

# PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN LIBROS DE TEXTO DE 3º ESO

## Problems of Linear Equations Systems in textbooks for grade 9

A. Cristina Guerrero, José Carrillo, Luis C. Contreras

Universidad de Huelva

### Resumen

*La resolución de problemas en matemáticas ha sido uno de los principales focos de investigación y discusión en los últimos 30 años. Las propuestas curriculares para la educación primaria y secundaria la recogen como eje transversal.*

*El libro de texto es agente fundamental en el proceso de enseñanza aprendizaje, y en el trabajo en el aula. En este estudio se analiza cómo se plasma la resolución de problemas en un libro de texto, centrando la atención en el tema de Sistemas de Ecuaciones lineales del tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Se concluye que existen importantes características que son poco coherentes con lo especificado en el currículo oficial.*

**Palabras clave:** *matemáticas, resolución de problemas, educación secundaria obligatoria, libros de texto, sistemas de ecuaciones lineales.*

### Abstract

*Problem solving has been one of the main focuses of research and discussion in the last 30 years. The proposed curriculum for both primary and secondary education considers problem solving as a central focus in Mathematics.*

*The textbook plays an essential role in the learning-teaching process as well as being a vital tool in the classroom. In this study, we analyze how problem solving is treated in one textbook, focusing our attention on the unit of Systems of Linear Equations at grade 9. It is concluded that there are important features that are inconsistent with those that appear in the official curriculum.*

**Keywords:** *mathematics, problem solving, compulsory secondary school, textbooks, lineal equations systems.*

La resolución de problemas, especialmente su papel en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, es un importante tema de estudio por parte de investigadores y educadores (Sigarreta, Rodríguez y Ruesga, 2006). Este interés aparece reflejado en currículos y programas educativos de distintos países (Contreras y Carrillo, 2000; Herdeiro, 2010), asumiendo dos funciones distintas en las matemáticas escolares: competencia a adquirir y proceso para la adquisición de habilidades y conocimientos en matemáticas (Herdeiro, 2010). El propio informe PISA (OCDE, 2006) subraya la importancia de la resolución de problemas al definir el concepto general de competencia matemática como la “*capacidad de los alumnos para analizar, razonar y comunicar ideas de manera eficaz al plantear, formular, resolver e interpretar las soluciones a un problema matemático en una variedad de situaciones*” (OCDE, 2006, pp. 14).

Para que estas reflexiones y recomendaciones se vean proyectadas en las aulas, el profesorado debe disponer de materiales escolares adecuados, entre los que destacan los libros de texto, por su uso por encima de otros materiales didácticos (Villela y Contreras, 2006).

Nuestro estudio surge de la preocupación por la coherencia entre la propuesta de enseñanza-aprendizaje del libro de texto y las sugerencias que emanan del currículo o de la literatura de investigación. Presentamos el análisis de una de las unidades de un libro de texto de matemáticas. Esta comunicación forma parte de una investigación más amplia en la que se analiza la misma unidad en dos libros de texto y se abordan más dimensiones de análisis.

## ELEMENTOS TEÓRICOS

La definición de problema matemático y su (en ocasiones infructuosa) delimitación respecto a la noción de indagación o investigación generan aún cierta controversia (como ha podido constatarse en el *Workshop on Problem Solving* celebrado en Santiago de Chile en diciembre de 2013), pero podría aceptarse, en general, que un problema matemático es aquella situación real o ficticia que involucra cierto grado de incertidumbre y cuya clarificación conlleva la aplicación no mecánica del conocimiento matemático de la persona que se enfrenta a dicha situación (Carrillo, 1998).

Lejos de querer profundizar en las distintas consideraciones de la resolución de problemas, este trabajo se limita a realzar la importancia de la misma, coincidiendo con Carrillo (1998) en que es un marco ideal para fomentar la construcción del aprendizaje significativo y promover el gusto por la matemática, así como el desarrollo de una actitud abierta y crítica, todos ellos objetivos de gran valor educativo.

Considerando el papel que los libros de texto tienen en el aula, en los últimos años estos manuales se han convertido en una importante fuente de investigación (Serrano, 2012). Así, destacamos las investigaciones que afirman que, en ocasiones, los libros de texto condicionan el tipo de enseñanza que se realiza cuando el profesorado los usa de forma cerrada, llegando a determinar el currículo más que la ley en sí (Monterrubio y Ortega, 2012; Ruesga, Valls y Rodríguez, 2006; Schubring, 1987). Otros autores (Parcerisa, 1996; Santos, 1991; Herdeiro, 2010; Pino y Blanco, 2008) coinciden en la necesidad de que el libro de texto debe ser un recurso abierto en el que no es necesario que todo aparezca especificado.

Para nuestro estudio hemos decidido centrarnos en el bloque de Álgebra, ya que el conocimiento Algebraico es esencial para los alumnos por su aporte a la comunicación y expresión de las matemáticas, a la construcción de modelos y a la estructuración de formas de razonamiento (Pérez, 1997). Elegimos el tema de *Sistemas de ecuaciones lineales* (en 3º ESO) por la conveniencia de indagar en el aprendizaje de los conceptos iniciales de temas en los que los estudiantes presentan dificultades (Sierpinska, 2000).

Por otra parte, así como existen numerosas definiciones de problema matemático, no menos amplia es la clasificación en tipos de problemas. En este trabajo se tomará como base la clasificación propuesta por Herdeiro (2010) (ejercicios, problemas de palabras, problemas para demostrar, problemas para descubrir, problemas de la vida real y otros problemas), quien a su vez se apoya en las clasificaciones de Pólya (1985) y Borasi (1986), entre otras<sup>1</sup>. Las categorías que consideramos para el análisis son: tipos de problemas, contexto, formulación, tarea matemática y solución (estas categorías se desarrollan en el siguiente epígrafe). Con esto se pretende obtener una clasificación de los problemas de esta unidad atendiendo a dichas categorías y analizar su conveniencia respecto a las indicaciones del currículo oficial.

## DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

### Objetivos

Nuestro interés por la adecuación del tratamiento de la resolución de problemas en los libros de texto nos lleva a plantearnos qué lugar ocupa la resolución de problemas en los libros de texto en el tema de *Sistemas de ecuaciones lineales (SEL)* de 3º ESO, pregunta que transformamos en un gran objetivo, *Obtener información sobre la coherencia entre el currículo prescrito y su implementación*

a través de los libros de texto en relación con los problemas de SEL y en los siguientes objetivos específicos:

- Caracterizar los problemas atendiendo al contexto y la formulación.
- Caracterizar los problemas atendiendo a la solución y el método de resolución.

### **Elección del libro**

Los objetos de estudio de la investigación cualitativa no se escogen al azar, se eligen de acuerdo al grado en que se ajustan a los criterios o atributos establecidos por el investigador (Rodríguez, 1999, citado en Serrano, 2012). La elección se ha basado en la editorial más vendida en España en materia de educación, que según la Panorámica de la Edición Española de Libros 2012 (MEC, 2013), es Anaya (Colera, Gaztelu y Oliveira, 2011).

### **Caracterización del método**

La información que buscamos se encuentra en el libro de texto analizado, que recogeremos de manera organizada, para tratarla adecuadamente al propósito de nuestro estudio y, finalmente, interpretarla para asignarle un significado. Según Piñuel (2002), el proceso de interpretar un producto comunicativo (entendido como mensajes, textos o discursos) mediante técnicas cuantitativas y/o cualitativas con el objetivo de analizar las ideas que aparecen en él y procesar los datos relevantes, se denomina análisis de contenido. Por ello, podemos afirmar que este trabajo emplea la técnica del análisis (cualitativo) de contenido.

Se han analizado todos los problemas propuestos en la unidad del libro de texto siguiendo las categorías descritas en el instrumento de análisis. Con el fin de organizar y registrar los datos recogidos se han elaborado tablas Excel, que han servido para resumir la información obtenida. Dado que el proceso de análisis de datos es un proceso cíclico (Pérez 1994, en Serrano 2012), durante la investigación, a veces, es necesario volver atrás, analizar los datos de nuevo, añadir cuestiones o modificar el instrumento de análisis. En este trabajo se han realizado cíclicamente la recogida de datos y su interpretación y más tarde la redacción del análisis descriptivo. Asimismo, el instrumento de análisis se ha sometido al juicio de expertos, y el propio análisis ha disfrutado de la triangulación de investigadores. No obstante, como se desprende del objetivo planteado, no se pretende garantizar en este tipo de estudio la generalización de sus resultados.

### **Instrumento de análisis**

Exponemos a continuación las categorías con sus correspondientes subcategorías, indicando entre paréntesis el código que le hemos asignado para su identificación en el análisis posterior<sup>2</sup>.

#### **A) Tipos de problemas**

En esta categoría, sobre la base de los trabajos de Borasi (1986), Abrantes (1989) y Boavida (1993), diferenciaremos entre ejercicios, problemas de palabras, problemas para demostrar, problemas para descubrir, problemas de la vida real y problemas de la práctica matemática. Hemos eliminado los *problemas para ecuacionar* de Abrantes (1989), ya que consideramos que son un caso particular de los *problemas de palabras*, en los que la traducción al lenguaje matemático se hace a través de una ecuación. De la misma manera, las *pruebas de una conjetura* de Borasi (1986) quedan incluidas en problemas de la práctica matemática y las *situaciones problemáticas* y *situaciones* de ambos autores encajan en los problemas de aplicación.

A1. Ejercicios (A1): en los que basta reconocer o recordar un concepto específico o una definición, o aplicar un proceso algorítmico conocido para determinar la solución. Son rutinarios y no requieren de la originalidad del resolutor.

A2. Problemas de palabras (A2): problemas enunciados en un contexto concreto que necesitan traducirse al lenguaje matemático para su resolución. Toda la información necesaria para resolverlos aparece en el enunciado y además, suele indicarse la estrategia a seguir.

A3. Problemas para demostrar (A3): orientados a justificar la validez de cierta proposición. Para la resolución de estos problemas se suele recurrir a teoremas o propiedades relacionadas con la demostración solicitada. En ellos se precisa del razonamiento deductivo.

A4. Problemas para descubrir (A4): suelen aparecer al final de cada unidad o con el nombre de enigma o desafío. Su formulación pretende mostrar una forma atrayente, divertida o entretenida de aprender matemáticas. Para encontrar su solución se requiere lógica e ingenio.

A5. Problemas de la vida real (A5): son situaciones factibles de darse en la vida real y que precisan de la construcción de diagramas, realización de estimaciones, cálculo de medidas o elaboración de análisis y síntesis. Permiten conocer las aplicaciones de las matemáticas en el mundo real. No suelen tener una solución exacta ni única.

A6. Problemas de la práctica matemática (A6): problemas que permiten desarrollar procesos de exploración, formulación de hipótesis y su posterior validación. En ellos se realizan conjeturas, verificaciones y argumentaciones<sup>3</sup>.

## B) Contexto

Tomando como base principal a Herdeiro (2010) y apoyados por algunas ideas de Serrano (2012) y Monterrubio y Ortega (2012), esta categoría incluye la contextualización en la realidad, contexto de datos proporcionados o contexto de conexión.

B1. Contextualización en la realidad: contexto de la vida real o puramente matemático (CPM). En el primer caso distinguiremos entre contexto de la vida real-personal (problemas relacionados con actividades cotidianas- CVRP), laboral o educativo (situaciones que pueden darse en el centro escolar o algún entorno de trabajo- CVRLE), social (contexto relacionado con el entorno social y/o político en que se vive- CVRS) y científico (problemas enmarcados en las ciencias naturales- CVRC).

B2. Datos proporcionados: contexto de datos realistas (plausibles- CDR) o datos no realistas (CDNR).

B3. Conexión: contexto con conexión con otras ramas de las matemáticas (CCRM), con otras áreas disciplinares (CCAD), con la historia de las matemáticas (CCHM) o sin conexión (CSC).

## C) Formulación

De nuevo, sobre la base del trabajo de Herdeiro (2010), esta categoría engloba la ilustración, el número de cuestiones que presenta el problema desde el punto de vista sintáctico o semántico, las representaciones y los recursos empleados.

C1. Ilustración: ilustración decorativa (sin ninguna finalidad relacionada claramente con el problema- FID), motivadora (posible ayuda para el alumno pero que no aporta datos numéricos ni claramente significativos- FIM), representativa (aparecen datos numéricos que se dan en el enunciado- FIR), informativa (aparecen datos numéricos que no se aportan en el enunciado- FII) o sin ilustración (FSI).

C2. Número de cuestiones que presenta el problema desde el punto de vista sintáctico: formulación simple (una sola cuestión- FS), formulación agrupada (más de una cuestión en la misma actividad- FA).

C3. Número de cuestiones que presenta el problema desde el punto de vista semántico: formulación sencilla (una sola estrategia cognitiva- FSen), formulación compleja (más de una estrategia cognitiva- FC).

C4. Información proporcionada: suficiente (FIS), insuficiente (FIIn), excesiva (FIE).

C5. Representaciones empleadas: formulación exclusivamente verbal (FEV), verbal utilizando una ilustración (FVI), utilizando una tabla (FT), una expresión algebraica (FEA), una gráfica (FG) o un diagrama (FD).

C6. Recursos empleados: materiales manipulativos (FMM), nuevas tecnologías (FNT), ningún recurso extra (FNR).

#### D) Tarea matemática

Esta categoría y la relativa de los tipos de problemas pueden verse como perspectivas complementarias; en una focalizamos la finalidad para la que se elabora el problema (tipos de problemas) y en la otra los requerimientos que le exigen al estudiante para su resolución (tarea matemática). Se puede ver que en la propia definición de los tipos de problemas aparece de manera implícita la tarea matemática. No obstante, se ha decidido hacer explícita la tarea matemática en sí misma, para observar sus aspectos de una manera más clara. Es por esta razón, por la que puede apreciarse un solapamiento entre estas dos categorías. Diferenciamos entre identificación y aplicación, razonamiento elemental o complejo e investigación.

D1. Identificación y aplicación (D1): se trata de problemas familiares, que demandan básicamente la identificación y el empleo de conceptos sencillos y la aplicación de procedimientos rutinarios tales como los algoritmos.

D2. Razonamiento elemental (D2): son problemas con un nivel mayor de exigencia que el anterior, trascendiendo la mera repetición de algoritmos. Su resolución conlleva la necesidad de razonamiento matemático y el establecimiento de relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien la conexión entre distintos aspectos.

D3. Razonamiento complejo (D3): se trata de problemas en los que predomina el razonamiento matemático. Pueden considerarse un paso previo a los problemas de investigación, pues aunque requieren establecer relaciones más complejas que las anteriores, suelen tener una respuesta única y exacta y no requieren de generalización, o descubrimiento de regularidades o conjeturas ni justificación de los resultados.

D4. Investigación (D4): se trata de problemas cuya resolución requiere cierta comprensión y reflexión por parte del estudiante, creatividad tanto para identificar conceptos como para enlazar conocimientos y procesos matemáticos. Este tipo de problemas exigen investigación, descubrimiento, generalización, manipulación para descubrir regularidades o verificar conjeturas y explicación o justificación de los resultados. Puede tratarse de problemas abiertos o sin respuesta única.

#### E) Solución

Se ha formulado esta categoría sobre la base de lo planteado por Herdeiro (2010), distinguiendo entre repuesta cerrada o abierta, representaciones pedidas, unicidad y exactitud y toma de decisión en cuanto las soluciones.

E1. Respuesta cerrada (corta (RRC), de desarrollo (RCDes), de completitud (RCCom), de tipo verdadero/falso (RCVF), de asociación o correspondencia (RCAC) o de elección múltiple (RCem), o respuesta abierta (corta (RAC), de desarrollo (RADes) o cualquier tipo de respuesta cerrada con respuesta abierta de desarrollo (RCRAD)).

E2. Representaciones pedidas: representación exclusivamente numérica o verbal (RENV), utilizando una ilustración (RI), una tabla (RT), un diagrama (RD), una gráfica (RG) o una expresión algebraica (REA).

E3. Unicidad y exactitud: solución única y exacta (RUE), solución no única ni exacta (RNUE).

E4. Toma de decisión: resolución con (RCTD) o sin toma de decisión en cuanto a las soluciones (RSTD).

## ANÁLISIS Y RESULTADOS

El libro consta de 13 unidades y unas páginas finales sobre la calculadora científica. La unidad de SEL está dividida en cinco secciones donde se proponen 89 actividades, 5 en la primera sección, 14 en la segunda, 58 en la tercera, 5 en la cuarta y 7 en la quinta. Antes de empezar, y para no ser reiterativos, destacamos que todos los problemas de esta unidad presentan un *contexto de datos no realistas* y una *formulación con información suficiente* y que *no exige ningún recurso extra*.

### Sección 1: Para empezar

Hay 5 problemas, por lo que su análisis, a nivel global, no es demasiado significativo, pero sí interesante a nivel particular. Encontramos sólo dos tipos de problemas: dos *ejercicios* y tres *problemas para descubrir*. Es destacable el *contexto con conexión con la historia de las matemáticas* (40%), aunque es superado por el *contexto sin conexión* (60%). La formulación es *verbal* utilizando en tres de los problemas *ilustración informativa*. Además, todos presentan *formulación simple y sencilla*. La tarea matemática es variada, siendo dos de los problemas de *identificación y aplicación*, uno de *razonamiento elemental* y los dos restantes de *razonamiento complejo*. En cuanto a la solución, destacamos que todos son de *respuesta cerrada corta, única y exacta y sin toma de decisión*.

### Sección 2: Al lado del texto

En ésta encontramos 14 problemas propuestos, de los que 13 son *ejercicios* y el restante perteneciente a la categoría *otros problemas*. Los contextos se asocian básicamente (86%) a un *contexto puramente matemático y sin conexión*, coexistiendo (escasamente) con otros *de la vida real personal* (14%).

Todos contienen una *formulación sin ilustración*. La mayoría (71%) son de *formulación agrupada*, y la misma cantidad lo son de *formulación sencilla* que de *compleja*. En casi todos (86%), la información se presenta en el enunciado *utilizando una expresión algebraica*, siendo escasos (14%) los de *formulación exclusivamente verbal utilizando una ilustración*. La tarea matemática predominante (86%) es la *identificación y aplicación*, con algunos problemas (14%) de *razonamiento elemental*.

Por último, la mayoría (93%) son de *respuesta cerrada corta*, y se piden distintas representaciones, destacando la *exclusivamente numérica o verbal* (28,5%) con la *gráfica* (28,5%). La solución casi siempre (93%) es *única y exacta y sin toma de decisión* (93%).

### Sección 3: Ejercicios y problemas

Encontramos 58 problemas propuestos, entre los que predominan los *problemas de palabras* (55%) y los *ejercicios* (38%). Su *contexto* suele ser *puramente matemático* (58%) y *de la vida real personal* (33%). La mayoría (81%) *no tiene conexión* siendo escasa la *conexión con otras ramas de las matemáticas* (19%).

Prevalece una *formulación sin ilustración* (88%), siendo ésta escasamente *informativa* (9%) o *representativa* (3%). Predomina la *formulación simple* (64%) y *sencilla* (64%). Además, el enunciado presenta eminentemente *formulación exclusivamente verbal* (50%) o *con expresión algebraica* (40%). Las tareas matemáticas presentes son *identificación y aplicación* (40%) y

*razonamiento elemental* (52%), con escasa presencia de *razonamiento complejo* (8%). Casi todas las respuestas (91%) son de tipo *cerrada corta* y principalmente se pide una *representación exclusivamente numérica o verbal* (62%) o con expresión algebraica (29%). La solución es principalmente *única y exacta* (88%) y *sin toma de decisión* (86%).

#### Sección 4: Y para terminar

Con 5 problemas, de nuevo no se trata de una sección demasiado significativa a nivel global, pero sí interesante a nivel particular. Encontramos un *problema de palabras*, dos *problemas para descubrir* y un problema perteneciente a la subcategoría *otros problemas*. Tres de ellos presentan *conexión con la vida real personal* y dos un *contexto puramente matemático*. Además, salvo uno que presenta *conexión con otras áreas disciplinares*, todos los demás tienen un *contexto sin conexión*. Por otro lado, todos se asocian a *formulación con ilustración informativa, simple, sencilla y verbal con ilustración*. En cuanto a la *respuesta*, predomina la que usa *expresión algebraica* y la que usa *una tabla*, siendo todas *únicas y exactas y sin toma de decisión*.

#### Sección 5: Autoevaluación

En esta sección hay 7 problemas, cuatro *ejercicios* y tres *problemas de palabras*. Cuatro de ellos presentan un *contexto puramente matemático* y el resto *de la vida real personal*, todos *sin conexión*. El enunciado se presenta de forma *exclusivamente verbal y usando expresión algebraica*. La tarea matemática es de *identificación y aplicación* (4 problemas) y *razonamiento elemental* (tres problemas). En cuanto a la solución, no existe ninguna característica que se aleje de lo común.

A continuación mostramos dos ejemplos de los tipos de problemas más comunes en esta unidad, indicando su análisis:

#### Problema 1:

**15** ▼▼▼ Por dos bolígrafos y tres cuadernos he pagado 7,80 €; por cinco bolígrafos y cuatro cuadernos, pagué 13,20 €. ¿Cuál es el precio de un bolígrafo? ¿Y de un cuaderno?

Figura 1. Problema 1

Análisis: A2, CVRP, CDNR, CSC, FSI, FS, FSen, FIS, FEV, FNR, D2, RCC, RENV, RUE, RSTD.

Se trata de un *problema de palabras* (A2) pues presenta un enunciado localizado en un contexto concreto que necesita traducirse al lenguaje matemático para su resolución.

Se enmarca en un *contexto de la vida real personal* (CVRP) de datos *no realistas* (CDNR), pues son datos que el alumno no percibe como cercanos a él sino como datos que aparecen en el libro de texto y que son inventados. Además, dicho contexto *no presenta conexión* ni con otras ramas de las matemáticas ni otras áreas disciplinares ni con la historia de las matemáticas (CSC).

La formulación *no presenta ilustración* de ningún tipo (FSI) y de enunciado *exclusivamente verbal* (FEV). Además es *simple* (FS), pues aparece una única cuestión (desde el punto de vista sintáctico). Asimismo, se trata de una *formulación sencilla* (FSen) pues tan solo una demanda cognitiva está involucrada en la resolución del problema, que es la resolución del sistema resultante de traducir el enunciado. Destacar que el problema presenta *información suficiente* (FIS) para su resolución y *no requiere del uso de materiales manipulativos ni recursos tecnológicos* para su resolución (FNR).

En cuanto a la tarea matemática, es un problema de *razonamiento elemental* (D2), por requerir algo más que la mera repetición de algoritmos, conllevando su resolución la necesidad de un razonamiento matemático sencillo.

La respuesta requerida es *cerrada corta* (RCC), pues basta dar el precio de cada objeto pedido. Por ese mismo motivo se trata de una *respuesta exclusivamente verbal o numérica* (RENV) que es *única y exacta* (RUE). Además, si resolvemos el problema se aprecia que se trata de una *respuesta sin toma de decisión* (RSTD), pues la única posible solución es un número racional positivo, que puede ser, sin duda, la respuesta pedida.

Problema 2:

15. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución:

a)  $\begin{cases} x + 2y = 18 \\ y - x = -9 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} x + y = 18 \\ y - x = 4 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + 4y = 14 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$       d)  $\begin{cases} x - y = 8 \\ 2y - x = -11 \end{cases}$

Figura 2. Problema 2

Análisis: A1, CPM, CDF, CSC, FSI, FA, FSen, FIS, FEA, FNR, D1, RCC, REA, RUE, RSTD.

Se trata de un *ejercicio* (A1) pues, para resolverlo, basta reconocer o recordar el método de resolución de sistemas de ecuaciones por sustitución y aplicarlo, sin requerir ninguna originalidad del resolutor.

Claramente, se enmarca en un *contexto puramente matemático* (CPM) de *datos no realistas* (CDNR). Además, dicho contexto *no presenta conexión* ni con otras ramas de las matemáticas, ni otras áreas disciplinares, ni con la historia de las matemáticas (CSC).

La formulación no presenta ilustración de ningún tipo (FSI) y es de expresión algebraica (FEA), pues se basa en el planteamiento de los cuatro sistemas de ecuaciones que podemos ver. Además es agrupada (FA), pues el problema consta de cuatro apartados (diferentes cuestiones desde el punto de vista sintáctico), y sencilla (FSen) pues sólo hay una demanda cognitiva en juego, la resolución de sistemas de ecuaciones por el método de sustitución. Destacar que el problema presenta información suficiente (FIS) para su resolución y no requiere del uso de materiales manipulativos ni recursos tecnológicos para su resolución (FNR).

En cuanto a la tarea matemática, es un problema de *identificación y aplicación* (D1), pues este problema sólo demanda la identificación y el empleo del algoritmo mencionado.

La respuesta requerida es *cerrada corta* (RCC), *única y exacta* (RUE) y *sin toma de decisión* (RSTD), pues basta dar las soluciones de los sistemas. Por ese mismo motivo se trata de una *respuesta exclusivamente algebraica* (REA) (hemos considerado este tipo de respuestas algebraicas, pues se trata de asignar un valor a incógnitas sin ningún significado real).

## CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

Podemos concluir que en la unidad analizada no se promueve la resolución de problemas como eje central del aprendizaje, pues una mayoría de los problemas propuestos son del tipo *ejercicio*, seguidos por *problemas de palabras*, siendo ambas las categorías de complejidad más baja. Esto supone una diferencia con los resultados del estudio de Herdeiro (2010), donde predominan los problemas de palabra frente a los ejercicios, coincidiendo, sin embargo, con Serrano (2012), que aprecia también una mayoría de ejercicios frente a las demás categorías. Por otro lado, el porcentaje de *problemas de palabras* en uno de los libros de texto es significativamente mayor que en otro, lo que podría ser indicativo, como señala Herdeiro (2010), de que “los libros de texto no dan la misma

*importancia a la contextualización de situaciones y por lo tanto, no valoran del mismo modo la fase de matematización*” (pp. 13). Además este hecho es contradictorio con lo que especifican los documentos oficiales y los estudios en educación matemática, que abogan por una enseñanza basada en la resolución de problemas que promueva el razonamiento y el ingenio, así como por problemas cercanos a la vida real que hagan entender a los alumnos la utilidad de la matemática. Es notable el hecho de que, promoviendo los currículos oficiales una enseñanza basada en la resolución de problemas y contemplando la investigación en educación dicha enseñanza como parte integral de las matemáticas, el libro de texto, como principal herramienta de trabajo, no coincida con estas ideas. Aunque teóricamente se debería promover el razonamiento matemático y lógico, es sólo en partes específicas de la unidad donde aparecen problemas que lo requieren, dejando la mayor parte de la unidad a problemas mecánicos que abogan por una matemática repetitiva basada en el cálculo y la memorización.

En cuanto al contexto, podemos concluir que predomina el *contexto puramente matemático* seguido por el *de la vida real (personal y, en menor grado, laboral y educativo)*. Es clave señalar la presencia de *datos no realistas* en todos los casos estudiados, así como la casi total asociación a *contextos sin conexión* siendo la más presente, aunque con baja frecuencia, la *conexión con otras ramas de las matemáticas*. Si atendemos a los *problemas de palabras* que se asocian a contextos de la vida real, podríamos pensar que se transmite una visión de una matemática realista porque permite que el alumno perciba y resuelva situaciones aceptadas como posibles en el mundo real, pero este realismo sólo es parcial pues los datos son inventados (Herdeiro 2010). De nuevo encontramos poca coherencia con los currículos oficiales según los que los problemas de matemáticas deben estar vinculados a aspectos cotidianos de la vida de los alumnos y suponer una motivación con datos lo más realista posibles.

En cuanto a la tarea matemática, las más comunes son la *identificación y aplicación* y el *razonamiento elemental*. Esto indica que la mayoría de los problemas propuestos no suponen mayor demanda que la aplicación rutinaria de procesos conocidos y un razonamiento muy elemental, coincidiendo con lo que aprecia Serrano (2012) en su estudio. De nuevo se aprecia poca coherencia con los documentos oficiales, donde se aconseja un aumento gradual de las exigencias de las tareas matemáticas, difícilmente alcanzable si predominan casi únicamente las dos de menor exigencia.

En general, se evidencian varios aspectos deficitarios en lo que se refiere a la coherencia del libro de texto con lo que se plantea en la ley o la investigación, algo de lo que deben ser conscientes los docentes a la hora de su elección y uso en el aula. En términos de prospectiva, sería de interés aumentar el número de casos en el estudio e incluir otras unidades y cursos. El hecho de que el análisis se haga del libro de la editorial más vendida en España puede llegar a tener relevancia, ya que es un ejemplo prototípico de esto. Por otra parte, tal y como afirma Herdeiro (2010), sería interesante investigar sobre la influencia de los libros de texto sobre la visión de la noción de problema que tiene el profesor de matemáticas.

## Referencias

- Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, 17(2), 125-141.
- Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: M. E. Technical University, Ankara
- Colera, J., Gaztelu, I. y Oliveira, M.J. (2011). *Matemáticas 3 Educación Secundaria*. Madrid: Anaya.

- Contreras, L.C. y Carrillo, J. (2000). El amplio campo de la resolución de problemas. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.). *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos* (pp. 13-37). Huelva: Hergué.
- Herdeiro, C. (2010). *A resolução de problemas nos maus escolares de matemática do 9º ano de escolaridade*. Tesis Doctoral. Universidad de Huelva.
- MEC (2013). *Panorámica de la Edición Española de Libros 2012*. Madrid: MEC.
- Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en Educación Secundaria. *Revista de Educación*, 358, 471-496
- OCDE (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy. A framework for PISA 2006*.
- Parcerisa, A. (1996). *Materiales curriculares. Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. Barcelona, España: Grao.
- Pérez, M.C. (1997). Álgebra desde una perspectiva geométrica. *Epsilon*, 37, 39-56.
- Pino, J. y Blanco, L.J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad en España y Chile, en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63-88.
- Piñuel, J.L. (2002). Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido. *Estudios de Sociolingüística* 3(1), 1-42.
- Pólya, G. (1985). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas. (Versión original en inglés: *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press, 1945).
- Santos, M. A. (1991). ¿Cómo evaluar los materiales? *Cuadernos de Pedagogía*, 194, 29-31.
- Ruesga, P., Valls, F., Rodríguez, T. (2006). Un instrumento para seleccionar libros de texto de matemáticas. Aplicación al bloque curricular de Geometría. *REIFOP*, 9(1), 1-13.
- Santos, M. A. (1991). ¿Cómo evaluar los materiales? *Cuadernos de Pedagogía*, 194, 29-31.
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers, 209-246.
- Serrano, I. (2012) *Análisis de Problemas de libros de texto de Álgebra Lineal*. Trabajo Final de Máster. Universidad de Huelva.
- Sigarreta, J.M., Rodríguez, J.M. y Ruesga P. (2006) La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 13(1), 53-66.
- Schubring, G. (1987). On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the learning of mathematics*, 7(3), pp. 41-51.
- Villela, J.A. y Contreras, L.C. (2006) El conocimiento profesional de los docentes de Matemáticas en relación con la selección y uso de libros de texto. *Revista de Educación*, 340, 973- 992.

---

<sup>1</sup> En sintonía con los autores anteriores, emplearemos el término problema para abarcar la tipología descrita anteriormente, incluyendo, por tanto, actividades o tareas que no se corresponden con la caracterización mencionada al principio de este epígrafe.

<sup>2</sup> Este instrumento de análisis ha sido realizado de forma conjunta con los autores de la comunicación "Análisis de los problemas matemáticos de un libro de texto de 3º ESO en relación con los contenidos de Geometría Plana", también presentada a este simposio.

<sup>3</sup> Usamos la expresión Práctica Matemática en el mismo sentido que lo hacen Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013), refiriéndose, en ese caso, a un subdominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.