

AVANCES EN LA CALIDAD DE LAS RESPUESTAS A PREGUNTAS DE PROBABILIDAD DESPUÉS DE UNA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE CON TECNOLOGÍA

Advances in the quality of the answers to questions of probability after a learning activity with technology

Blanca Flores, Jaime I. García, [Ernesto Sánchez](#)

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav – IPN, México

Resumen

En la presente comunicación, se describen y comparan las respuestas de estudiantes de secundaria (13-14 años) a tres preguntas de un cuestionario de probabilidad antes y después de haber tenido actividades de aprendizaje con apoyo de tecnología. Las preguntas analizadas se relacionan con las nociones de variable aleatoria, espacio muestral, frecuencias y distribución en sus formas más elementales. Se asume la hipótesis de que los recursos que proporciona la tecnología permiten que los estudiantes perciban que las unidades de análisis de la probabilidad son clases de experiencias y no experiencias aisladas. Con esta hipótesis se pueden explicar algunos de los avances que los estudiantes alcanzaron en las respuestas al post-test en relación con las dadas en el pre-test. Las actividades realizadas pueden proporcionar a los estudiantes referentes para los conceptos abstractos de probabilidad que estudiarán más adelante.

Palabras clave: Calidad de las repuestas, Enfoque al resultado aislado, Unidad de análisis.

Abstract

In the present communication the answers of middle school students (13-14 year olds) to a three questions of a probability questionnaire before and after have been learning activities with use of technology are described and compared. The analyzed questions are related to the notions of random variable, sample space, frequencies and distribution, in their most elementary forms. The assumption that has guided the research design is that the resources that provide the technology allow students to assume that the units of analysis of the probability are kinds of experiences and not isolated experiences. This hypothesis may explain some of the progress the students reached in the responses to the post-test in relation to that given in the pre-test. We conclude that the activities carried out provide to students referents for the abstract concepts of probability that they will study later.

Keywords: Quality of the answers, Outcome approach, Unit of Analysis.

INTRODUCCIÓN

Promover que las personas aprendan probabilidad es un objetivo curricular que en la mayoría de países se persigue desde la escuela primaria. Gal (2005) menciona que hay dos razones que justifican esa tendencia: la primera es que la probabilidad es parte de las matemáticas y la estadística, y éstas son de importancia en sí mismas en la sociedad moderna. La segunda, es que la probabilidad es esencial para ayudar a prepararse para la vida, pues en nuestro entorno ocurren tanto o más eventos aleatorios y fenómenos de azar que fenómenos deterministas. Infortunadamente en México, la enseñanza de la probabilidad se demora hasta lo que se llama nivel secundaria (11-14 años), lo que lleva a centrar la investigación en el desarrollo de la probabilidad en estas edades, partiendo de que los estudiantes no han tenido experiencias escolares sobre la materia en sus estudios primarios.

Flores, B., García, J. I., Sánchez, E. (2014). Avances en la calidad de las respuestas a preguntas de probabilidad después de una actividad de aprendizaje con tecnología. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 307-316). Salamanca: SEIEM.

Por otro lado, Jones y Thornton (2005) trazan un panorama de la investigación en probabilidad distinguiendo tres periodos 1) piagetiano; 2) post-piagetiano y 3) contemporáneo. En el primero, Piaget e Inhelder llegaron a poderosas conclusiones, en la perspectiva de apoyar su teoría epistemológica, sobre el razonamiento conceptual asociado a temas centrales de la probabilidad, en particular, marcando las características del desarrollo del pensamiento probabilista en las diferentes etapas. El segundo periodo comenzó con los trabajos de Fischbein (1975) y la influencia de los de Kahneman y Tversky (1972), incluyendo gran variedad de investigaciones, como las de Konold y del propio Jones. Finalmente, algunos rasgos del periodo contemporáneo son la vinculación de la investigación con el currículo, el estudio del aprendizaje en el contexto del salón de clase y el uso de recursos computacionales.

La investigación que da origen a la presente comunicación tiene los rasgos mencionados del periodo contemporáneo ya que se propone explorar el avance en la calidad de las respuestas de los estudiantes a preguntas que involucran algunas de las nociones de espacio muestral, variable aleatoria, frecuencias, probabilidad y distribución en su forma más elemental, como resultado de actividades en las que subyace la relación entre la probabilidad clásica y el enfoque frecuencial de la probabilidad. Esto en el contexto del desarrollo de una lección en el salón de clase, en la que los estudiantes realizaron tanto actividades físicas con una moneda, como simuladas con el apoyo de un software diseñado para el aprendizaje de la probabilidad (Probability Explorer, 1999-2005).

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

¿Cuál es el objeto al que se refieren los enunciados de probabilidad? Por ejemplo, consideremos la afirmación “la probabilidad de obtener un 4 al lanzar un dado es $1/6$ ”. Desde un enfoque subjetivo de la probabilidad, el número $1/6$ es el grado de creencia con el que se espera que el evento ocurra; esta medida permite tomar decisiones con relación a una sola experiencia, por ejemplo, apostar o no cierta cantidad. Desde un enfoque frecuencial, $1/6$ es la razón del número de veces en las que se espera que ocurra 4 entre el número de veces que se realiza el lanzamiento; en este enfoque, el $1/6$ es un enunciado que se refiere a una clase de experiencias y no sólo a una de ellas. El contraste sugiere distinguir dos maneras en la que los estudiantes pueden entender el objeto de la probabilidad; una en la que la unidad de análisis es una sola experiencia aleatoria, y otra en que es una clase de experiencias, a saber, muchas repeticiones de una experiencia bajo condiciones similares. La forma en que frecuentemente se exponen las situaciones de probabilidad puede inducir la creencia de que la unidad de análisis es una sola experiencia. Esta creencia puede explicar algunas confusiones y dificultades de los estudiantes.

Konold (1991, p. 146) se interesó en estudiar cómo la gente interpreta una pregunta referida a una probabilidad. De sus observaciones elaboró la noción que hemos traducido como “el enfoque al resultado aislado” (outcome approach). Para Konold, el objetivo principal de muchos estudiantes frente a determinados problemas de probabilidad, no es estimar o evaluar una probabilidad sino predecir exitosamente el resultado de un solo experimento. Muchas respuestas que se desvían de la norma se pueden explicar presuponiendo dicho enfoque; pero este enfoque también significa que la unidad de análisis para los estudiantes es una sola experiencia. Por otro lado, ciertas dificultades en concebir el espacio muestral se podrían también explicar de manera análoga. El espacio muestral es un concepto central en probabilidad y su descripción en situaciones simples debería ser una tarea rutinaria para los estudiantes. Sin embargo, cuando para ellos la unidad de análisis es una sola experiencia no le atribuyen el sentido esperado por el profesor a la expresión “conjunto de los posibles resultados”, ya que en una sola experiencia sólo hay un resultado. Hablar de todos presupone un pensamiento hipotético que trasciende la consideración de una sola experiencia y fuerza a pensar en una clase de experiencias.

Una hipótesis que subyace en el diseño de la presente investigación, es que los recursos que proporciona la tecnología permiten que los estudiantes asuman que la unidad de análisis de la

probabilidad es una clase de experiencias y no sólo una. Esto gracias a que con la tecnología pueden manipular y experimentar con conjuntos de experiencias aleatorias repetidas, lo que propicia que se observe que el objeto son clases de experiencias y pueden aprender a formular proposiciones referidas a tales clases, en particular, que las proposiciones de asignación de una probabilidad a un evento tienen como sujeto una clase. Otra hipótesis importante es que las actividades de aprendizaje significativo son aquellas en las cuales los estudiantes se esfuerzan por darle sentido a situaciones complejas y desconocidas y se enfrentan a problemas partiendo de sus intuiciones y conocimientos actuales, sin que estos lleven fácilmente a la solución del problema o al esclarecimiento de la situación. El papel del maestro consiste en administrar y monitorear tales actividades. En consonancia con las anteriores hipótesis, se ha elaborado una actividad de aprendizaje sobre probabilidad que involucra implícitamente las nociones de espacio muestral, variable aleatoria, frecuencia y distribución.

El objetivo de la presente comunicación es exponer resumidamente algunos resultados de una investigación cuyo objetivo *es describir* y comparar *las respuestas* de los estudiantes antes y después de haber tenido actividades de aprendizaje con uso de tecnología.

ANTECEDENTES

En lo siguiente se han elegido algunos estudios representativos de tres temas, cuyos conceptos subyacen en su forma más elemental en la actividad que realizaron los estudiantes, tales temas son, espacio muestral, enfoque frecuencial de probabilidad y distribución binomial.

La dificultad para determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio puede ser debida a una falta de razonamiento combinatorio, como indican Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997). Por su parte Shaughnessy (2003) destaca que los programas de instrucción deben implicar a los estudiantes en la determinación de los espacios muestrales en los experimentos aleatorios. Según Jones, Langrall y Money (2007), si se quiere mejorar la enseñanza, los profesores deben tener en cuenta las características del pensamiento de los estudiantes sobre este concepto: a) la dificultad de parte de los niños para realizar una lista de los resultados de un experimento aleatorio, aunque sea simple; b) falta de herramientas sistemáticas para generar los resultados en un experimento compuesto, y c) imposibilidad de relacionar el contenido del espacio muestral y la probabilidad de los resultados. En el presente estudio, los datos de pre-test confirman la afirmación del inciso a) de Jones et al. (2007), pero también referido a los valores de una variable aleatoria.

Ortiz, Mohamed y Serrano (2009), evaluaron el razonamiento probabilístico de profesores en formación administrándoles dos problemas que involucran la definición frecuencial de probabilidad. Encontraron que en el contexto de lanzamiento repetido de chinchetas predomina el sesgo de equiprobabilidad, así como la ausencia de la noción de independencia en sucesiones de sorteos de una moneda.

El estudio didáctico sobre los diferentes acercamientos a la probabilidad es un tema central en la investigación, en particular, el enfoque frecuencial ha suscitado nuevo interés en los estudios didácticos debido a la popularidad de los ordenadores. Aunque Jones, Langrall y Mooney (2007) señalan, con relación a los currículos de probabilidad, que es hasta el bachillerato que se estudia la conexión entre la probabilidad clásica y el enfoque frecuencial, varias de las investigaciones alrededor del enfoque frecuencial se realizan con sujetos que pertenecen a niveles más básicos (Stohl y Tarr, 2002, Stohl, Rider y Tarr, 2004, Ireland y Watson, 2009, Konold, et al., 2011). En estos estudios se ha promovido la conexión entre la “probabilidad experimental” y probabilidad teórica utilizando recursos tecnológicos como *Probability Explorer* y *TinkerPlots*. Stohl y Tarr (2002) observan a 23 alumnos del sexto grado (11–12 años), quienes trabajaron en parejas usando la herramienta computacional *Probability Explorer* para formular y evaluar inferencias durante un periodo de instrucción de 12 días. Stohl, Rider y Tarr (2004) realizaron un análisis enfocado en la conexión unidireccional entre la probabilidad experimental y la probabilidad teórica; observan

cómo usan los estudiantes los datos empíricos para hacer inferencias sobre probabilidades desconocidas y cómo utilizan estas probabilidades para decidir sobre la equidad de un dado. Ireland y Watson (2009) se preguntan sobre las conexiones que los estudiantes de secundaria logran establecer entre la interpretación clásica y frecuencial de probabilidad después de trabajar con manipulables (moneadas, dados) y con el software *ThinkerPlots*. Con base en un continuo que va de lo experimental (concreto) a lo teórico (abstracto), donde los elementos que se destacan son los manipulables, el simulador y la ley de los grandes números, los autores buscan documentar el entendimiento de los alumnos sobre la probabilidad. Konold et al. (2011) realizaron un estudio del caso de una estudiante del octavo grado (13 años), quien mostró tener conocimiento firme de la definición clásica y de la definición frecuencial de probabilidad, sin lograr conectarlas, pues las considera excluyentes. También a nivel secundaria el estudio de Serrano y Ortiz (2009) ofrece resultados de una propuesta de enseñanza en situaciones de simulación de sucesiones de Bernoulli con el applet *Box Model*. Exploran la percepción de los estudiantes de las diferencias entre secuencias provenientes de modelos equiprobables y no equiprobables; informan de fuertes dificultades de los estudiantes para formular juicios sobre tales situaciones. Utilizan la técnica de pedir que los estudiantes propongan secuencias inventadas y luego las confronten con secuencias aleatorias; idea que es retomada en la investigación que aquí se reporta.

Otro tema relacionado con el presente estudio es el de los problemas binomiales, en este también es escasa la literatura de investigación. Van Dooren et al. (2003) exploran la presencia de la *ilusión de linealidad* y muestran que hay estudiantes de bachillerato que a pesar de haber llevado cursos de probabilidad, caen en este sesgo cuando se les plantea problemas binomiales, cuyo enunciado contiene datos que aparentan ser o son proporcionales. Abrahamson (2009a) realiza tres estudios de caso sobre el razonamiento de estudiantes frente a una situación simple de probabilidad hipergeométrica (la cual es casi-binomial). En Abrahamson (2009b y 2009c) se reporta una entrevista a profundidad con un niño de 11.5 años; éste realiza actividades con dispositivos de mediación cuya comprensión requiere diferentes niveles de abstracción. En la entrevista se muestra el proceso de construcción de una distribución (casi) binomial que lleva a cabo el niño con ayuda de la mediación de diferentes artefactos. Abrahamson (2009b) se interesa en el papel de instrumentos de aprendizaje: un dispositivo físico (marbles scooper), tarjetas cuadradas divididas en 4 partes para representar las posiciones de las canicas en el dispositivo y su organización en un histograma. Llama la atención que su diseño que tiene el propósito de que los estudiantes distingan las secuencias THHH, HTHH, HHTH, HHHT en el evento “1T y 3H” no incluya los diagramas de árbol, los cuales son un instrumento de mediación accesible para el mismo fin.

METODOLOGÍA

El tipo de metodología que ha guiado la investigación es de tipo cualitativo y se centra en analizar las respuestas de los estudiantes a tres preguntas de un cuestionario. El análisis se lleva a cabo utilizando la taxonomía SOLO, la cual sugiere una técnica para hacerlo, consistente en observar la calidad de las respuestas definidas de acuerdo a su complejidad estructural.

Participantes. Sesenta y nueve estudiantes que cursaban el segundo grado de secundaria de un colegio particular de la Ciudad de México, cuyas edades se encontraban entre los 13 y 14 años. Estos estudiantes no habían recibido en este curso ningún tipo de enseñanza en los temas de probabilidad. Es probable que hayan estudiado un poco de probabilidad clásica, dado que se prescribe en los programas de cursos anteriores, pero no se recogió evidencia para afirmarlo. El titular del curso de matemáticas en el grupo dirigió el desarrollo de las actividades.

Instrumentos. Se elaboró un cuestionario-actividad con 13 preguntas todas relacionadas al problema de lanzar tres monedas y observar el número de veces que cae ‘águila’ (una expresión popular de una cara de las monedas mexicanas equivalente a ‘sello’ o ‘escudo’); en estas están implícitos uno o dos conceptos básicos de probabilidad, como variable aleatoria, espacio muestral, frecuencias,

probabilidad y distribución. En esta comunicación, por falta de espacio, se analizan sólo las respuestas a 3 preguntas del cuestionario. Éstas se eligieron pues se presentan nociones de espacio muestral, variable aleatoria, frecuencias y distribución.

Pregunta 1: De aquí en adelante, llamaremos lanzamiento a la acción de lanzar tres monedas al aire al mismo tiempo (de preferencia de la misma denominación). Se realiza un lanzamiento y se observa “el número de águilas que ocurren” (llamado variable para esta encuesta). Enlista todos los posibles valores que puede tomar esta variable y relaciónalos con los resultados del experimento.

Pregunta 2: Ahora imagínate que se realizan 1000 lanzamientos y en cada uno de ellos se observa la variable “número de águilas que ocurren”. En la siguiente tabla anota en la columna de la izquierda, los posibles valores de la variable y en la columna de la derecha, el número de veces (o frecuencia) que crees que ocurra cada valor:

Águilas					Total
Frecuencia					

Pregunta 3: Anota la probabilidad que asignas a la ocurrencia de cada valor de la variable

Águilas	0	1	2	3	Total
Probabilidad					

Intencionalidad de las preguntas. La primera pregunta se propone explorar si los estudiantes enuncian todos los valores de la variable y los asocian con la descripción de los resultados (AAA, AAS, etc.). En la segunda, se explora tanto la consideración los valores de la variable, como su percepción de la distribución y la variabilidad, la cual debe reflejarse en las secuencia de frecuencias absolutas propuestas. En la tercera, si logran abstraer una distribución teórica subyacente. Dado que no se enfatizó en ninguna definición especial de probabilidad, los estudiantes podían responder esta pregunta de manera subjetiva, basados en la noción clásica o en la frecuencial.

Probability Explorer (Stohl, 1999-2002) es un ambiente de aprendizaje en el que se generan datos de resultados de simulaciones de juegos de azar, como lanzamiento de monedas y dados, extracciones al azar de bolas contenidas en urnas y otros juegos populares. Los datos se representan en la pantalla de forma icónica, reproduciendo el aspecto que presentan esos juegos en la realidad. Simultáneamente, o después, los datos pueden ordenarse, apilarse y graficarse automáticamente, obteniéndose diversas representaciones de los conjuntos de resultados: tablas de datos agrupados, pictogramas, gráficas circulares. El software es ideal para jugar y experimentar, y aprender sobre el comportamiento de los resultados del azar, además de que ayuda con el cálculo de las frecuencias absolutas y relativas (Figura 1).

Procedimiento de ejecución. El estudio fue organizado en las siguientes cuatro fases: 1) presentación y solución del cuestionario (pre-test); 2) realización de lanzamientos, registro de resultados y observación de patrones en ellos, 3) exploración y simulación con el software, organización de resultados y observación de patrones en ellos, 4) otra aplicación del cuestionario inicial (post-test). Durante las fases 2 y 3 se hicieron actividades motivadas por las preguntas del cuestionario, y se les pedía que registraran resultados y respondieran preguntas formuladas en hojas de trabajo que el profesor les proporcionaba. El tiempo en que se realizaron todas las fases fue de siete horas de clase con una separación de un día hábil entre cada fase.

Procedimiento de análisis. El análisis consiste en clasificar las respuestas de los estudiantes de acuerdo a su calidad. Se utiliza el término calidad de las respuestas para diferenciar y clasificar las respuestas de acuerdo a las componentes que se indican en ella. Una respuesta puede no ser correcta y tener algo de calidad porque el resolutor intenta utilizar componentes pertinentes al problema; en

cambio, algunas otras respuestas pueden acertar a una elección correcta, pero en la argumentación mostrar que no se llega a ella teniendo en cuenta los aspectos pertinentes al problema.

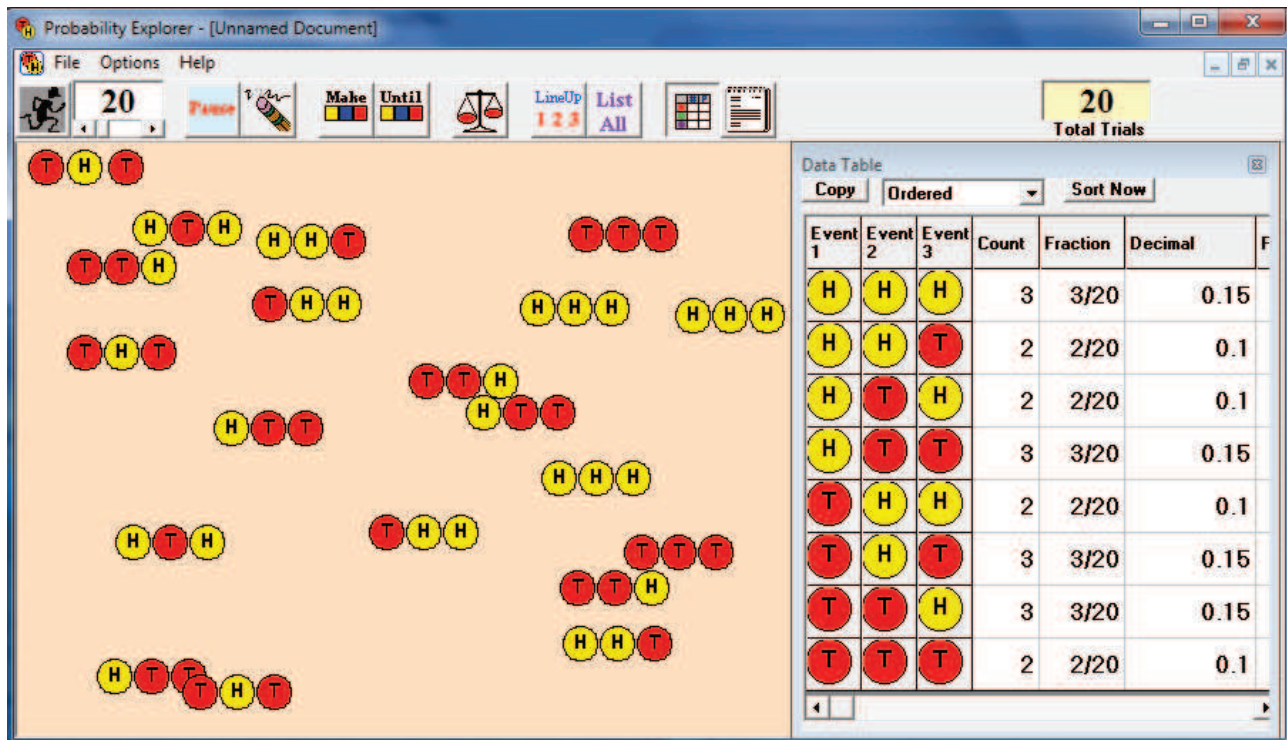


Figura 1. Representación de 20 lanzamientos de tres monedas, con tabla resumen.

La calidad se mide de acuerdo a su complejidad estructural siguiendo, en la medida de lo posible, la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1991). Dada la tarea, se busca determinar 3 o 4 componentes que caracterizan la solución esperada (normativa). Se definen entonces los niveles de razonamiento: Preestructural, cuando la respuesta no se presenta ninguna componente; Uniestructural, cuando sólo aparece en la respuesta una componente; Multiestructural, cuando se utilizan dos o más componentes pero no se relacionan de manera conveniente; y Relacional, en el que se utilizan todas las componentes y se relacionan de manera adecuada. En seguida se presentan las componentes que se definieron para analizar cada pregunta

Para la pregunta 1 las componentes son: a) Representa al menos 1 valor del recorrido de la variable, b) Representa al menos algún resultado mediante una combinación de A^s y S^s de tamaño 3, y c) Considera el espacio muestral (EM) relacionado con el lanzamiento de tres monedas (8 posibles combinaciones: AAA, AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA y SSS.)

Para la pregunta 2, se proponen las siguientes: a) Se identifican los valores de la variable o los elementos del espacio muestral, b) Las frecuencias propuestas suman 1000 o 100%, c) Se propone que los valores de la variable 1 y 2 tienen mayor frecuencia (o 0 y 3 menor probabilidad), d) Las frecuencias varían levemente respecto a los valores teóricos de la distribución.

Para la pregunta 3: a) Da un número fraccionario o un número porcentual para cada valor de la variable, b) En las frecuencias que propone la suma es igual a 1, 100 o alguna potencia de 10, y c) La distribución dada es próxima o igual a la distribución teórica; es decir, que su gráfica tenga forma de campana. Un rasgo que distingue a un grupo reducido de respuestas son las que ofrecen exactamente las probabilidades teóricas.

RESULTADOS

Aunque es natural esperar que después de realizar actividades de aprendizaje haya un mejoramiento general en el desempeño al post-test respecto al pre-test, conviene señalar que se puede atribuir la

mayor influencia del avance a la realización de las actividades que a las intervenciones del profesor, pues estas se redujeron a monitorear aquellas. En seguida se indica en qué aspectos hubo avances significativos y, si cabe, una posible explicación. En la tabla 1 se presentan los resultados del pre-test y del post-test, en términos de las frecuencias en que se clasificaron las respuestas en los niveles estructurales. En seguida se ofrecen algunas puntualizaciones sobre los datos que presenta la tabla.

En el caso de la pregunta 1 del pre-test, sobre Variable Aleatoria y Espacio Muestral, las respuestas se acumulan más en los niveles Uniestructural y Multiestructural. Las respuestas que se ubicaron en estos niveles, ofrecen indicios de que más o menos se entendió la pregunta, pero en el primer caso sólo dieron uno o dos valores del recorrido de la variable aleatoria y en el segundo, además describieron algún elemento del espacio muestral mediante una secuencias de caras de la moneda (por ejemplo: ASA). Una observación es que algunos estudiantes ignoraron que la pregunta se refería a los valores de la variable “el número de águilas” y prefirieron describir elementos del espacio mediante ternas de A^s y S^s , o asumieron que en la descripción de una terna ASS se indica también de manera obvia “el número de águilas”.

Tabla 1. Frecuencias de respuestas de 3 preguntas del pre-test y post-test por nivel de razonamiento

Nivel	Pregunta 1 VA y EM		Pregunta 2: Predicción		Pregunta 3: Distribución	
	Frec. Pre	Frec. Post	Frec. Pre.	Frec. Post.	Frec. Pre.	Frec. Post.
Pre-estructural	9	2	11	0	19	1
Uni-estructural	38	16	48	5	21	16
Multi-estructural	19	21	9	19	24	10
Relacional	2	29	1	44	4	41
No contesta	1	0	0	0	1	0
Total	69	68	69	68	69	68

Respecto a la pregunta 2 del pre-test, la mayoría de respuestas se concentra en los niveles Preestructural y Uniestructural. En las respuestas que fueron clasificadas en el Preestructural, la columna del valor de la variable se llenó con datos equivocados, por ejemplo, en unos casos pusieron en cada fila los elementos que siguen: “A, S, A, S” (uno por fila); otros pusieron valores arbitrarios, por ejemplo, 32, 25, 18, 41”. En cualquiera de los casos las frecuencias que sugirieron no tenían sentido desde la perspectiva del problema. Las clasificadas en uni-estructural, presentaron en esta columna ya los valores del recorrido de forma incompleta, por ejemplo “1, 2, 3”, ya algunos elementos del espacio muestral, por ejemplo “SSS, SAS, SSA, AAA”. Las frecuencias asentadas en las respuestas de este nivel también estuvieron alejadas de las esperadas, unas uniformes “333, 333, 333” o “250, 250, 250, 250” y otras arbitrarias “50, 30, 70” o “11%, 11%, 11%, 11%”. La diferencia de estas respuestas con respecto a las pre-estructurales es que se enlistan valores de la variable o elementos del espacio muestral en la primera columna de la tabla del problema. Las respuestas en Multiestructural se distinguen por contener todos los valores de la variable o todos los elementos del espacio muestral y ofrecer frecuencias que suman 1000 o 100%. El caso clasificado en nivel relacional, escribe los elementos de la variable “3, 2, 1, 0” y las frecuencias “100, 400, 400, 100”; aunque estas frecuencias están alejadas de los valores esperados, se indica que se espera que haya mayor frecuencia de los valores 2 y 1, como efectivamente lo indica la distribución teórica. Las respuestas a la pregunta 3 se concentran en los tres primeros niveles de manera casi uniforme; las del nivel pre-estructural se caracterizan por enlistar números enteros y no probabilidades expresadas en fraccionarios, decimales o porcentajes, además los números propuestos no suman la unidad ni 100. Las respuestas en uni-estructural ofrecen números fraccionarios o enteros, pero su suma no es 1 o 100%, tampoco son proporcionales a los de la distribución teórica, ni se corresponden con los valores de más y menos probabilidad de la distribución. En el nivel Multi-

estructural se clasifican las respuestas cuyas frecuencias que, además de lo anterior, indican que los valores medios son más probables que los extremos, pero alejados de los valores teóricos. Finalmente en relacional se clasifican las respuestas que dan probabilidades aproximadas o iguales a las teóricas.

Los resultados del post-test indican una mejoría en la comprensión de los estudiantes ya que la clasificación de las respuestas indica un desplazamiento general, al menos, hacia un nivel de mayor complejidad estructural. Es lo esperado, pues con las actividades los estudiantes lograron entender mejor lo que se les pregunta, seguramente por haberse familiarizado más con el contexto, disminuyendo con esto el número de respuestas en el nivel pre-estructural. Mirando con más detenimiento se puede afirmar que globalmente el avance fue de más de un nivel. En la pregunta 1, se aprecia que 29 respuestas (43%) están en el nivel relacional, esto significa que los estudiantes correspondientes no tuvieron ninguna dificultad en identificar los elementos del recorrido de la variable y, aunque no en todos los casos, ofrecen indicios de que consideran el espacio muestral completo. En la pregunta 2, se observa que 41 respuestas (60%) se clasifican en relacional, es decir, enumeran bien los elementos de la variable aleatoria y asignan frecuencias razonables a cada valor. Finalmente en la pregunta 3, también 41 respuestas (60%) se ubican en relacional, esto significa que ofrecen una distribución cuyos valores suman la unidad o 100% y que atribuyen mayor probabilidad a los valores 1 y 2 y menor probabilidad a los valores 0 y 3.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En las actividades que realizaron los estudiantes no se les enseñaban los conceptos ni se les decía como responder a las preguntas, sino sólo se les daban indicaciones de cómo llevar a cabo acciones con los dispositivos físico y con el software y, con lo observado, se les pedía que respondieran las preguntas que estaban formuladas en sus hojas de trabajo.

Las frecuencias de respuestas por niveles para la pregunta 1, indican que con la realización de las actividades, los estudiantes fueron capaces de interpretar la pregunta de la manera deseada y buena parte de ellos ofrecieron respuestas en la que desplegaron el recorrido de la variable y el espacio muestral. Con las acciones realizadas con el software, se manejaron en la práctica los elementos del espacio muestral y de los elementos observados, obtuvieron los valores de la variable. En particular, con la experiencia, percibieron naturalmente que la unidad de análisis de la probabilidad no es sólo una experiencia, sino una familia de experiencias. Con esto, ante la pregunta 1, varios de los estudiantes que en el pre-test habían respondido en el sentido del sesgo del resultado aislado, en el post-test modificaron sus respuestas y propusieron varios o todos los elementos de la variable aleatoria.

Con relación a la pregunta 2, también hubo desplazamientos de las frecuencias concentradas en el nivel pre-estructural y uni-estructural en el pre-test, a su concentración en los niveles multi-estructural y relacional en el post-test. El mejoramiento en la descripción de los valores de la variable aleatoria y del espacio muestral, influyó para este aumento, ya que en la pregunta 2 se requería escribir los valores de la variable en la primera columna de la tabla; conviene mencionar que en el pre-test muchos estudiantes fueron incapaces de llenarla de la manera esperada. Hubo también varias respuestas en las que además se ofrecieron frecuencias razonables, pues el nivel relacional en el post-test contiene 60% de las respuestas. Nuevamente es de suponer que la actividad con el software permitió que los estudiantes se dieran cuenta de que hay un patrón que gobierna las frecuencias empíricas (simuladas), a saber, que los valores 0 y 3 suelen tener menos frecuencia que los valores 1 y 2. Conviene destacar que la actividad y la misma pregunta propician que los estudiantes piensen en familias de experimentos y no en experimentos individuales, de esta manera ya no ofrecen respuestas teniendo en mente un solo experimento.

Las frecuencias de respuestas de la pregunta 3 también muestran una mejoría del pre-test al post-test. Al responder la pregunta en el post-test la mayoría propuso distribuciones que cumplen las

condiciones de ser números decimales o porcentuales y de sumar 1 o 100%; además, las 41 respuestas que se ubicaron en el nivel relacional se acercan a las probabilidades teóricas, es decir, asignan mayor probabilidad al 1 y 2 y menos al 0 y 3. En muchos casos se puede deducir que la respuesta obtenida fue resultado de una aplicación informal del enfoque frecuencial de probabilidad y en dos casos, del resultado del análisis del espacio muestral y la aplicación de la definición clásica. Estas respuestas informales de los estudiantes, se basan en ideas que ellos generaron durante su actividad y no provienen de la aplicación de las definiciones, pues estas no se introdujeron ni se explicaron durante la intervención. Es de esperar que el significado que atribuyen a la distribución sea la de una estructura subyacente en los experimentos, que representa, de manera aproximada, los patrones que se presentan en la práctica. No es posible afirmar esto con certeza, pero el sólo hecho de proponer una distribución con las características señaladas ya es indicio de que se comienza a entender este objeto asociado a las acciones realizadas y no como una receta dada por una definición.

Concluimos que las actividades realizadas han proporcionado referentes con cierto nivel de concreción para los conceptos abstractos básicos de espacio muestral, variable aleatoria, frecuencia, probabilidad y distribución. El manejo de estas nociones en la actividad y su uso para responder las preguntas del post-test ya no está basado totalmente en su conocimiento intuitivo, sino que reflejan que se asocian a acciones realizadas y abstracciones de los resultados de esas acciones. En particular, la aparentemente sencilla tarea de describir los valores de la variable aleatoria es muy difícil, pues la formulación de la pregunta le sugiere a los estudiantes significados diferentes al pretendido, como el de pensar en el resultado de una sola experiencia. En cambio, en el post-test los estudiantes ya tienen más claro que las preguntas que se le formulan se refieren a familias de experimentos. Por ejemplo, cabe destacar que en el post-test, las respuestas relacionales a la pregunta 3, proponen probabilidades que no son la traducción a fracciones o decimales de las frecuencias propuestas en el problema 2, algunos dieron la distribución teórica y otros una aproximación a ésta, probablemente porque con la simulación percibieron la variabilidad de las secuencias. El razonamiento informal que desarrollan durante las actividades y que aplican en la respuesta del post-test los coloca en una mejor posición que los que no realizan tales actividades para el estudio formal de los conceptos probabilistas mencionados.

REFERENCIAS

- Abrahamson, D. (2009a). Embodied design: constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), pp. 27-47.
- Abrahamson, D. (2009b). Orchestrating semiotic leaps from tacit to cultural quantitative reasoning –the case of anticipating experimental outcomes of a cuasi-binomial random generator. *Cognition and Instruction*, 27(3), pp. 175-224.
- Abrahamson, D. (2009c). A students synthesis of tacita and mathematical knowledge as a researcher's lens on bridging learning theory. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), pp.195-226. [En línea: www.iejme.com]
- Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181-199; 1997
- Biggs, J.B. y Collis, K.F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H.A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement*, pp. 57-76. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G.A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for teaching and learning (39-63)*. New York: Springer.

- Ireland, S. y Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 339–370.
- Jones, G.A., Langrall, C.W. y Mooney, E.S. (2007). Research in probability. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 909-955. Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.
- Jones, G.A. y Thornton (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. En G.A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning (65-92)*. New York: Springer.
- Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, 3(3), 430-454.
- Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, 139-156. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, N. J. y Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. *Mathematical Thinking and Learning*, 13, 68–86.
- Ortiz, J.J., Mohamed, N., Serrano, L. (2009). Probabilidad frecuencial en profesores en formación. En *Memorias del XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Santander.
- Serrano, L., Ortiz de Haro, J.J. (2009). Equiprobabilidad versus no equiprobabilidad en la enseñanza de la probabilidad. En *Memorias del XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Santander.
- Stohl, H. (1999-2005). *Probability Explorer*. <http://www.probexplorer.com/>
- Stohl, H., Rider, R. y Tarr, J. (2004). *Making connections between empirical and theoretical probability: Students' generation and analysis of data in a technology environment*. Recuperado en Junio 5, 2013, de <http://www.probexplorer.com/Articles/LeeRiderTarrConnectE&T.pdf>
- Stohl, H. y Tarr, J. E. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 319–337.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53 (2), pp. 113-138.