

# INDAGANDO SOBRE EL PAPEL DE LA TECNOLOGÍA EN EL AULA

## Enquiring regarding the role of technology in the classroom

José-María Gavilán-Izquierdo

Universidad de Sevilla

### Resumen

*En este trabajo abordamos la problemática de investigación sobre el papel de la tecnología en el aula, centrándonos en el profesor. Utilizaremos la complementariedad entre dos ideas socioculturales, orquestación instrumental y modelación de la descomposición genética de un concepto, para aproximarnos a la caracterización del papel de la tecnología en el aula. Reflexionamos sobre la aportación que esta complementariedad hace a la discusión sobre la articulación de marcos teóricos.*

**Palabras clave:** *tecnología, orquestación instrumental, modelación de la descomposición genética de un concepto, complementariedad teórica.*

### Abstract

*In this paper, we tackle the research problem about the role of technology in the classroom, focusing of the teacher. We use the complementarity between two sociocultural ideas, instrumental orchestration and modeling genetical decomposition of a concept, to approach to the characterization of the role of technology in the classroom. We reflect on the contribution that this complementarity makes to the discussion on the articulation of theoretical frameworks.*

**Keywords:** *technology, instrumental orchestration, modeling genetical decomposition of a concept, theoretical complementarity.*

### INTRODUCCIÓN

La tecnología cada vez está más presente en nuestro mundo y la educación no es ajena a los cambios que conlleva incorporar cada vez más tecnología. Desde la educación matemática hay una agenda de investigación centrada en la indagación sobre la tecnología en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Los trabajos de Kendall y Stacey (2001, 2002) consideran que los profesores juegan un papel relevante en la introducción de tecnología en el aula, y se centran en las preferencias de los profesores sobre el uso de los modos de representación y en la manera en que se apoyan en el software (programas de cálculo simbólico) para promover un modo de representación u otro. Nos centraremos en esta comunicación en el profesor.

La amplitud del campo de problemas que pueden plantearse ha llevado a que en las investigaciones se adopten diferentes perspectivas teóricas. Entre ellas, podemos señalar la aproximación instrumental (Trouche, 2004, 2005a, 2005b), que hace planteamientos cognitivos a través de la génesis instrumental que se centra en el estudiante y planteamientos socioculturales (dimensión social, en sus propios términos) mediante la orquestación instrumental que considera la relación estudiantes-profesor mediada por el ordenador (Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer, 2010). Algunos investigadores utilizan esta idea para indagar sobre el aprendizaje matemático que se produce a través de las discusiones en gran grupo en entornos tecnológicos (Ferrer, Fortuny y Morera 2013; Morera, Planas y Fortuny, 2013), para caracterizar la práctica del profesor (Tabach,

2011), o la visión de los profesores sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y el papel de la tecnología en el mismo (Drijvers et al., 2010).

Distintos investigadores señalan el potencial para la investigación de la articulación de distintos marcos teóricos de diferentes maneras (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010; Even y Schwarz 2003, Llinares, 2000; Prediger, Bikner-Ahsbahs y Arzarello, 2008). Drijvers et al. (2010) plantean en su artículo la necesidad de ir complementando el marco teórico de la aproximación instrumental con otras aproximaciones teóricas. Planteamos en este trabajo complementar la idea de orquestación instrumental con ideas “socioculturales” provenientes del análisis de la actividad del profesor en el aula (Llinares, 1999, 2000).

Los investigadores han abordado de diferente forma la articulación teórica, así Drijvers, Godino, Font y Trouche (2013) comparan y contrastan el enfoque ontosemiótico y la aproximación instrumental en el sentido del trabajo de Even y Schwarz (2003). Por otro lado, en un intento de dar significado a la idea de objeto matemático, Font, Badillo, Trigueros y Rubio (2012), plantean este problema desde el modelo APOS (Dubinsky, 1991) y desde el enfoque ontosemiótico (Font, 2005) y proponen complementar ambas perspectivas, particularizado a la derivada. Trigueros, Bosh y Gascón (2011) han planteado este problema referido a la Teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1999) y el modelo APOS (Dubinsky, 1991). Nuestra propuesta va en el sentido de Even y Schwarz (2003), de analizar una misma situación desde dos aproximaciones teóricas con el objetivo de complementarlas. Posibilitará abordar un problema que por separado no resuelven y para plantearnos y reflexionar si es necesario que los marcos teóricos cumplan determinados “requisitos” para que esa complementariedad no sea inconsistente.

A partir de la idea de programa de investigación científica de Lakatos (1993), la idea de articulación teórica podemos sustentarla por la coexistencia y desarrollo de distintos programas de investigación científica. Para este autor, un programa de investigación científica tiene tres componentes básicos, un núcleo firme (que caracteriza el programa), un cinturón protector de hipótesis auxiliares y una heurística (estrategias de solución de problemas científicos, metodología de investigación). El progreso científico se basa en la competitividad de los programas de investigación científica y en la capacidad de los mismos para predecir y descubrir hechos nuevos. Desde este posicionamiento epistemológico, la articulación teórica de complementariedad de marcos teóricos podemos entenderla como una conformación de un programa de investigación científica “emergente”, y por tanto en términos de la construcción del núcleo firme (ideas básicas del programa) que precisa, desde nuestro punto de vista, de una compatibilidad de las ideas en las que se apoyan los marcos teóricos originales. Esta complementariedad puede aportar explicaciones a hechos que en los distintos marcos carecían de las mismas.

## MARCO CONCEPTUAL

Elaboramos nuestra propuesta a partir de ideas teóricas sobre la actividad del profesor (Llinares, 1999, 2000) y de ideas teóricas provenientes de la aproximación instrumental (Trouche, 2004, 2005a, 2005b).

a) Desde la actividad del profesor utilizamos la idea de *modelación de la descomposición genética*. Para Llinares (1999, 2000) la actividad del profesor de enseñar matemáticas, en el aula, consiste en la constitución de una comunidad de práctica, un grupo de personas que comparte formas de comunicarse y actuar. El profesor facilita a los estudiantes la integración en dicha comunidad para fomentar o promover su aprendizaje matemático. En nuestro trabajo el aprendizaje que se promueve lo caracterizamos utilizando el modelo de desarrollo de la comprensión APOS (Dubinky, 1991) que considera que un concepto se puede comprender de distintas formas (acción, proceso, objeto, esquema) y que hay diferentes mecanismos de construcción de dichas formas de comprender (interiorización, encapsulación...).

Para analizar la actividad del profesor utilizamos la idea de modelación de la descomposición genética de un concepto o noción matemática (García, Gavilán, y Llinares, 2012; Gavilán, García y Llinares, 2007b), entendida como una descripción de la forma en la que el profesor usa los instrumentos de la práctica para generar un discurso en el aula que potencie en los estudiantes la construcción de conocimiento matemático (mecanismos de construcción de conocimiento en términos del modelo APOS). Los elementos matemáticos (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2007, 2013) y los modos de representación (Rico, 2001) son desde esta perspectiva los instrumentos de la práctica (Llinares, 2000) cuyo uso y propósito caracterizan la modelación. La modelación de la descomposición genética de un concepto o noción matemática permite identificar relaciones entre distintos elementos:

- los diferentes modos de representación (analítico y gráfico),
- las diferentes formas de conocer un concepto matemático, y
- las relaciones entre los distintos conceptos que conforman la noción matemática.

b) Desde la aproximación instrumental utilizamos la idea de *orquestración instrumental*. Trouche (2005a) indica que un artefacto es un objeto físico u objeto abstracto y que cuando se usa este artefacto para resolver una tarea se convierte en un instrumento. Este proceso de conversión es complejo y se denomina génesis instrumental. Este mismo autor (Trouche, 2005b) señala que la idea de orquestración instrumental hace referencia a la dimensión social de la génesis instrumental de los estudiantes.

Para Drijvers et al. (2010) una orquestración instrumental es la forma en la que el profesor organiza un entorno tecnológico para guiar la génesis instrumental de los estudiantes. Distinguen tres elementos en una orquestración instrumental: configuración didáctica, modos de explotación e implementación didáctica (traducciones tomadas de Ferrer et al., 2013). Los dos primeros parcialmente preparados antes de la intervención en el aula.

La configuración didáctica incluye los “artefactos” seleccionados por el profesor para resolver la tarea en un determinado entorno (es decir, las preguntas, la tecnología disponible, los elementos matemáticos y los modos de representación). Los modos de explotación de la configuración didáctica se refieren a como una tarea matemática puede poner en funcionamiento, de diversas maneras, los artefactos en función de cómo los estudiantes aborden su resolución, y cómo el profesor utiliza la configuración didáctica para conseguir su objetivo didáctico, “decisiones sobre el modo de explotación pueden ser vistas como parte del diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje” (Drijvers et al., 2010, p. 215). Para Tabach (2013) el modo de explotación es un elemento central de la orquestración instrumental, de manera que distintas configuraciones didácticas que se explotan del mismo modo dan como resultados variantes de la misma orquestración instrumental. El tercer elemento, la implementación didáctica, ha sido introducido por Drijvers et al. (2010) y se refiere a la puesta en acción en el aula de los otros dos elementos, “las decisiones tomadas mientras enseña sobre cómo llevar a cabo la configuración didáctica y el modo de explotación elegidos (p. 215)”.

Drijvers et al. (2010) identificaron un repertorio de orquestraciones instrumentales que pueden ser clasificadas en dos grandes grupos, las centradas en los estudiantes y las centradas en el profesor, caracterizadas por el grado de participación de los estudiantes.

Consideradas conjuntamente las dos ideas teóricas, modelación de la descomposición genética y orquestración instrumental, permiten identificar una *trayectoria de aprendizaje* (Simon, 1995) de los conceptos matemáticos en términos de formas de conocer potenciadas, vinculada a la orquestración instrumental. Utilizaremos esta complementariedad teórica para apuntar ideas que ayuden a caracterizar el papel de la tecnología en el aula a partir de cómo se orquestran los instrumentos para promover determinados objetivos de aprendizaje.

Las preguntas de investigación que planteamos son las siguientes:

Centrados en el profesor ¿pueden las trayectorias de aprendizaje vinculadas a las orquestaciones instrumentales ser herramientas para caracterizar el papel de la tecnología en el aula?

¿Es “coherente” esta complementariedad teórica?

## **METODOLOGÍA**

El caso que presentamos es el de un profesor de matemáticas, Juan, que imparte clase a un grupo de estudiantes de primer curso de Bachillerato (16-17 años). Juan impartió tres sesiones de clase en el aula de informática en la que los estudiantes trabajaban con un ordenador en pequeños grupos. Juan utilizó en sus clases un programa de geometría dinámica y otro de cálculo simbólico. El contexto matemático fue la noción de derivada que está conformada por tres conceptos: derivada de una función en un punto ( $f'(a)$ ), función derivada ( $f'(x)$ ) y operador derivada ( $D(f)$ ), si bien no están aislados de otros conceptos como límites e integrales (definidas e indefinidas). En esta comunicación consideramos  $f'(a)$  como foco.

### **Datos de la investigación**

Los datos de la investigación se recogieron a partir de la entrevista de planificación realizada a Juan y de las grabaciones de las sesiones de clase desarrolladas en el aula de informática. Las grabaciones de aula se realizaron con una cámara de vídeo que recogía imágenes y sonido con un micrófono de ambiente. Además, el profesor llevaba un micrófono inalámbrico que permitió grabar las interacciones con sus estudiantes.

La entrevista de planificación y las sesiones de clase fueron transcritas en su totalidad, así mismo se confeccionó una descripción de lo que sucedía en cada sesión de clase. Esta descripción recogía si el profesor se dirigía a todo el grupo de clase o a un grupo particular de dos o tres estudiantes que resolvían la tarea conjuntamente con un ordenador; recogía la información que se compartía en el grupo a través de la pizarra o el ordenador. Las transcripciones de la entrevista y de las sesiones de clase junto con la descripción constituían los datos que se utilizaron, y permitió disponer de información sobre lo que *se planificó, se decía y se hacía*.

### **Análisis de los datos**

El análisis de los datos se llevó a cabo en dos fases. En ambas la unidad de análisis considerada era el proceso de resolución, desarrollado en el aula, de una tarea.

En la primera fase, para cada unidad de análisis se identificaban “segmentos de enseñanza”, caracterizados por la modelación por parte del profesor de un mecanismo de construcción de conocimiento (Gavilán, García y Llinares, 2007a) que potencia en el estudiante la construcción de un manera de conocer el concepto. Para cada uno de estos segmentos se identificaron los usos de los elementos matemáticos y de los modos de representación y el propósito de su uso (la manera de conocer el concepto). En algunas situaciones se consideraron conjuntamente algunos segmentos ya que se podía inferir la modelación de un nuevo mecanismo de construcción de conocimiento (Gavilán et al., 2007a).

La consideración conjunta de la secuencia de modelaciones de mecanismos constructivos y la organización de las relaciones entre mecanismos se materializa en lo que se denomina modelación de la descomposición genética del concepto matemático (o noción matemática). Esta modelación nos informa de los objetivos de aprendizaje planteados por el profesor. Como resultado de esta primera fase de análisis podemos “trazar” una trayectoria de aprendizaje (Simon, 1995) relativa al concepto matemático. Para este autor, la trayectoria de aprendizaje es una predicción sobre el camino por el que puede discurrir el aprendizaje.

En la segunda fase del análisis, para cada unidad de análisis se identificaron las orquestaciones instrumentales desarrolladas, como indican Drijvers et al. (2010) en cada unidad de análisis pueden, a priori, ser varias las orquestaciones. Se consideraron los tres elementos de una orquestación instrumental (Drijvers et al., 2010): la configuración didáctica, los modos de explotación y la implementación didáctica. Todos los elementos no tienen el mismo peso para identificar la orquestación, siguiendo a Tabach (2013) diferenciaremos las orquestaciones instrumentales por la implementación didáctica del modo de explotación y no por la configuración didáctica.

La configuración didáctica y los modos de explotación de la configuración didáctica, como se ha señalado anteriormente, son preparados, en parte en la fase de planificación de la enseñanza, por ello utilizaremos información proveniente de la entrevista de planificación. En la implementación didáctica se incluyen las decisiones del profesor respecto a las interrelaciones con los estudiantes para favorecer el aprendizaje matemático mediante la explotación de la configuración didáctica.

Como resultado de esta segunda fase de análisis podemos disponer del repertorio de orquestaciones instrumentales desarrolladas por el profesor que nos caracterizan las interacciones que se producen mediadas por la tecnología.

Como resultado del análisis se obtuvieron para cada unidad de análisis un conjunto de segmentos de enseñanza, caracterizados por la modelación de mecanismos de construcción de conocimiento (favoreciendo formas de conocer), y distintas orquestaciones instrumentales desarrolladas para favorecer dicha construcción de conocimiento.

## RESULTADOS

En este trabajo nos centramos en el análisis de una de las tareas utilizada en una de las sesiones de clase impartida en el aula de informática. La tarea propuesta fue: calcular el valor de la derivada de  $f(x)=x^2$  en el punto  $x=1$ . El profesor proporcionó a los estudiantes una figura construida con Cabri-géomètre II (ver figura 1) para que los estudiantes mediante arrastre de un punto próximo a  $x=1$  (el punto rojo) obtuvieran el valor de la derivada. Los estudiantes trabajaron en pequeños grupos (dos o tres estudiantes) con un ordenador.

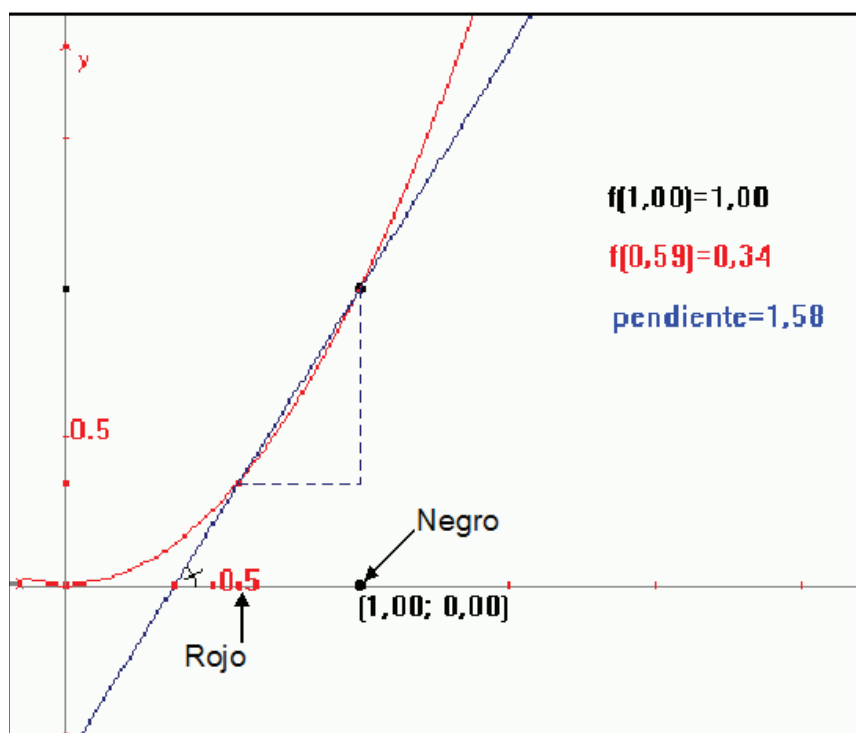


Figura 1: Construcción de Cabri para la tarea

Juan pretendía que los estudiantes elaboraran una tabla de valores de los cocientes incrementales  $(f(1)-f(x))/(1-x)$  en valores de  $x$  próximos a 1. La figura construida proporcionaba, además de la gráfica de  $f(x)$  y la recta secante por  $(x, f(x))$  y  $(1, f(1))$ , los valores  $f(1)$ ,  $f(x)$ , y de la pendiente de la recta secante “dibujada”.

El discurso del aula es el siguiente (J=Juan, E= estudiante):

- J: Podemos coger el punto rojo que aparece ahí. El punto negro, aparece un punto negro sobre el 1, y lo que vamos a calcular, lo que vamos a calcular es cómo está variando la función en el punto 1..../...
- Si cogemos este punto <punto rojo> nos vamos aproximando ¿cuánto me sale la tasa de variación? ¿qué nos dice el ordenador? Eso es la pendiente de esta recta que aparece aquí <se refiere a la recta secante de la figura>.
- J: Cuando yo me vaya acercando, otro punto aquí, 0.63, pues la pendiente que me aparece 1.63, cuando yo me acerque más. En 0.80 ¿qué pendiente me aparece?
- E: 1.75
- J: Si yo pongo aquí 0.9 ¿qué hay que poner aquí? <Indicando cómo completar la tabla de cocientes incrementales>
- E: 1.85
- J: Cuando yo ponga aquí un 1 ¿qué voy yo a tener que poner aquí?
- E: 1.
- J: Cuando este punto  $x$  se vaya acercando a éste de aquí <punto negro>, fijaros la recta ésta <recta secante> ¿a qué va tendiendo? ¿a qué se va pareciendo? a la recta tangente a la curva ¿lo veis o no lo veis? se va aproximando, aproximando
- E: A la tangente.
- J: Hasta que llega a la tangente, pues lo que tengo realmente es la recta tangente.
- E: Sí.
- J: A eso es a lo que vamos a llamar la derivada. Entonces cuando yo este punto <punto rojo> lo hago tender, se lo hago cada vez más cerca del punto negro, pues, esta recta que yo tenía aquí que era una recta secante ¿a dónde? ¿a dónde se nos va a ir?, mira ¿lo veis? cada vez más cerca, cada vez más cerca, cuando llego al punto ése, realmente ¿qué es lo que tengo aquí? la recta tangente.

Mientras se produce el diálogo anterior, Juan ha ido confeccionado en la pizarra la tabla de valores de los cocientes incrementales  $(f(1)-f(x))/(1-x)$ , utilizando en el discurso referencias al lenguaje gráfico y a los valores de la tabla y su tendencia en el entorno del punto  $x=1$ . Juan pretendía centrar la discusión en el proceso de variación de los valores de  $f$  (punto rojo) y de los valores que va tomando el cociente incremental, pretendía hacer visible el proceso de variación, y por tanto el paso al límite. La necesidad de reflexión sobre la tendencia de los valores y de la recta secante hacia el límite (la recta tangente) nos permite considerar que se “modela el mecanismo de interiorización” de la derivada de la función en un punto. Esta modelación se identifica a partir de la repetición de las acciones de calcular secantes a la curva y sus pendientes y de la necesidad de inferir la tendencia de dichas secantes y sus pendientes (mediante reflexión) a la recta tangente y su pendiente. Este mecanismo de interiorización (Dubinsky, 1991) construye una forma de conocer proceso a partir de acciones, es decir, relaciona las formas de conocer acción y proceso para  $f'(a)$ . Además esto le permitió a Juan mostrar la vinculación entre los significados de la derivada de una función en un punto, analítico y gráfico, produciéndose la integración de las representaciones. Juan hizo visibles los significados mediante el paso al límite independientemente del modo de representación. La *trayectoria de aprendizaje* identificada en este segmento se caracteriza por el establecimiento de

relaciones, entre las formas de conocer acción y proceso de  $f'(a)$  y entre los modos de representación analítico y gráfico. Esta manera de proceder parece indicar que se pretende favorecer una comprensión basada en el establecimiento de conexiones.

Desde el punto de vista de la orquestación instrumental, la tarea propuesta a los estudiantes requería de éstos que utilizaran la posibilidad del arrastre de un objeto (un punto) de una figura para obtener un conjunto de valores. La configuración didáctica, la tarea planteada y el uso de la tecnología ya estaban presentes en la planificación. Juan indicó en la entrevista de planificación la relevancia de la visualización dinámica del límite de las rectas secantes hacia la recta tangente mediante tecnología “En este sentido se puede hacer una buena visualización de la obtención de la recta tangente como límite de secantes a través del programa MAPLE mediante la rutina with (plots): animate( $\{x^2, (t + 2)*(x - 2) + 4\}$ ). Que corresponde a la función  $x^2$  en  $x = 1$ ”. Respecto al modo de explotación, Juan en la misma entrevista señaló “halla la pendiente de la recta secante que corta a la gráfica... pon el resultado anterior en la columna correspondiente y completa los demás (se refiere a la tabla de valores de los cocientes incrementales). Lo que estamos viendo un poco, límite, pero calcular estos valores,  $f(x)$ , el cociente incremental en puntos muy próximos a 2, y ahora que los vayan poniendo, aquí a qué va tendiendo, realmente calcular el límite, pero calcular el límite con aproximaciones”.

Respecto a la implementación didáctica del modo de explotación, Juan les propone en gran grupo, que vayan confeccionando la tabla de valores de los cocientes incrementales en su cuaderno. Los estudiantes trabajaron en pequeños grupos con un ordenador, y cada grupo de estudiantes trabaja “libremente” la tarea haciendo el arrastre de puntos, las aproximaciones, según le parecía oportuno. Juan dispuso de una pizarra para organizar la discusión en gran grupo. Cuando algún grupo plantea una pregunta a Juan, éste la atiende y si lo considera relevante la discute en gran grupo. El protocolo anterior recoge algunas de las interacciones que se producen en gran grupo. Juan va completando la tabla de valores en la pizarra a partir de los resultados que van proporcionando los estudiantes, y discutiendo los significados gráficos y analíticos que proporciona la manipulación por arrastre de la figura de Cabri-géométre II.

Las interacciones entre estudiantes y profesor, generalmente en gran grupo, son un elemento clave para que emerjan los significados que a través de la tecnología están disponibles en diferentes modos de representación. La tecnología con el uso de distintas representaciones y la posibilidad de disponer de manera “automática” de los cálculos facilita que los estudiantes se centren en los aspectos relevantes de la variación. Esta manera de orquestación instrumental ha sido descrita por Drijvers et al. (2010) como *debatando la pantalla* (Discuss-the-screen, en el original), lo que es una orquestación instrumental centrada en los estudiantes.

Como resultado del análisis podemos señalar que la orquestación instrumental desarrollada por Juan se centra en los estudiantes a través de la discusión en grupo de los resultados que ofrece la tecnología, en este caso la manipulación mediante arrastre de los objetos de la figura proporcionada. Mediante dicha orquestación instrumental, en la trayectoria de aprendizaje se construye, por los estudiantes, a partir de una forma de conocer acción una forma de conocer proceso el concepto de  $f'(a)$ , mediante la modelación del mecanismo de interiorización de  $f'(a)$  que integra los significados gráficos y analíticos. Estos resultados nos permiten obtener algunos indicios para acercarnos a caracterizar el papel de la tecnología en el aula, centrándonos en el profesor, como favorecedora de una comprensión basada en el establecimiento de conexiones centrada en los estudiantes.

## CONCLUSIONES

El papel de la tecnología en la actividad del profesor en el aula se ha abordado desde dos enfoques diferentes que se complementan. El enfoque de la actividad del profesor (Llinares, 1999, 2000) sobre la actividad del profesor y el uso de la modelación de la descomposición genética de un concepto o noción matemática nos permite señalar que el papel de la tecnología en el aula es

promover o *favorecer una comprensión matemática basada en conexiones* de las formas de conocer y de los modos de representación de los conceptos matemáticos. Por otro lado, la aproximación instrumental, a partir de la orquestación instrumental desarrollada nos pone de manifiesto que el papel de la tecnología es facilitar una actividad del profesor en el aula *centrada en los estudiantes*.

Estos resultados nos inducen abrir líneas para profundizar en esta problemática, ya que la complementariedad de los marcos teóricos considerados nos permiten plantear la posibilidad de armonizar dos dimensiones para caracterizar el papel de la tecnología en la actividad del profesor: forma de comprensión matemática que se favorece y participante en el que se centra. En este sentido, nuestro trabajo tiene algunas limitaciones, pensamos que se necesitan más investigaciones en contextos matemáticos diferentes.

Si consideramos las ideas propuestas por Schoenfeld (2000) en relación a los criterios que pueden ser útiles para evaluar teorías o investigaciones en educación matemática, y las aplicamos a la articulación de marcos teóricos, nuestra propuesta de complementariedad teórica tiene *poder descriptivo y explicativo*, ya que podemos dar descripciones que explican de manera más precisa aspectos relevantes de la realidad compleja que se da en las situaciones de enseñanza y aprendizaje matemático en entornos tecnológicos. El *alcance* de la articulación está ligado a la generalización de las formas de interpretar distintos escenarios en los que está presente la tecnología. Nuestra propuesta posibilita hacer *predicciones* sobre los posibles resultados de aprendizaje como resultado de la génesis instrumental desarrollada en los estudiantes a través de la trayectoria de aprendizaje identificada. Aunque en esta comunicación nuestro foco de interés ha sido el profesor, se necesitan investigaciones que consideren también a los estudiantes.

La idea de programa de investigación científica de Lakatos (1993) nos permite considerar que la complementariedad teórica puede ser fructífera cuando los “núcleos firmes” de los marcos teóricos son compatibles. En este trabajo, los dos marcos teóricos se apoyan en la idea de instrumento. Que usen el mismo término no quiere decir que en ambos marcos teóricos signifique lo mismo. En ambas aproximaciones se admiten artefactos o instrumentos físicos y conceptuales (software, representaciones...). En la aproximación instrumental, un instrumento es un artefacto que puede usarse de diferentes maneras (esquemas de uso) para convertirse en instrumento, por ejemplo los programas de ordenador. En la teoría de la actividad del profesor los instrumentos, los modos de representación y elementos matemáticos en este caso, se usan de determinada manera y propósito. Profundizar en los resultados puede mostrar que los usos y propósitos de los elementos matemáticos (Sánchez-Matamoros et al., 2007, 2013) y los modos de representación (Rico, 2001) pueden permitir caracterizar los esquemas de uso de los programas de ordenador. La posibilidad de que la complementariedad de ideas permita realizar explicaciones y predicciones sobre la enseñanza y el aprendizaje matemático pone de manifiesto que ésta es “progresiva” en el sentido de los programas de investigación científica. Nos hemos limitado a considerar el “núcleo” de cada programa y no se han considerado ni el cinturón protector ni las metodologías de investigación, que deben ser objeto de futuros análisis.

En este trabajo, “compatibilidad y complementariedad” de ideas teóricas son aspectos que se consideran inseparables, las dos caras de una misma moneda, para abordar la articulación de ideas teóricas provenientes de perspectivas socioculturales distintas. Creemos que estos planteamientos pueden ser aspectos que se consideren en las propuestas de profundizan en las diferentes articulaciones teóricas que se pueden abordar. La complementariedad teórica nos habla del potencial de los resultados que se obtienen, y la compatibilidad hace referencias a los requisitos para plantearse coherentemente dichos resultados. Aquí hemos reflexionado sobre la complementariedad de ideas de naturaleza similar (socioculturales) que provienen de marcos teóricos distintos, queda abierta la reflexión a la articulación entre ideas provenientes de perspectivas cognitivas y socioculturales.



## Referencias

- Bikner-Ahsbals, A., y Prediger, S. (2010). Networking of theories – an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers* (pp. 483-505). New York: Springer.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 213–234. doi 10.1007/s10649-010-9254-5
- Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V., y Trouche, L. (2013). One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 23-49. doi: 10.1007/s10649-012-9416-8
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Even, R., y Schwarz, B. (2003). Implications of competing interpretations of practice for research and theory in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 283–313.
- Ferrer, M., Fortuny, J. M., y Morera, L. (2013). Identificación de estilos de enseñanza comparando discusiones en gran grupo de un problema de semejanza. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 263-274). Bilbao: SEIEM.
- Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Max, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IX* (pp. 111-128). Córdoba: SEIEM.
- Font, V., Badillo, E., Trigueros, M., y Rubio, N. (2012). La encapsulación de procesos en objetos analizada desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 239 - 247). Jaén: SEIEM.
- García, M., Gavilán, J. M., y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(3), 219-235.
- Gavilán, J. M., García, M., y Llinares, S. (2007a). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(2), 157-170.
- Gavilán, J. M., García, M., y Llinares, S. (2007b). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial de los estudiantes. *Educación Matemática*, 19(2), 5-39.
- Kendal, M., y Stacey, K. (2001). The impact of teacher privileging on learning differentiation with technology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 143-163.
- Kendal, M., y Stacey, K. (2002). Teachers in transition: Moving towards CAS-supported classrooms. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 34, 196-203.
- Lakatos, I. (1993). *La metodología de los programas de investigación científica*. Madrid: Alianza Universidad.
- Llinares, S. (1999). Conocimiento y práctica profesional del profesor de matemáticas. Características de una agenda de investigación. *Zetetike-Cempem-Fe/Unicamp*, 7(12), 9-36.
- Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En J. P. Ponte y L. Sarrazina (Eds.), *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Italia, Actas da Escola de Verao-1999* (pp. 109-132). Lisboa: Sección de Educación Matemática Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación/ Sociedad de Educación y Matemática.

- Morera, L., Planas, N., y Fortuny, J. M. (2013). Design and validation of a tool for the analysis of whole group discussions in the mathematics classroom. En B. Ubuz y otros (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of European Research in Mathematics Education*. Antalya: ERME.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbahr, A., y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 40, 165-178. doi: 10.1007/s11858-008-0086-z
- Rico, L. (2001). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. En Contreras, L. C., Carrillo, J., Climent, N. y Sierra, M. (Eds.), *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Adenda, pp. 219- 231). Huelva: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2007). Un indicador de la comprensión del esquema derivada: el uso de las relaciones lógicas. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 229-238). Tenerife: SEIEM.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 27(45), 281-302.
- Schoenfeld, A. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the American Mathematical Society*, 47(6), 2-10.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.
- Tabach, M. (2011). A mathematics teacher's practice in a technological environment: A case study analysis using two complementary theories. *Technology, Knowledge and Learning*, 16, 247-265. doi: 10.1007/s10758-011-9186-x
- Tabach, M. (2013). Developing a general framework for instrumental orchestration. En B. Ubuz y otros (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of European Research in Mathematics Education*. Antalya: ERME.
- Trigueros, M., Bosh, M., y Gascón J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage, y M. Languier, (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 77-116). Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.
- Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281-307. doi: 10.1007/s10758-004-3468-5
- Trouche, L. (2005a). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 137-162). New York: Springer.
- Trouche, L. (2005b). Instrumental genesis, individual and social aspects. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 197-230). New York: Springer.