RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES GRÁFICAS Y SIMBÓLICAS DEL CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Relationship between graphical and symbolic representations of the concept of finite limit of a function at a point

José Antonio Fernández-Plaza, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, Luis Rico, Enrique Castro

Universidad de Granada

Resumen

Esta comunicación presenta un estudio exploratorio y descriptivo sobre los modos en los que un grupo de estudiantes de bachillerato describen gráficas de funciones mediante enunciados simbólicos. Se analizan las respuestas de los estudiantes a una tarea consistente en relacionar cuatro gráficas de funciones con pares de enunciados simbólicos propuestos. Los resultados muestran cómo esos estudiantes son capaces de asociar enunciados de propiedades de una función a partir de información gráfica sobre la misma. Mostramos un análisis más detallado de los pares de propiedades asociados a una gráfica particular describiendo las concepciones erróneas subyacentes. Por otro lado, se detecta un uso singular de pares de propiedades que son contradictorias en general y un uso ambiguo de la desigualdad entre el límite de la función en un punto y su imagen en ese mismo punto.

Palabras clave: *Significado de un concepto matemático, Límite finito de una función en un punto, Sistema de representación gráfico, Sistema de representación simbólico, Ambigüedad de la desigualdad.*

Abstract

This paper addresses an exploratory and descriptive study on the ways a group of students in Non-Compulsory Secondary Education describe graphs by means of symbolic statements. Students' responses to a task consisting of establish relationships between four graphs of functions with a pair of symbolic statements are analyzed. The main result is that those students are able to associate properties symbolically expressed from the graphical information. We show a more detailed analysis about pair of properties associated to a particular graph describing the underlying misconceptions. On the other hand, a singular use of pairs of properties, which are contradictory in general, is detected as well as an ambiguous use of the inequality between limit of the function and the image at a point.

Keywords: *Meaning of a mathematical concept, Finite limit of a function at a point, system of graphical representation, system of symbolic representation, Ambiguity of the inequality.*

PROBLEMA

La capacidad matemática de representar es una de las componentes de la competencia matemática que se espera lograr en los escolares al finalizar su escolaridad obligatoria, entendida como la interpretación, traducción entre y utilización de distintas representaciones, entre ellas gráficos, tablas, diagramas, ecuaciones y fórmulas. Esta capacidad se ha de desarrollar conjuntamente con la utilización de las operaciones y el lenguaje simbólico, formal y técnico, que implica la interpretación, manipulación y utilización de expresiones simbólicas, regido por convenios y reglas matemáticas, así como el uso de constructos formales basados en definiciones (OCDE, 2013). En

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F.; Rico, L., Castro, E. (2014). Relación entre representaciones gráficas y simbólicas del concepto de límite finito de una función en un punto. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 287-295). Salamanca: SEIEM.

este marco, nos interesa constatar los modos en que los estudiantes comparan dos o más representaciones en relación a una misma situación problemática.

Consultando trabajos de investigación basados en el análisis de libros de texto (Molfino y Buendía, 2010; Sánchez-Compaña, 2012) observamos que el sistema de representación simbólico identificado se reduce a la notación de límite, de límites laterales y de su formalización, destacando la ausencia de tareas que requieran la búsqueda o selección de funciones que satisfagan variedad de enunciados simbólicos que expresen igualdad o desigualdad entre la imagen del punto, ambos o alguno de los límites laterales y el límite de una función en un punto. Esta investigación supone una profundización de otra más amplia sobre el significado del concepto de límite finito de una función en un punto, que manifiestan los estudiantes del primer curso de Bachillerato (Fernández-Plaza, 2011) y tiene el siguiente objetivo:

- Describir los modos en que los estudiantes de bachillerato asocian “pares” de enunciados simbólicos de una lista con distintas funciones dadas por su representación gráfica.

SIGNIFICADO DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO

Consideramos un modelo interpretativo que procede de la adaptación al ámbito de la matemática escolar de la relación semántica, lógica y formal, entre signo o representación, referencia o estructura conceptual y sentido o modo de uso. Este modelo, que puede consultarse en Rico (2012, pp. 51–53), considera las siguientes componentes para un concepto matemático escolar:

- Los *sistemas de representación*, definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente el concepto y lo relacionan con otros.
- La *estructura conceptual*, que comprende conceptos, definiciones y propiedades, los argumentos y proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad.
- Los *sentidos*, que incluye aquellos modos de uso, contextos, situaciones y problemas que están en el origen del concepto y lo dotan de carácter funcional.

Sistema de representación gráfico. Modelos gráficos del concepto de límite

El sistema de representación gráfico del concepto de límite de una función en un punto se sustenta en el establecido para el concepto analítico de función, con las siguientes características adaptadas para el nivel curricular de bachillerato:

- La gráfica de la función es continua en un entorno reducido del punto x_0, en el que se aborda el estudio del límite.
- El comportamiento de la función en x_0 se considera irrelevante, es decir, el cómo está definida en el punto, o si bien no lo está.
- El concepto de límite involucra un proceso dinámico para el cual el sistema de representación gráfico es limitado y usualmente necesita de otros signos externos complementarios, tales como señales y movimientos de dedo, flechas, software dinámico, etc. para dotarle de ese carácter dinámico.

La Figura 1 muestra diversos modelos gráficos de límite que se incluyen en libros de nivel universitario (Apostol, 1974). Entre estos modelos, el de oscilación se suele excluir por su excesiva complejidad para el nivel de Bachillerato, asumiendo la existencia de ambos límites laterales (finitos o infinito).

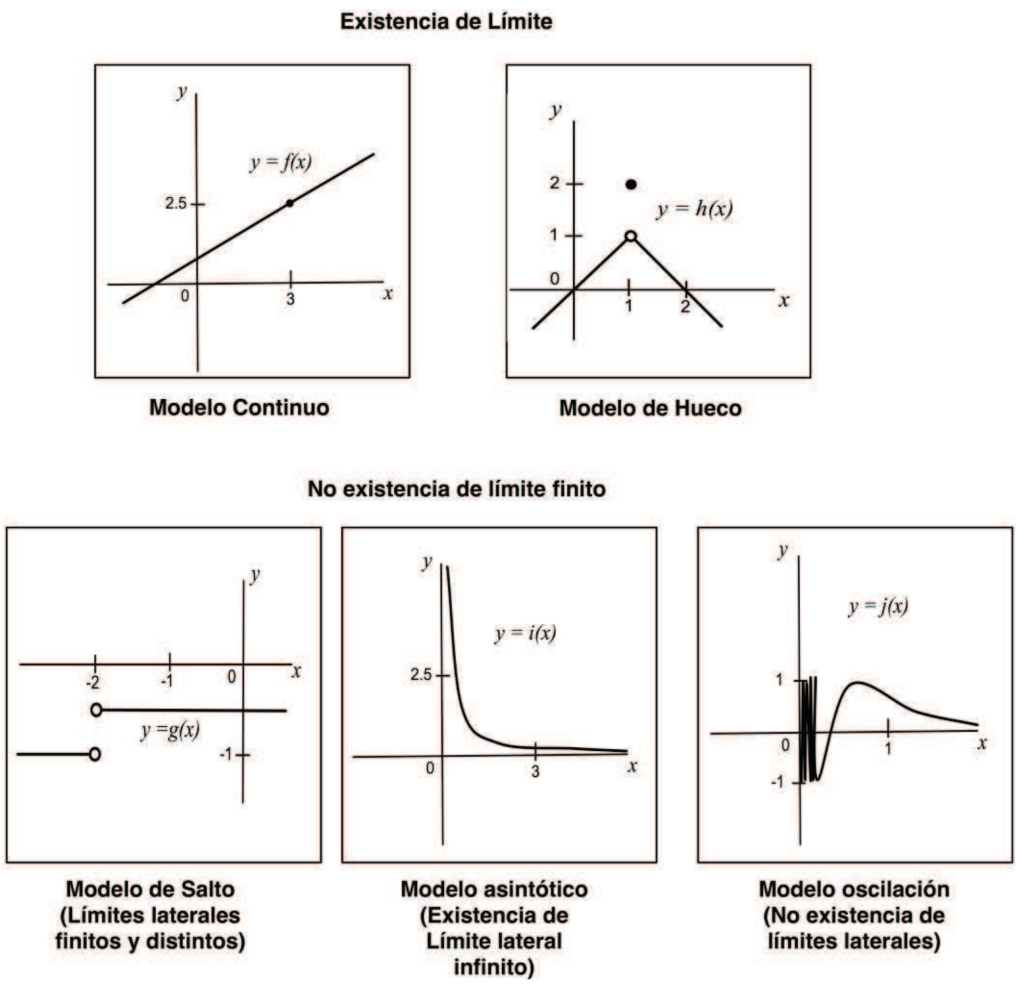


Figura 1. Diferentes modelos gráficos del concepto de límite

Sistema de representación simbólico

El sistema de representación simbólico de límite de una función $f(x)$ en un punto a, tiene la siguiente estructura:

$$\underset{x \to a^+}{lím} f(x) = \underset{x \to a^-}{lím} f(x) = \underset{x \to a}{lím} f(x)$$

El símbolo está formado por un operador *lím* que considera dos argumentos, una función *f(x)* y un punto a que es de acumulación del dominio de f, a los que le asocia un número real que es límite de la función $f(x)$ en el punto a. Para expresar los límites laterales por la derecha y por la izquierda, se emplean los signos + y - respectivamente como superíndices del símbolo a. La flecha es un convenio que expresa que la variable x tiende al punto a, pero no lo iguala.

En el estudio de la continuidad se añade a este sistema de representación la notación *f(a)* para discriminar los distintos tipos de discontinuidad.

El enunciado $f(1) \neq \underset{x \to 1}{lím} f(x)$ puede interpretarse de dos formas diferentes, lo cual supone una ambigüedad de significado del signo de desigualdad:

- *Algún miembro de la desigualdad no existe*. Si no existe el límite funcional el enunciado simbólico se puede leer "$f(1)$ no es límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1", "$f(1)$ no tiene la propiedad de ser límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1".

- *Ambos miembros de la desigualdad existen*, pero no denotan el mismo resultado. Si existe el límite funcional pero no es $f(1)$, el enunciado simbólico resultante tiene la siguiente interpretación "L es límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 y L es distinto de $f(1)$".

Para salvar dicha ambigüedad, algunas teorías del significado, por ejemplo, la de Strawson y Frege, citados por García (1997, pp.70-71) consideran imprescindible la *presuposición de existencia* de referencia para que cualquier afirmación acerca de ella tenga un valor de verdad, pero nosotros admitimos ambas interpretaciones pues los sujetos de este estudio pudieran ponerlas de manifiesto.

Ningún sistema de representación agota el concepto representado (Rico, 2009). En este caso, la representación gráfica y la simbólica son complementarias. El sistema de representación gráfico enfatiza aspectos topológicos de la tendencia, "entornos del límite se corresponden con entornos reducidos de x_0", con la limitación de que enfatiza otras propiedades no relevantes (monotonía). El sistema de representación simbólico abstrae relaciones de igualdad y desigualdad entre límites laterales, imagen de la función en un punto y límite de la función en un punto, organizando y discriminando diferentes modelos gráficos, siendo la limitación la opacidad sobre el dominio de validez de estas relaciones.

ANTECEDENTES

Gómez y Carulla (1998) señalan la necesidad de que los estudiantes analicen propiedades de los conceptos de forma gráfica sin que suponga una dificultad la interpretación y modificación desde el registro simbólico asociado, en definitiva, ponen de manifiesto una ruptura del equilibrio en la interacción entre ambos sistemas de representación.

Ward, Inzunsa, Hernández y López (2013) realizan una investigación con docentes de bachillerato informando varios errores en la manipulación simbólica de expresiones relacionadas con límite finito de una función en un punto y en la transformación de éstas en el sistema de representación gráfico.

En referencia al aprendizaje de los estudiantes de bachillerato, Elia y cols. (2009) obtienen entre otros resultados, que la gran mayoría son capaces de relacionar diferentes sentencias simbólicas y una gráfica dada, siendo menor el éxito en el procedimiento inverso, dadas las propiedades de una función simbólicamente proporcionar una gráfica que satisfaga simultáneamente tales propiedades.

Blázquez (2000) manifiesta en la puesta en marcha de una experiencia de investigación-acción sobre límite funcional, que los estudiantes incurrían en errores en ambos sistemas de representación tales como: La notación de límite lateral se asocia a números positivos, si es por la derecha, y a números negativos si es por la izquierda; insuficiente manejo de errores y cotas por abuso del registro simbólico; la visión global de las gráficas funcionales dificulta el análisis de propiedades locales; la interpretación gráfica no se vincula a relación entre variables (descoordinación).

CONTEXTO, PARTICIPANTES E INSTRUMENTO

Contexto y participantes

Esta investigación se realiza en el mismo contexto descrito en Fernández-Plaza, Castro, Rico y Ruiz-Hidalgo (2012). Se seleccionaron de manera intencional y por disponibilidad 36 estudiantes de un grupo de bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Estos estudiantes habían recibido instrucción previa por parte de su profesor sobre la aproximación numérica intuitiva y la interpretación gráfica del concepto de límite, salvo las técnicas específicas de cálculo. Como guía de ejercicios y referencia teórica, utilizamos el libro de texto *Matemáticas.1 Bachillerato* (Ciencias y Tecnología) (Vizmanos y col., 2008) y los apuntes propios del profesor.

Instrumento y aplicación

Se diseñó un cuestionario del cual describiremos una tarea en la que se combinan los sistemas de representación gráfico y simbólico denotados respectivamente por G y S. El enunciado de esta tarea es el siguiente:

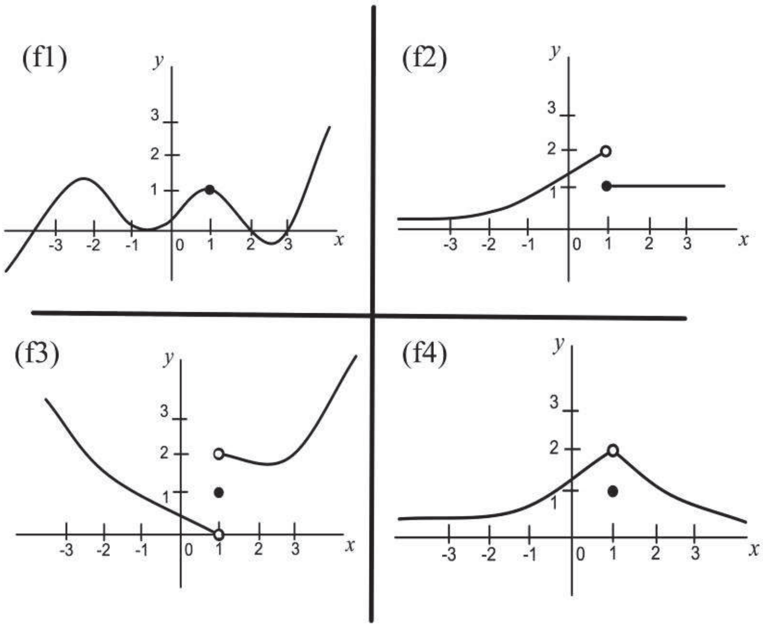
> (GS-S) Después de trabajar con funciones, un grupo de alumnos ha encontrado las siguientes siete características que cumplen algunas de ellas:

(a) $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

(d) $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ (e) $f(1) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ (f) $f(1) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

(g) $f(1) \neq \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

> Identifica dos propiedades que cumpla cada una de las siguientes funciones :



La codificación de esta tarea significa que al estudiante se le facilita información tanto gráficamente como simbólicamente (GS) y se le demandan dos enunciados simbólicos (S) relacionadas con la interpretación gráfica.

La actividad planteada moviliza en el estudiante la competencia de representar en su nivel más básico, reconocer y relacionar diversas representaciones de una misma función dada.

El siguiente diagrama (Figura 2) muestra las propiedades de cada una de las gráficas y las relaciones de implicación lógica entre ellas señaladas mediante flechas, permitiendo deducir cuáles de las propiedades son:

- *Exclusivas de una gráfica.* Las propiedades (a) y (d) son exclusivas de las gráficas f1 y f2 respectivamente.
- *Comunes a varias gráficas.* Las propiedad (b) es común a las gráficas f1 y f4, mientras que la propiedad (c) es común a las gráficas f2 y f3. Estas propiedades, no determinan la gráfica, pero sí establecen varios agrupamientos de las cuatro gráficas.

- *Mínimas.* Las propiedades que se sitúan en el nivel superior de la cadena de implicaciones se consideran mínimas para caracterizar una determinada gráfica. No se requiere que los sujetos apliquen este tipo de razonamiento.

La recogida de datos se llevó a cabo a mediados del curso académico 2010-2011. El cuestionario se aplicó durante una sesión ordinaria de trabajo en la clase de matemáticas. Se emplearon dos cuestionarios diferentes que pueden consultarse en (Fernández-Plaza, 2011) para lo cual se dividió aleatoriamente al grupo de clase en dos subgrupos de 18 estudiantes, Esta tarea fue realizada por uno de los subgrupos. Por otro lado, ambos grupos tenían la siguiente actividad común en sus cuestionarios.

> Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

Esta actividad funciona como ítem de control de los subgrupos, de manera que el desempeño de un grupo pueda considerarse representativo del otro.

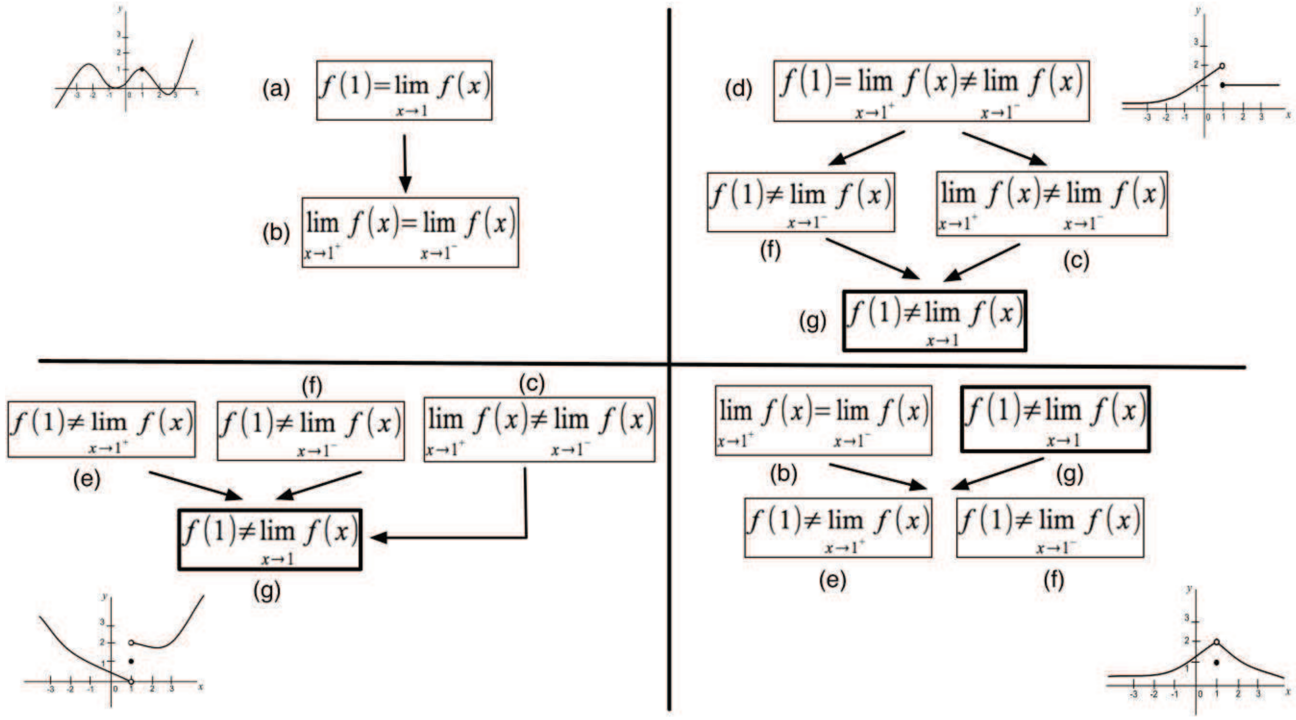


Figura 2. Diagrama de propiedades satisfechas por cada gráfica y relaciones de implicación existentes

Las propiedades que están al mismo nivel son independientes, es decir, no existe una relación de implicación entre ellas, pero su conjunción lógica implica otras propiedades. La propiedad resaltada en la Figura 2 tiene dos interpretaciones diferentes, lo cual pone de manifiesto la ambigüedad del signo de desigualdad antes mencionado.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Análisis general de los resultados derivados de la tarea (GS-S)

La Tabla 1 muestra las frecuencias absolutas de asignación de propiedades a cada gráfica. Dado que cada sujeto proporcionaba como máximo dos propiedades a cada gráfica, el recuento se realiza sobre 144 elementos.

En general, la mayoría de los estudiantes asignan propiedades adecuadas a las gráficas (valores mayores resaltados en la Tabla 1). Estos valores se pueden interpretar como posibles indicadores de qué propiedades resaltan más las gráficas. Es relevante que la sentencia simbólica con ambigüedad (g) se atribuye mayoritariamente a las gráficas f3 y f4, en cada una de las cuales adquiere un sentido diferente que hemos descrito anteriormente. De acuerdo al número de errores totales por cada gráfica, se observa que los modelos de salto (gráficas f2 y f3) y de hueco (gráfica f4) provocan ligeramente más respuestas erróneas que el modelo continuo (gráfica f1).

Tabla 1. Frecuencias de propiedades globales (izquierda) e incorrectas (derecha) asignadas a las gráficas

Propiedades	Gráficas				Total Global
	f1	f2	f3	f4	
(a)	**12**	2	2	1	17
(b)	**9**	3	5	**7**	24
(c)	1	**9**	**10**	4	24
(d)	1	4	2	4	11
(e)	1	3	1	3	8
(f)	1	**6**	3	2	12
(g)	1	3	**5**	**7**	16
Total/Gráfica	26	30	28	28	112
NS/NC	10	6	8	8	N=144

Propiedades	Gráficas				Total errores
	f1	f2	f3	f4	
(a)		2	2	1	5
(b)		3	5		8
(c)	1			4	5
(d)	1		2	4	7
(e)	1	3			4
(f)	1				1
(g)	1				1
Total/Gráfica	5	8	9	9	27

Análisis de pares de propiedades de las gráficas. Caso de la gráfica f3

Vamos a enfocar el análisis hacia el estudio de los pares de propiedades asociados a la gráfica f3, cuyas propiedades correspondientes son (c), (e), (f) y (g). La Tabla 2 muestra la variedad de elecciones de pares de propiedades, excluyendo aquellos casos en los que aparezca una única propiedad o respuestas en blanco.

Tabla 2. Pares de propiedades correspondientes a la gráfica f3

Pares de propiedades		Frecuencia
Adecuadas	{c, g}	5
	{c, f}	1
Erróneas no contradictorias	{d, f}	1
	{b, e}	1
	{a, b}	1
Erróneas contradictorias	{a, c}	1
	{b, d}	1
	{b, c}	1
		N=12

Se observa que de los 12 estudiantes que han proporcionado pares de propiedades, la mayoría han destacado adecuadamente la diferencia entre los límites laterales (c) y la desigualdad “ambigua” entre *f*(1) y el límite inexistente, habiendo un único sujeto que destaca la desigualdad “no ambigua” entre *f*(1) y el límite lateral izquierdo existente (f).

Los errores no contradictorios y contradictorios se distribuyen de la misma forma (3 de 12 en cada caso). Los errores no contradictorios surgen de atribuir a la gráfica f3 las propiedades (d), (b) y (a), que pueden dar lugar a las siguientes conjeturas.

- La propiedad (d) $f(1) = \underset{x\to 1^+}{lím} f(x) \neq \underset{x\to 1^-}{lím} f(x)$ podría enfatizar una asignación “necesaria” de la imagen del punto a alguno de los límites laterales.
- La propiedad (b) $\underset{x\to 1^+}{lím} f(x) = \underset{x\to 1^-}{lím} f(x)$ podría interpretarse como una descoordinación entre las variables independiente y dependiente con la asignación del límite x=1 a ambos límites laterales. Observando que todos los sujetos que han incurrido en este error han asignado (a)

$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$ a la gráfica continua f1, esta descoordinación es patente cuando se carece de "continuidad visual", o bien, está relacionada con una concepción geométrica (la recta x=1 enlaza los dos trozos laterales), al igual que el punto (1, f(1)) enlaza los dos tramos laterales de f1.

- La propiedad (a) $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$ se interpreta probablemente como una identificación clara del límite con la imagen, pero debida a la "continuidad simbólica".

Los errores contradictorios, entendidos como combinación de propiedades que nunca pueden ser ciertas simultáneamente se considerarán como indicadores de déficits en el razonamiento lógico o comprensión de los enunciados simbólicos, así como de la complejidad relativa de la gráfica. También pueden ser accidentales, entre los cuales podrían estar {b, c} o {b, d}. Es relevante el error {a, c}, porque en cierta forma desliga la igualdad de los límites laterales como condición necesaria y suficiente para la existencia de límite, atribuyendo su valor a la imagen de la función en el punto.

Conviene observar que la ambigüedad de sentido antes descrita está presente en los usos de la propiedad (g) $f(1)\neq \lim_{x\to 1} f(x)$ en condiciones de no existencia de límite (5 de 12). Tal contexto de no existencia de límite viene dado por el uso de la propiedad (c) $\lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$.

CONCLUSIONES

En referencia al objetivo planteado, de describir los modos en que los estudiantes identifican propiedades de las gráficas expresadas simbólicamente, se obtienen las siguientes conclusiones:

Globalmente, los estudiantes en general son capaces de proporcionar propiedades adecuadas de las gráficas propuestas, siendo las propiedades más destacadas en las gráficas las más familiares como la igualdad o desigualdad entre la imagen y el límite, la igualdad y desigualdad de los límites laterales según correspondan.

En referencia al caso particular dado por la gráfica f3, los estudiantes enfatizan adecuadamente la desigualdad entre los límites laterales y la imposibilidad de que $f(1)$ sea límite de la función en $x=1$, conjuntamente y separadamente combinadas con otras propiedades. Hacemos hincapié en el uso de la propiedad (g) sin presuposición de existencia de límite, que provoca la ambigüedad de significado del signo de desigualdad.

Finalmente, de la gráfica f3 en particular, emergen algunas concepciones erróneas, tales como la vinculación de la imagen con alguno de los límites laterales, aún siendo distintos; la atribución de la imagen como valor del límite; y la posible descoordinación entre las variables fijando como límite el valor de la abscisa en la que se lleva a cabo el estudio, siendo esta interpretación posiblemente geométrica como "enlace entre tramos discontinuos".

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto "Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación" (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I (MICINN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico). El trabajo es parte de la Tesis Doctoral *Desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes de bachillerato según un enfoque funcional. El caso de los conceptos de límite y continuidad de una función,* que realiza su primer autor en el Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, bajo la codirección de los otros tres autores.

Referencias

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T. & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of “limit” and the impact of the “didactic contract”. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(4), 765-790.

Fernández-Plaza, J.A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio Exploratorio*. Trabajo de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Fernández-Plaza, J.A., Castro, E., Rico, L., y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2012). Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 229- 237). Jaén: SEIEM

García, A. (1997). *Modos de significar. Una introducción temática a la filosofía del lenguaje*. Madrid: Tecnos.

Gómez, P. y Carulla, C. (1998). Calculadoras gráficas y precálculo: ¿el imperio de lo gráfico? En UCV, I. (Ed.), *Memorias - III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 710-715). Caracas: UCV.

Molfino, V. y Buendía, G. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *5*(1) 27-41.

OCDE (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012. Matemáticas, lectura y Ciencias*. Madrid: MEC. Recuperado el 18 de marzo de 2014 desde http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 39-63.

Sánchez-Compaña, M.T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: Fenómenos que organiza.* Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Vizmanos, J. R., Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas.1 Bachillerato (Ciencias y Tecnología)*. Madrid, España: Editorial SM.

Ward, E., Inzunsa, S., Hernández, S. y López, F. (2013). Conceptualización y uso de representaciones sobre el concepto de límite en docentes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 523-533). Bilbao: SEIEM.