos serem arredondados, a partir da observação da imagem gerada no programa *Spherical Easel*. Em contrapartida, ao realizarem a construção do Tetraedro Esférico, os alunos podem revisar o conceito de diagonal da Geometria Plana e criar conjecturas para tal conceito na Geometria Esférica.

Refletindo sobre as ideias de (Borba, 2010), entendemos que o uso do *software Spherical Easel* possa abrir possibilidades para que os alunos façam conjecturas, pois a construção e tesselação da esfera no computador é bastante acessível. Dessa forma, esperamos que o computador altere o processo de conhecimento, modificando e reorganizando a maneira de pensar dos alunos.

Salientamos que este trabalho é apenas uma proposta para trabalhar Geometria Esférica na educação básica e a entendemos como um instrumento maleável, de forma que cada professor, em seu contexto social, econômico, cultural, possa fazer adaptações à sua realidade, enfocando nos aspectos que possam auxiliar a aprendizagem de seus alunos.

Referências bibliográficas

Bonete, I. P. (1999). *As Geometrias Não-Euclidianas: uma perspectiva para seu ensino*. Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade Estadual de Campinas e Universidade Estadual do Centro Oeste, Guarapuava, PR, Brasil.

Borba, M. C. (2010, julho). Softwares e Internet na Sala de Aula de Matemática. In: Educação Matemática, Cultura e Diversidade. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*, Salvador, BA, Brasil.

Gravina. M. A.; Santarosa, L. M. (1998). A Aprendizagem da Matemática em Ambientes

Informatizados. *Anais do IV Congresso RIBIE,* Brasília, GO, Brasil.

Piaget, J. (1967). *Biologie et Connaissance*. Paris: Gallimard.

Souza, M. C. G. (1998). *O 5º Postulado de Euclides: A Fagulha que Desencadeou uma Revolução no Pensamento Geométrico*. Dissertação de Mestrado em Ciências, Universidade do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.