CONOCIMIENTO MATEMÁTICO SOBRE CUADRILÁTEROS EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Mathematical knowledge of quadrilateral in prospective primary teachers

Ana Escudero-Domínguez[a], José Carrillo[b]
[a]Universidad de Sevilla, [b]Universidad de Huelva

Resumen

Se analiza el conocimiento matemático sobre cuadriláteros de los estudiantes de segundo curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Sevilla. Utilizamos el marco teórico del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), originando una serie de indicadores, que ponen en evidencia importantes deficiencias aunque también alguna fortaleza relativa a este conocimiento. Como debilidades destacamos el poder distractor de la imagen prototípica, la falta de comprensión de definiciones no estándares y la dificultad en el manejo de la clasificación inclusiva; como fortaleza podemos señalar el uso correcto de representación prototípica.

Palabras clave: *cuadriláteros, formación inicial del profesorado, Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, fortaleza, debilidad*

Abstract

The mathematical knowledge of quadrilateral in initial training of teachers at the University of Seville is analyzed. We have used the theoretical framework of the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK), yielding a series of indicators that highlight important strengths but also some weaknesses relating to this knowledge. We can point out weaknesses such as the power of distraction that the use of prototypical images has got, a weak understanding of non-standard definitions, and difficulty in using inclusive classifications; as strength we can highlight the correct use of prototypical representation.

Keywords: *quadrilateral, initial training of teachers, Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, strength, weakness*

INTRODUCCIÓN

Son muchos los autores (Gutiérrez y Jaime, 1996; Contreras y Blanco, 2001; Climent, 2011; entre otros) que aseguran que el conocimiento que poseen los estudiantes para maestros (en adelante EPM) está muy lejos de poder calificarse de idóneo o adecuado para el desempeño de su futura labor docente. Este resultado es importante para la formación inicial pues la falta de conocimientos les genera inseguridad, predisponiéndolos negativamente ante el cuestionamiento de los fines educativos de algunos bloques de contenidos.

La presente investigación está centrada en geometría, debido al interés de sus autores por, partiendo de sus resultados, diseñar acciones formativas con el propósito de enfrentar las lagunas de conocimiento, al tiempo que revertir la imagen que los estudiantes asocian al estudio de la geometría, el cual ven como un proceso memorístico donde las situaciones se resuelven empleando conceptos y procedimientos que ha explicado el profesor o que están en el libro de texto. Somos conscientes de que parte de la explicación de esta situación procede de la escasa importancia que suele concederse a los contenidos geométricos en los niveles previos a la universidad, dedicándoles poco tiempo e impartiéndolos al final de curso (Corrales, Sanduay, Rodríguez, Malik y Poblete, 2001).

Escudero-Domínguez, A., Carrillo, J. (2014). Conocimiento matemático sobre cuadriláteros en estudiantes para maestro. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 267-276). Salamanca: SEIEM.

Esta comunicación es parte de una investigación más amplia donde nos planteamos indagar en diversos elementos de conocimiento que sobre geometría plana tienen los EPM, centrándonos aquí en cuadriláteros. Planteándonos el siguiente objetivo: profundizar sobre los conocimientos que los EPM poseen sobre cuadriláteros. Desgranándose en los siguientes objetivos específicos:

- Describir el conocimiento de los temas sobre cuadriláteros, puesto en juego por futuros maestros, al resolver ejercicios relativos a ese contenido matemático
- Obtener características del conocimiento que poseen los EPM
- Obtener una clasificación sobre debilidades y fortalezas sobre cuadriláteros

MARCO TEÓRICO

Numerosos estudios han investigado sobre el conocimiento profesional con la finalidad de analizar el contenido de este conocimiento que necesita un profesor y que difiere del que requiere otro profesional o del necesario para la vida cotidiana.

La reflexión sobre el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008), y la constatación de algunos problemas como la delimitación de sus subdominios, o la asignación de elementos de conocimiento en determinados casos, conduce al grupo SIDM de la Universidad de Huelva a proponer un nuevo modelo llamado Conocimiento especializado de los profesores de Matemáticas (MTSK), basado en la idea de que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas deriva de su profesión y no se circunscribe a un único subdominio del conocimiento matemático (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013a). También se diferencia del MKT por la inclusión de las concepciones y creencias sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje como dimensión que penetra todo el conocimiento del profesor. Mantiene, al igual que el MKT, los dos grandes dominios de Shulman, dividiendo éstos en tres subdominios cada uno. A continuación, pasamos a describirlos, prestando mayor atención al conocimiento de los temas, ya que va a ser el subdominio en el que centramos esta comunicación, aunque se incluirán también algunos resultados relativos al conocimiento de la práctica de la matemática.

Dentro del Conocimiento Matemático:

- *Conocimiento de los temas (KoT)* es más que el conocimiento de la matemática como disciplina; la matemática escolar también está incluida en este subdominio, así como lo relativo a su fundamentación teórica, y los procedimientos, estándar y alternativos, o las distintas formas de representación (Carrillo, Contreras y Flores, 2013b: p. 196).
- *Conocimiento de la estructura matemática*: constituido por los conocimientos que permiten al profesor establecer conexiones entre las matemáticas elementales y las avanzadas.
- *Conocimiento de la práctica de la matemática (KPM)*: está compuesto por todas aquellas formas de hacer y proceder en matemáticas que un profesor ha de conocer para desarrollar su clase, como son las diferentes formas de demostrar, el significado de definición, axioma o teorema como elementos constituyentes de la matemática, o el conocimiento de la sintaxis matemática (Carrillo *et al*., 2013b: p. 196).

Referidos al Conocimiento Didáctico del Contenido:

- *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje en Matemática*s: constituido por todos aquellos referentes que indican en qué momento debe aprenderse cada contenido y a qué nivel de profundidad (Carrillo *et al*., 2013b).

- *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas: incluye co*nocer distintas estrategias que permitan al profesor impulsar el desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales.
- *Conocimiento de las características del aprendizaje matemático: c*ontiene el conocimiento de las dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de un concepto, así como el conocimiento de la forma en que los alu*m*nos aprenden un cierto contenido.

Por un lado, el MTSK nos permite operativizar una propuesta de conocimiento deseable (sobre cuadriláteros en este caso), que se manifiesta en las preguntas planteadas a los EPM. Por otro lado, los indicadores emergentes podrán ubicarse en sus subdominios (particularmente en nuestra investigación en el KoT y parte del KPM) y mejorar nuestra comprensión de dichos subdominios.

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

El presente estudio se ubica dentro del paradigma interpretativo, ya que busca describir y comprender situaciones particulares sin la finalidad de generalizar las mismas (Latorre, del Rincón y Arnal, 1997).

Consideramos pertinente una investigación de carácter mixto (Castro y Godino, 2011), donde tener una primera aproximación, más general, de carácter cuantitativo, para luego, mediante el estudio cualitativo, comprender, descubrir e interpretar la realidad de nuestros EPM.

La parte cualitativa de esta investigación es un estudio de casos instrumental (Stake, 2005), ya que se trascienden los resultados de los participantes para lograr una mejor comprensión del conocimiento respecto a los cuadriláteros.

En el estudio han participado 51 estudiantes de segundo curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Sevilla, que han cursado anteriormente otra asignatura de matemáticas, Matemáticas Específicas para Maestros, de nueve créditos, centrada en el contenido matemático: sentido numérico, sentido algebraico, sentido geométrico y sentido estadístico y probabilístico. De geometría han trabajado proporcionalidad geométrica, cuerpos en el espacio y construcción de polígonos, donde se encuentra el estudio de los cuadriláteros, incluyendo propiedades, definiciones, clasificaciones y transformaciones geométricas.

Para extraer información sobre el conocimiento matemático para la enseñanza de los estudiantes, utilizamos como instrumentos de primer orden un cuestionario administrado a todos los informantes, y en segundo lugar, entrevistas realizadas a 12 EPM, de las cuales se han realizado 5 entrevistas semiestructuradas individuales y 3 grupales; dos de ellas con 2 estudiantes y la otra con 3. Las entrevistas grupales se propusieron de modo que garantizara una suficiente heterogeneidad discursiva (fundamentalmente pluralidad de opiniones, actitudes y juicios), enriqueciendo las respuestas que nos ofrecen las individuales. Las entrevistas se realizaron una vez analizados los cuestionarios, con el objetivo de que los informantes respondieran de forma amplia las cuestiones planteadas.

Para elaborar el cuestionario nos basamos en Liñán (2012) y Álvarez (2012). El cuestionario tiene dos partes diferenciadas: una perteneciente a Liñán (2012) de preguntas con respuesta cerrada (1 a 4), donde cada pregunta consta de 4 respuestas posibles, de la que una sola es correcta y, dentro de las otras tres, se ha colocado una que consideramos que es más probable que elijan (respuesta esperada) cuando el conocimiento asociado es incorrecto; otra perteneciente a Álvarez (2012), compuesta por actividades de respuesta abierta (5 y 6) para que los informantes respondan libremente.

Tabla 1. Preguntas de respuesta cerrada

1. Considerando las siguientes figuras

¿Cuál o cuáles de ellas son rombos?

a) Solo la figura número 2 es un rombo
b) Las figuras números 2 y 4 son rombos
c) Las figuras números 2, 3 y 4 son rombos
d) Solo la figura número 1 es un rombo

2. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un romboide?

a) Dos, que coinciden con sus diagonales
b) Cuatro, sus dos diagonales y las rectas que cortan a los lados opuestos por sus puntos medios
c) No tiene ningún eje de simetría
d) Dos, las rectas que cortan a los lados opuestos por sus puntos medios

3. ¿Cuáles de las siguientes definiciones describen únicamente a un cuadrado?

a) Un paralelogramo con dos diagonales iguales
b) Un cuadrilátero cuyas diagonales son bisectrices de sus ángulos
c) Un cuadrilátero con cuatro ángulos iguales
d)Un paralelogramo con dos diagonales iguales y perpendiculares

4. ¿Cuáles de los siguientes ejemplos son definiciones correctas de cuadrado?

a) Un paralelogramo de lados iguales
b) Son dos líneas horizontales perpendiculares a otras dos verticales
c) Es un rombo con un ángulo de 90º
d) Una figura de ángulos iguales

Tabla 2. Preguntas de respuesta abierta

5. Dibuja al menos ocho cuadriláteros y numéralos.
a) Considera las parejas de figuras formadas por la 1 y 5, y la 2 y 7, compara las figuras de cada pareja dando tres semejanzas y tres diferencias.
b) Considera todos los cuadriláteros.
b.1) Traza sus diagonales y haz cuatro clasificaciones distintas considerando criterios sobre las diagonales. Indica los grupos que obtienes en cada clasificación.
b.2) Considera uno de los criterios anteriores e intenta formar subgrupos dentro de los grupos obtenidos considerando otro criterio.

6. Indica si es verdadero o falso, explicando por qué (puedes poner ejemplos y si es posible demostrar de modo general). En el caso de que sea falso, formúlala de forma que sea verdadero.
a) Se puede considerar que un rombo es un cuadrado.
b) Para que un cuadrilátero tenga diagonales exteriores es necesario que al menos unos de sus ángulos sea mayor de 180º.

Las preguntas 1 y 6a buscan obtener información sobre el conocimiento acerca de la clasificación de cuadriláteros: caracterización de rombo (pregunta 1) y relación entre rombo y cuadrado (pregunta 6a). También la pregunta 5 aborda el conocimiento sobre la clasificación, en este caso solicitando la comparación entre dos figuras con características comunes y no comunes, para su posterior clasificación, con un criterio o varios simultáneamente. Además esta pregunta pretende conocer la imagen conceptual (Tall y Vinner, 1981) que los EPM poseen sobre distintos cuadriláteros ya que se les pide que representen varios. Las preguntas 2 y 6b buscan profundizar sobre la imagen y definición de eje de simetría y de diagonal exterior respectivamente. Ligados a las definiciones encontramos las preguntas 3 y 4, que abordan el conocimiento de la diferencia entre condiciones necesarias y suficientes para la definición de las figuras, concretamente trabajando definiciones no estándares del cuadrado.

RESULTADOS

Con las respuestas del cuestionario hemos realizado un análisis general mediante un estudio estadístico, además de un posterior análisis pormenorizado.

Resultados globales

Para mayor claridad de los resultados, este estudio es presentado mediante diagramas de distribución de errores versus aciertos. Mostramos el gráfico 1 que manifiesta la distribución de errores (respuesta esperada más las otras dos respuestas erróneas) *versus* el acierto, donde podemos comprobar que tres de las preguntas mantienen un porcentaje de fallos superior al de aciertos, lo que nos lleva a pensar que los conceptos candidatos a ser debilidades pueden estar en los contenidos relacionados con estas preguntas.

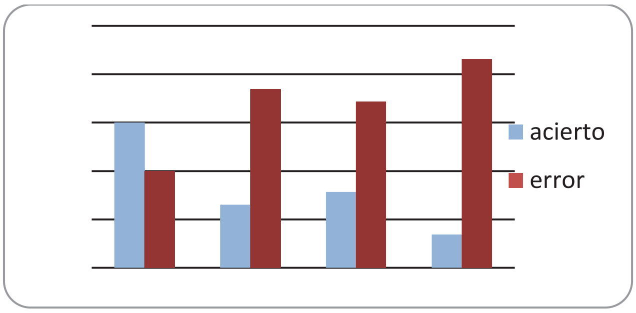

Gráfico 1. Error *versus* acierto. Preguntas 1, 2, 3 y 4

Seguidamente mostramos el gráfico 2 donde podemos comprobar que el apartado a mantiene un porcentaje de aciertos superior al de error, pensando que los conceptos aspirantes a ser fortalezas pueden residir en ese tema; y el otro apartado posee un porcentaje de error superior, lo que nos lleva a pensar que ese contenido será candidato a ser debilidad.

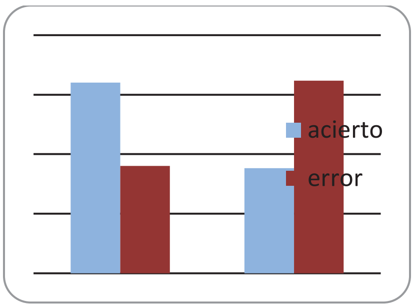

Gráfico 2. Error *versus* acierto. Pregunta 6

Resultados pormenorizados

Pasamos a analizar las respuestas de nuestros EPM para profundizar sobre el conocimiento que poseen sobre cada una de las preguntas del cuestionario. Organizamos estos resultados en función de lo que hemos llamado indicadores, que pueden ubicarse en el subdominio del conocimiento de los temas del MTSK (aunque incluiremos, como se ha anunciado, comentarios sobre el conocimiento de la práctica de la matemática).

Imagen prototípica

En cuanto a los resultados de la pregunta 1 observamos que algunos de los EPM analizados reconocen los distintos cuadriláteros mediante dibujos y se percatan de la existencia de figuras iguales a las que se les ha aplicado una traslación y/o giro, por lo que la posición de las figuras no influye en su caracterización. Otros, en cambio, no reconocen los distintos cuadriláteros, ya que algunas de las figuras representadas no se encuentran en la posición convencional en la que solemos encontrarlas, poniendo de relieve el poder distractor de los prototipos (Hershkowitz, 1990).

Lo anterior queda reflejado en la siguiente entrevista grupal:

I: EPM 7, ¿por qué marcaste la a? (ver tabla 1. Pregunta 1)

EPM 7: Puse la a porque, la verdad, es que es la que reconocía como figura de rombo. No me sonaba que un cuadrado pudiera ser un rombo y éstas [refiriéndose a figura 1 y 3] las veía más como romboides.

EPM 5: Pues yo creo que la figura 3 es un rombo, no romboide. Y la 2, para mí, es un cuadrado igual que la 4.

La pregunta 5 proponía a los estudiantes que dibujaran al menos 8 cuadriláteros. El considerar un número de cuadriláteros bastante alto nos ha mostrado las dificultades que poseen los EPM para representar más de cinco o seis cuadriláteros sin repetir alguno de ellos.

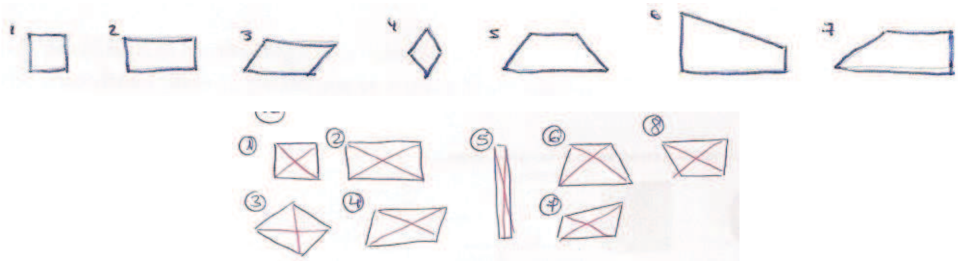

Figura 1. Respuesta a la pregunta 5 de varios EPM

También podemos contemplar que las representaciones nos muestran una imagen prototípica de cada una de las figuras, además de estar representadas en la posición convencional en la que suelen aparecer en los libros de texto. Mediante estas representaciones, corroboramos la investigación de Gutiérrez y Jaime (1996) en la que expresan que la imagen mental de cuadrilátero que tienen los EPM incluye la propiedad de ser convexo, por tanto, consideramos debilidad el poder distractor que nos ofrecen las imágenes prototípicas de las figuras.

Ligado a esto encontramos la pregunta 6b, que posee un porcentaje de error superior al de acierto, ya que muchos EPM poseen serias dificultades para poder representar un cuadrilátero cóncavo, debido a que poseen la imagen prototípica de cuadrilátero convexo, llevando consigo que la imagen prototípica de diagonal sea la de diagonal interior. Por tanto una debilidad patente es la de conocer la existencia de cuadriláteros cóncavos y que éstos poseen diagonales exteriores.

Definición

Dentro de este indicador tenemos que distinguir entre definiciones estándares y definiciones no estándares. Con respecto a las definiciones estándares, los resultados obtenidos nos indican que este indicador forma parte de lo que podemos considerar como fortaleza en el KoT, ya que vemos reflejado en las entrevistas realizadas sobre la pregunta 2 como la mayoría de los EPM usa de forma correcta la representación prototípica de eje de simetría. A continuación, se presenta un ejemplo que da muestra de lo anterior:

I: Y, ¿Qué es un eje de simetría?

EPM 2: Es ese espejo que lo parte y divide a la figura en figuras iguales

Tenemos que resaltar que, aunque caractericen correctamente eje de simetría, los EPM no usan adecuadamente las propiedades de simetría, en sintonía con el hecho de que *"saberse de memoria la definición de un concepto no garantiza en absoluto comprender su significado"* (Azcárate, 1997: p. 29), tendiendo a identificar la mitad de una figura como la mitad simétrica de ésta (Climent, 2011), confundiendo así las diagonales con los ejes de simetría en los cuadriláteros, siendo pocos EPM los que afirman que el romboide no tiene ningún eje de simetría.

Con respecto a las definiciones no estándares, trabajadas en las preguntas 3 y 4, hemos encontrado un porcentaje de error bastante superior al de aciertos, esto es debido a que en ambas se han presentado varias opciones con condiciones necesarias pero no suficientes para definir un cuadrado, algo que no han tenido en cuenta los EPM, ya que se han fijado en aquellas que contenían parte de la definición que están familiarizados a proporcionar, lo que nos lleva a pensar que suelen tener una definición convencional y estereotipada para cada figura. Esto nos revela que no están habituados a realizar diferentes definiciones de las figuras, centrándose en otras de sus características críticas que no sean lados y ángulos, o bien, utilizando los nombres de otras figuras más generales añadiéndoles alguna característica que la particulariza (Zazkis y Leikin, 2008) y que poseen dificultad en diferenciar necesidad y suficiencia de las condiciones de una definición (elemento propio del subdominio del conocimiento de la práctica matemática KPM).

A continuación se presenta un ejemplo extraído de la entrevista a EPM 6:

I: ¿Por qué has marcado la c? (ver tabla 1. Pregunta 3)

EPM 6: A mí siempre me han dicho que el cuadrado tiene los ángulos iguales y los lados iguales. Por eso, me he basado en esa definición.

Clasificación

Los resultados de las preguntas que informan sobre la clasificación inclusiva (preguntas 1, 5 y 6a) lo señalan como una debilidad en KoT de los EPM.

En cuanto a la pregunta 1 aunque posee un porcentaje de acierto mayor al de error no podemos considerar que justifique el dominio de la clasificación inclusiva. De hecho, al entrevistar a los EPM, pudimos entender el porqué de ese porcentaje, la mayoría la había marcado porque era la única en la que aparecía la figura que para ellos era realmente un rombo. Así, consideramos ausencia de conocimiento el afirmar que todo cuadrado se puede considerar rombo.

Ejemplo de lo anterior en la entrevista a uno de los EPM:

I: Explícame por qué has marcado la c (ver tabla 1. Pregunta 1)

EPM 5: A ver, la que sería más que nada un rombo sería la 3, pero como no me daba la opción de poner la 3 sólo, y donde sólo aparece la 3 es en la respuesta c, por eso lo puse, porque claro los demás no, éste y éste no son rombos, son cuadrados.

El conocer características que deben cumplir las figuras para ser rombo es otra debilidad, confirmando que los EPM no tienen adquiridas las características críticas de los diferentes cuadriláteros presentados.

Podemos reforzar lo anterior mediante la pregunta 6a, en la que aún encontrando un índice de acierto superior al de error, hemos podido constatar que esto no es debido a que dominen la clasificación inclusiva sino más bien a como está planteada la pregunta, ya que proponiéndola al revés, la mayoría también la consideró falsa.

Ejemplo de lo anterior en la entrevista a uno de los EPM:

I: ¿Se puede considerar que un rombo es un cuadrado?

EPM 2: No siempre. Será un cuadrado cuando tenga ángulos iguales.

I: ¿Se puede considerar que un cuadrado es un rombo?

EPM 2: También falso, [dibuja en papel un cuadrado] es que si esto fuera un rombo no existiría ninguna diferencia entre un rombo y un cuadrado.

La pregunta 5 también trabaja las clasificaciones, quedando patente que los EPM no están habituados a usar la clasificación inclusiva. En el primer apartado observamos que los criterios utilizados por la mayoría de los estudiantes son lados, ángulos, simetría y/o tamaño.

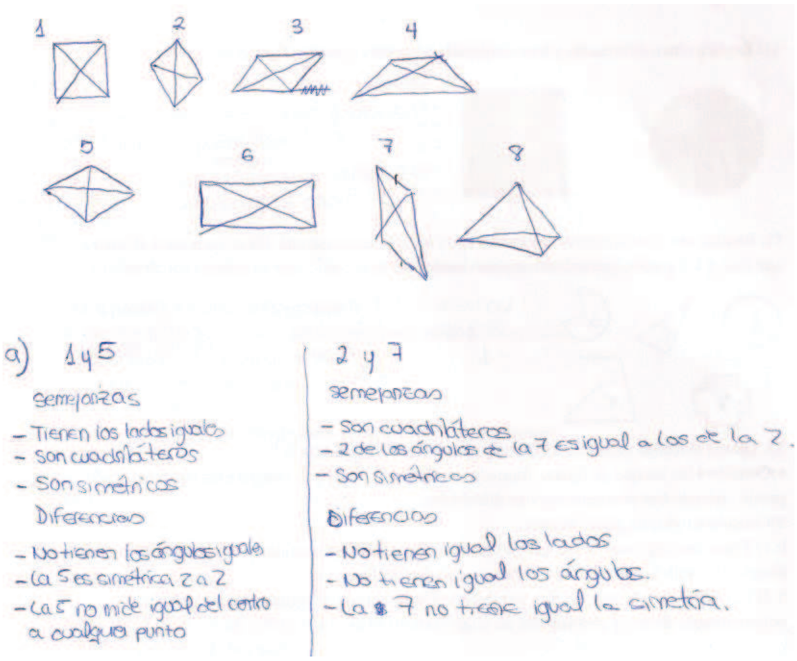

Figura 2. Respuesta a la pregunta 5 de EPM 6 (apartado a)

El segundo apartado les obliga a utilizar otro de los elementos (diagonal) para clasificar con criterios relacionados con éstas, dando lugar a clasificaciones no estándar. Observamos así que los EPM son capaces de clasificar con un criterio, siendo éstos simples y elementales, y no siempre utilizados de forma correcta (ver B1 en EPM6, figura 3), probablemente porque es una propiedad que no están acostumbrados a usar. En la segunda parte del ejercicio contemplamos que la mayoría de los estudiantes entrevistados no consiguen clasificar compatibilizando varios criterios, siendo ésta una debilidad.

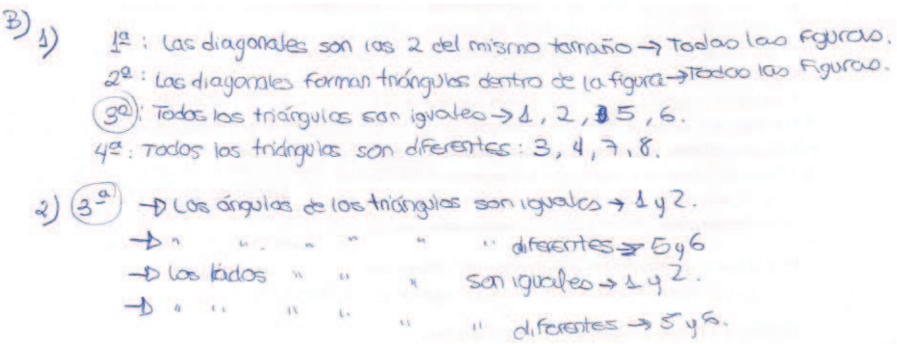

Figura 3. Respuesta a la pregunta 5 de EPM 6 (apartado b)

CONCLUSIONES

En primer lugar, mostramos una síntesis de los resultados obtenidos, donde debemos indicar que el marco elegido nos ha ayudado a describir el conocimiento que los EPM poseen sobre el conocimiento geométrico, pudiendo corroborar que éste es escaso. Este desconocimiento, no sólo de conceptos sino de relaciones inclusivas entre diferentes figuras geométricas, es muy preocupante debido a su futura profesión. Blanco y Barrantes (2003) reconocen que esta falta de conocimiento les generará inseguridad en la materia y por tanto, una menor dedicación temporal, además de producir una enseñanza poco eficaz (con mayor dependencia en el libro de texto y aumentando la memorización).

El carácter mixto de nuestra investigación permite la matización de los resultados globales en otros pormenorizados. Es de destacar que no sólo hemos detectado debilidades, sino también alguna fortaleza, que pasamos brevemente a describir.

Dicha fortaleza reside en que son capaces de asociar una representación prototípica a una definición, caracterización o nombre. Pensamos que ésta es insuficiente para futuros maestros, pero el hecho es que es muestra de un conocimiento.

Con respecto a las principales deficiencias podemos decir que recaen en la falta de comprensión de los conceptos geométricos. Son capaces de recitar correctamente una definición pero no saben aplicarla, evidenciándose la falta de relación entre distintos aspectos en el proceso de adquisición de un concepto. Esto es debido a que la apariencia de las figuras y de lo que se percibe a través de una representación gráfica *"predomina sobre los conceptos que los EPM tienen de los objetos geométricos"* (Carreño y Climent, 2009: p. 193), lo que nos hace tomar conciencia de que no se evidencia la capacidad de razonamiento, sino más bien se observa una postura apoyada en lo que *parece ser*.

La imagen prototípica de una figura provoca que muchos de los EPM proporcionen características incorrectas de las figuras, no llegando a distinguir las características críticas de las no críticas. Esto puede ser debido a la utilización constante de figuras estereotipadas (con frecuencia siempre en la misma posición).

Además, encontramos que no distinguen entre propiedades necesarias y suficientes, lo que produce que los EPM formulen definiciones que posean características redundantes y/o definiciones en las que, inconscientemente, incluyen a otras figuras. Tampoco asumen que una misma figura geométrica pueda poseer definiciones diferentes, en la que se recurra a otras propiedades que no sean las convencionales. Esto puede deberse a que en la escuela no se fomenta la realización de diferentes definiciones, sino la memorización de las definiciones estándar, favoreciendo una visión estática de la geometría (Vecino, 2003).

Por último, existen problemas en el manejo de las clasificaciones, ya que los libros de texto promueven una geometría intrafigural (favoreciendo las clasificaciones disjuntas), lo que produce que los estudiantes posean problemas para relacionar distintas figuras geométricas (Contreras y Blanco, 2001), sobre todo al tener que clasificar compatibilizando criterios.

Referencias

Álvarez, I. (2012). *Desarrollo profesional de maestros noveles en torno a la enseñanza de la clasificación de figuras geométricas. Una experiencia en entornos colaborativos*. Trabajo Fin de Máster no publicado. Universidad de Huelva.

Azcárate, C. (1997). "Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo?". Suma. *Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 25*, 23-30.

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 399-406.

Blanco, L. J. y Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. *RELIME, 6*(2), 107-132.

Carreño, E. y Climent, N. (2009). Polígonos: conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor de matemáticas. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 187-196). Santander: SEIEM.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: Middle East Technical University, Ankara.

Carrillo, J., Contreras, L.C. y Flores, P. (2013b). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada, España: Comares.

Castro, W. F. y Godino, J. D. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 99-116). Ciudad Real: SEIEM.

Climent, N. (2011). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. *Huelva*. Proyecto Docente y de Investigación no publicado. Universidad de Huelva.

Contreras, L.C., y Blanco, L.J. (2001). ¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. XXI, *Revista de Educación, 3*, 211-220.

Corrales, J., M. Sanduay, G. Rodríguez, C. Malik y A. Poblete (2001). ¿Es posible dotar de alguna dinámica a los conceptos de geometría y a las propiedades de las figuras en el aula?, *Revista Números, 48*, 13–24.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1996) Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En Giménez, J., Llinares, S. y Sánchez, V. (Eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 140-170). Granada: Publicaciones de la Universidad de Granada.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.) (1990). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge UP.

Latorre, A., del Rincón, D., y, Arnal, J. (1997). Bases Metodológicas de la Investigación Educativa. Barcelona: Hurtado.

Liñán, M. M. (2012). *Debilidades y fortalezas en el conocimiento matemático común en geometría de los estudiantes para maestros*. Trabajo Fin de Máster no publicado. Universidad de Huelva.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research. Third edition* (443-466). Thousand Oaks: Sage Publications.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 1*2, 151-169.

Vecino, F. (2003). Didáctica de la geometría en la educación primaria. En M.C. Chamorro (Coord.). *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 301-328). Madrid: Pearson-Prentice Hall.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69* (2), 131-148.