JUSTIFICACIÓN DE LAS REGLAS DE DERIVACIÓN EN LIBROS DE TEXTO DE CUATRO EDITORIALES DESDE LGE HASTA LOE

Justification of derivative rules on textbooks of four publishers since the LGE until the LOE

Laura Conejo, Matías Arce, Tomás Ortega

Universidad de Valladolid

Resumen

En el presente trabajo se muestra un estudio descriptivo del tratamiento justificativo de las reglas y técnicas de derivación en los libros de texto de 3º de BUP, COU correspondientes a la LGE, y 1º y 2º de Bachillerato de LOGSE y LOE. En primer lugar presentamos una adaptación del marco teórico que hemos desarrollado para el estudio de los esquemas de prueba presentes en los libros de texto al objeto de estudio de este trabajo, las reglas y técnicas de derivación. A continuación se muestra el análisis realizado, indicando las peculiaridades encontradas en el estudio. Por último, se consideran algunas reflexiones sobre las implicaciones que la diversidad de presentación y tratamiento de estas reglas puede tener en la enseñanza, por un lado del concepto de derivada y, por otro lado, de la demostración.

Palabras clave: *reglas de derivación, esquemas de prueba, libros de texto, demostración matemática.*

Abstract

In this paper, we show a descriptive study of the procedures used to justify derivative rules and techniques shown in textbooks of 3rd course of BUP and COU of LGE, and 1st and 2nd course of Bachillerato of LOGSE and LOE. Firstly, we show an adaptation of the theoretical framework about proof schemes in textbooks to the topic studied in this paper, derivative rules and techniques. Then, we show the analysis done, noting the most singular features of the study. Finally, we consider some reflections on the implications that different presentations and treatment of these rules may have on teaching the concept of derivative and of mathematical proof.

Keywords: *derivative rules, proof schemes, textbooks, mathematical proof.*

INTRODUCCIÓN

La demostración matemática (DM) es considerada, desde el punto de vista matemático, uno de los procedimientos más importantes de las matemáticas, su motor de desarrollo. En el campo de la educación matemática, Hanna (1995) defiende que contribuye a la comprensión de los conceptos matemáticos. Además, la DM es portadora de los conocimientos matemáticos, ya que contiene los métodos, herramientas, estrategias y conceptos que se necesitan para resolver problemas, y éstos elementos suponen la esencia principal de las matemáticas (Hanna y Barbeau, 2010). Entendiendo que es un elemento de las matemáticas de vital importancia, nos interesa conocer cómo se realiza su enseñanza en la educación preuniversitaria, y un elemento importante en los procesos de enseñanza-aprendizaje en este nivel es el libro de texto (LT). Entendemos como *libro de texto* aquellos que utilizan los profesores y alumnos, a lo largo de un curso escolar, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un área de conocimiento (González, 2002). Schubring (1987) señala que, en la práctica, los libros de texto determinan la enseñanza de un país más que los decretos de los distintos gobiernos, ya que considera que tienen mayor influencia en la práctica educativa que los currículos

Conejo, L., Arce, M., Ortega, T. (2014). Justificación de las reglas de derivación en libros de texto de cuatro editoriales desde LGE hasta LOE. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 257-266). Salamanca: SEIEM.

educativos promulgados por las órdenes ministeriales. Además, su análisis nos proporciona información acerca del conocimiento matemático que una sociedad considera pertinente en un determinado momento histórico (González, 2002), ya que influyen en qué y en cómo deben aprender los alumnos (García-Rodeja, 1997).

Aunque el concepto de derivada es uno de los conceptos más complejos del Análisis Matemático que se introduce en la Educación Secundaria y, por tanto, entraña una gran dificultad para su comprensión, el cálculo de funciones derivadas se ha mecanizado hasta tal punto que se prescinde de la definición y, aunque los alumnos son capaces de aplicar bien las reglas de derivación, no han llegado a una comprensión satisfactoria del concepto de derivada (Artigue, 1995; Ortega y Sierra, 1998). Nosotros, además, apuntamos que la mecanización de dichas reglas de cálculo, prescindiendo de su justificación, puede contribuir a la no comprensión del concepto.

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que estudia la evolución de la demostración en los libros de texto de las últimas tres leyes españolas. El estudio descriptivo que aquí se presenta gira en torno a un aspecto de uno de los conceptos señalados anteriormente, el cálculo de derivadas (reglas y técnicas de derivación, derivadas de funciones elementales o familias de funciones). Mostramos un análisis de las reglas presentadas, si se justifican o no, un resumen de los esquemas de prueba utilizados y algunas reflexiones iniciales sobre las implicaciones para la enseñanza que se deducen del análisis realizado.

ANTECEDENTES SOBRE EL APRENDIZAJE DE LA DERIVDA

El concepto de derivada es uno de los conceptos matemáticos más complejos que se estudian en Educación Secundaria, y suele conllevar numerosas dificultades para la enseñanza y el aprendizaje, como apuntan los numerosos estudios realizados en torno a este concepto. Ortega y Sierra (1998) describen algunos de los *organizadores curriculares* (Rico, 1997) del concepto de derivada; Inglada y Font (2003) se plantean el objetivo de identificar, describir y explicar los significados institucionales y personales de derivada; Font (2005) realiza una revisión de varias investigaciones sobre la didáctica de la derivada que utilizan la teoría del Enfoque Ontosemiótico (EOS), en las que se menciona el cálculo de derivadas; Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) también realizan una revisión de diferentes trabajos aunque en este caso están orientados hacia la comprensión del concepto de derivada; Robles, Del Castillo y Font (2010) diseñan, implementan y valoran una secuencia de actividades didácticas que promueve la construcción de un significado en torno a la función derivada y lo analizan con los criterios de idoneidad del EOS. Otros trabajos se centran en el conocimiento de los profesores sobre la comprensión de la derivada por parte de los alumnos, por ejemplo, los trabajos de Pino-Fan, Godino, Castro y Font (2012) y Sánchez-Matamoros, Fernández, Llinares y Valls (2013), o en el propio conocimiento del profesor sobre el concepto de derivada, como el de Badillo, Azcárate y Font (2011). Sí que hemos encontrado algún trabajo en el que se estudian ya no el concepto, sino el cálculo de derivadas, como por ejemplo el trabajo de Fonseca y Gascón (2002), que construyen una Organización Matemática Local (OML) en torno a las técnicas de derivación, entendiendo las OML en el contexto de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, y las *técnicas*, tal y como lo describen Chevallard, Bosch y Gascón (1997). Realizan una "simplificación" de las reglas necesarias para el cálculo de derivadas, aunque no tienen en cuenta ciertos aspectos matemáticos que conllevan errores en la aplicación de dichas técnicas (aplicación de la derivación logarítmica a cualquier función). Nuestra consideración de las técnicas es diferente, ya que está más orientada al sentido en el que lo describen Courant y Robbins (1964), y que concretaremos más adelante.

En cuanto a los trabajos revisados en torno a los otros dos ejes que vertebran nuestro trabajo, la demostración matemática y el libro de texto, ya han sido considerados en otros trabajos por los autores de esta aportación (Conejo y Ortega, 2013, 2014).

OBJETIVOS

Como ya hemos indicado anteriormente, nuestra hipótesis de partida es que la mecanización, sin justificación, de las reglas y técnicas de cálculo de derivadas contribuye a la no comprensión del concepto de derivada por parte de los alumnos. Por otro lado, tales reglas deben ser aprendidas para ponerlas en práctica y derivar funciones de forma automática; es decir, que el aprendizaje que debe realizarse de dichas reglas debe ser fundamentado y a la vez, orientado hacia una aplicación mecánica. Por tanto, el objetivo principal de este trabajo consiste en analizar la fundamentación, y la orientación a la aplicación práctica, de las reglas y técnicas de derivación que se encuentran en los libros de texto. Este objetivo se desglosa en los siguientes:

O1. Analizar sí se justifican o no las reglas y técnicas de derivación y clasificarlos atendiendo al marco teórico considerado.

O2. Describir la presencia de procesos de justificación en los tres currículos legales considerados.

O3. Detectar errores en la presentación, justificación y tratamiento de las reglas de derivación

Este primer análisis nos permitirá realizar una radiografía del tratamiento justificativo que han recibido las reglas de derivación en los últimos 40 años para, en trabajos posteriores, realizar propuestas orientadas a subsanar errores y mejorar el tratamiento de este concepto en los libros de texto y así favorecer su enseñanza y su aprendizaje.

METODOLOGÍA

Tal y cómo hemos mencionado anteriormente, éste trabajo forma parte de un proyecto de tesis, en el que usamos el método histórico de investigación en educación (Ruiz-Berrio, 1976), que ya ha sido utilizado con éxito por González (2002) y López (2011). Una vez que se ha determinado el problema de investigación, consideramos las cuatro fases del método: heurística, crítica, hermenéutica y exposición. La primera fase (heurística) consiste en la búsqueda y selección de fuentes documentales sobre las que realizaremos nuestra investigación, tanto para conocer los antecedentes de nuestro estudio como para determinar la muestra que vamos a analizar. Esta fase ya se ha realizado con anterioridad, como puede verse en otros trabajos (Conejo y Ortega, 2013 y 2014), en las que se describe la muestra de editoriales seleccionadas, cuatro, elegidas atendiendo a criterios de amplia difusión y continuidad en el tiempo. La segunda fase (crítica) conlleva el análisis de toda la documentación seleccionada en la primera fase, tras la cual, pasamos a la tercera fase (hermenéutica), en la que se interpretan los datos obtenidos a la luz de los análisis realizados. El presente análisis se corresponde con la segunda fase (crítica) del método y con el inicio de la tercera (hermenéutica), ya que se realizan unas reflexiones iniciales, pero hay que profundizar en la interpretación de los datos. Finalmente, en la cuarta (exposición) damos a conocer los resultados obtenidos.

Para realizar el análisis, en primer lugar se ha tenido en cuenta el elemento a analizar, en este caso las reglas y técnicas de derivación, junto con el marco teórico, que se describe a continuación y que se ha adaptado al objeto de estudio, y que proporciona las características a observar en cada libro. Con dichas características hemos elaborado tablas de recogida de datos que hemos completado con los datos de cada libro de texto de la muestra para, a continuación, proceder a su análisis.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico en este trabajo está vertebrado por dos ejes fundamentales: la demostración o justificación matemática, y el contenido matemático de las reglas y técnicas de derivación, que son el elemento a analizar. En primer lugar, consideramos el eje relacionado con la justificación matemática. Dicho marco teórico está desarrollado a partir de los trabajos sobre esquemas de prueba (EP) de Harel & Sowder (1998) y que han sido utilizados por Ibañes y Ortega (2001) y Dos Santos (2010) en sus respectivos trabajos, así como del concepto de prueba preformal, de van Asch (1993). Dicho marco ya ha sido adaptado para el análisis de la demostración en los libros de texto (LT) en Conejo y Ortega (2013) y aparece más desarrollado en Conejo y Ortega (2014). En ellos se definen los EP de un LT como lo *que el LT considera como persuasión y convencimiento para un posible lector*, entendiendo que convencimiento es *el proceso utilizado por el LT para eliminar las dudas del lector sobre la veracidad de una afirmación* y persuasión es *el proceso del libro que, utilizado por un individuo, elimina las dudas de otros sobre la veracidad de una afirmación*, y las pruebas preformales (PP) consisten en *una línea de razonamiento, que podría formalizarse a una prueba formal, y en la cual la idea esencial de la demostración se encuentra reflejada* (van Asch, 1993). Sin embargo, en este caso, se vuelve a hacer una adaptación del mismo para que se puedan analizar los diversos tratamientos de las reglas y de las técnicas de derivación.

Consideramos que el estudio de la derivada atiende a tres finalidades diferentes, que tienen que ver con el cálculo básico (reglas), con aplicaciones de este cálculo (técnicas) y con las aplicaciones teóricas conceptuales (teoremas relacionados con la derivada). No existe un acuerdo claro en la diferenciación entre reglas, fórmulas y teoremas de derivación entre los autores de textos de matemáticas para cursos universitarios. Por ejemplo, Spivak (1970) denomina teoremas a todos los resultados relacionados con el cálculo de la derivada; para Frank-Ayres (1964) las derivadas de las funciones constantes, de la suma, del producto, del cociente y de las funciones potenciales son fórmulas, mientras que llama reglas a las derivadas de las funciones trigonométricas y sus inversas, de la exponencial o de la logarítmica, denomina *chain rule* a la derivación de la función compuesta y vuelve a designar como fórmulas a las derivadas de las funciones hiperbólicas; Courant y Robbins (1964) son los únicos autores que aluden de una forma general a las técnicas como la aplicación de las reglas, pero después no vuelven a utilizar esta denominación; consideran que son reglas la derivada de las operaciones aritméticas y de la composición, mientras que las de otras funciones las realiza o bien antes de enunciar las reglas, aplicando la definición (seno) o bien tras enunciar las reglas (logarítmica, exponencial); Larson, Hostetler y Edwards (1998) denominan como reglas a la derivada de las operaciones aritméticas y de la composición, y la derivada de funciones elementales básicas las considera aparte: en algunos casos, como parte del estudio de la función (exponencial, logarítmica), en otros, como teoremas (funciones trigonométricas).

Por su parte, los libros de secundaria suelen nombrar como técnicas a la derivación de ciertas funciones elementales básicas, como la derivación logarítmica, la derivada de la función recíproca (entendiéndola como la inversa para la composición, aunque a veces se denota como “función inversa”, lo que puede llevar al error de identificarla con la inversa del producto) y la derivada de funciones implícitas. Nosotros interpretamos como *reglas de derivación* aquellas que se obtienen aplicando directamente la definición de derivada, es decir, las reglas de derivación de las funciones elementales básicas, de la aritmética de funciones y de la regla de la cadena. Las *técnicas* consisten en la aplicación compuesta de las reglas anteriores a cualquier función derivable; por ejemplo, en $f(x)=sen^{cos(x)}(x)$ se aplican las reglas de la cadena y del producto, tras la aplicación de la función logarítmica. Otro ejemplo sencillo: deriva la función recíproca de $f(x)=cos\ (x)+2$ en $[0,\ \pi]$.

El análisis realizado tiene dos niveles: en el primero, se considera la presencia o no en los libros de texto de los enunciados, de las justificaciones y de ejemplos en cada una de las reglas y técnicas consideradas (tabla 1); en el segundo nivel se analizan las propias justificaciones de los textos según el marco teórico considerado sobre EP. Para las justificaciones sobre las reglas de derivación de las operaciones de funciones (suma, producto por constante, producto, cociente, composición), consideramos las siguientes categorías de análisis:

- EP axiomático: utilizando la definición o reglas ya justificadas.

- EP transformacional: transforma la función en otra equivalente que se puede derivar más fácilmente.
- EP inductivo (uno o varios casos): se muestran uno o varios ejemplos y se considera que se extiende a cualquier función de ese tipo.
- Prueba preformal: aplica la definición, pero a una función en concreto.
- EP0: si no hace ningún tipo de justificación.

En cuanto a la derivación de funciones elementales básicas, o de familias de funciones (constantes, potenciales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas), entendemos que, aunque en la sistematización que se ha realizado de la teoría se pueden considerar como nuevos teoremas, en realidad no son enunciados generales, ya que se establecen sobre una función (o familia de funciones) en concreto. No obstante, clasificaremos la justificación como un EP axiomático si justifica aplicando la definición de derivada o reglas enunciadas anteriormente; como un EP transformacional, si se transforma la función en otra, y como EP0 si no se justifica. Sólo podremos considerar pruebas preformales o EP inductivos para las funciones potenciales (fijado el exponente) o para funciones exponenciales o logarítmicas de base cualquiera (fijada la base), ya que en el resto de funciones elementales básicas ya se enuncian sobre una función en concreto (y, por tanto, ya no se puede simplificar más).

Por último, nos queda considerar las técnicas, pero dado que se trata de la aplicación de varias reglas combinadas, su justificación está implícita en la aplicación de las reglas que se utilizan y en la propia teoría de funciones, por lo que no consideramos una clasificación de EP, sino que únicamente podremos encontrar explicaciones más o menos detalladas de cómo se aplican las técnicas o la aplicación de las mismas en el desarrollo de los ejercicios.

ANÁLISIS Y RESULTADOS EXTRAIDOS

Una vez descritas las categorías de análisis, hemos procedido a su estudio en los libros de texto de 3º de BUP y COU de la Ley General de Educación (LGE), de 1970, y 1º y 2º de Bachillerato de la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), de 1990 y de la Ley Orgánica de Educación (LOE), de 2006, de las editoriales de Anaya, Santillana, SM y Vicens-Vives (24 libros de texto). Para facilitar la identificación de cada libro en el texto, se han denotado con el código *editorial (año de edición),* que resulta más cómodo para la realización del análisis que el uso de citas de la normativa APA.

En la tabla 1 se refleja el primer nivel de análisis considerado, utilizando la siguiente codificación en todas las celdas: en la terna literal que aparece en cada celda, la primera letra indica la LGE, la segunda, LOGSE, y la tercera, LOE. Por otro lado, las columnas "T" indican si se ha enunciado el resultado, las "J", si se ha justificado, y las "E", si se acompaña de ejemplos. Además, "a" indica que se ha enunciado el resultado (respectivamente justificado o acompañado de ejemplos) en 3º de BUP o en 1º de Bachillerato, "b" en COU o en 2º de Bachillerato y "c" en ambos cursos; "0" significa que no se ha enunciado (respectivamente, justificado o acompañado de ejemplos) en ningún curso y "-" que no tiene sentido su tratamiento (por ejemplo, para la función identidad, al tratase de una función en concreto, no pueden considerarse ejemplos de dicha función; o bien, en los casos en que no se enuncia una regla, no tiene sentido considerar si se ha justificado o ejemplificado). En la tabla 1 hemos organizado las reglas de derivación en uno de los posibles órdenes derivados de una buena sistematización (se han ordenado de forma que las reglas que suceden a otras se pueden deducir tras aplicar la definición o alguna de las reglas anteriores). Esto no significa que sea el único orden posible, aunque nosotros consideramos que es el más coherente desde el punto de vista matemático. Por otro parte, en muchos de los libros analizados no se presenta este orden, aunque no lo reflejaremos en este trabajo.

El segundo nivel de análisis, en el que se estudian las justificaciones utilizadas, da lugar a una tabla más extensa, en las que clasifican éstas. No incluimos dicha tabla por razones de espacio. No obstante, el análisis que se presenta tras la Tabla 1 de forma discursiva comprende los datos recogidos en ambas tablas.

Tabla 1. Tratamiento justificativo general de las reglas de derivación en los LT

	LT de 3º de BUP y COU LGE, 1º y 2º Bachillerato LOGSE y LOE											
	Anaya			Santillana			SM			VV		
	T	J	E	T	J	E	T	J	E	T	J	E
Constante	ccc	0cc	000	aba	aba	000	ac0	ac-	00-	ccc	0b0	000
Identidad	ccc	0cc	---	aba	aba	---	aa0	aa-	---	0ca	0ba	---
Potencial	ccc	abb	baa	cbc	ab0	a0c	acc	acc	aac	ccc	0cb	000
Suma(resta)	ccc	abb	aaa	abc	abc	a00	acc	aca	a00	acc	0ca	0cc
Producto	ccc	abb	0aa	abc	abc	a00	acc	aca	0c0	acc	0ba	0cc
Cociente	bcc	000	0aa	abc	abc	ab0	acc	acc	ac0	acc	0ba	0cc
R. Cadena	ccc	abb	aaa	abc	abb	aba	acc	acc	0ac	acc	0bb	0cc
Ln x	ccc	abb	---	cbc	ab0	---	acc	acc	---	ccc	0bc	---
Log_a x	ccc	abb	0aa	cbc	ab0	abb	acc	acc	aa0	bcb	000	000
e^x	ccc	abb	---	bbc	0b0	---	acc	acc	---	ccc	0b0	---
a^x	ccc	abb	0aa	cbc	ab0	0bb	acc	acc	aa0	ccb	000	000
Sen	ccc	abb	---	cbc	aba	---	acc	acc	---	ccc	0ba	---
Cos	ccc	abb	---	cbc	ab0	---	acc	acc	---	ccc	0b0	---
Tan	ccc	abb	---	cbc	ab0	---	acc	acc	---	0cb	0a0	---
Arcsen	acc	abb	---	cbc	aba	---	acc	acc	---	ccb	0cb	---
Arccos	acc	abb	---	cbc	a00	---	acc	acc	---	ccb	0cb	---
Arctan	acc	abb	---	cbc	a00	---	acc	acc	---	ccb	0cb	---
Sec	000	---	---	c00	a--	---	ab0	ab-	---	00b	--0	---
Csc	000	---	---	c00	a--	---	ab0	ab-	---	00b	--0	---
Cot	000	---	---	cb0	ab-	---	ab0	ab-	---	00b	--0	---

En los LT de COU, a lo sumo se presenta una tabla resumen con las derivadas de las funciones más usuales, pero nunca se justifican (en el LT de SM, 1980, ni siquiera se presenta dicho cuadro). Se considera que el cálculo de derivadas se ha presentado en cursos anteriores y, por esta razón no se estudia en este nivel. Cabe destacar que, excepto el LT de Anaya (1989), el resto no presenta las reglas de derivación aritméticas (suma, producto, cociente…) en sus tablas resumen.

Por el contrario, todos los libros de 3º de BUP presentan el cálculo de derivadas, aunque el tratamiento justificativo es diferente dependiendo de la editorial. Tanto Santillana (1977) como SM (1981) justifican todas las reglas y técnicas que presentan, y las acompañan de ejemplos en los que se muestra la aplicación de la regla; Anaya (1988), por su parte, aunque justifica todas las reglas que presenta, no suele acompañarlas de ejemplos; por último, Vicens-Vives (1977) se limita a presentar los enunciados sin ningún tipo de justificación ni ejemplo, ya que asume que se han estudiado el curso anterior.

En cuanto a las reglas que se presentan, la única diferencia en los LT de 3º de BUP está en las funciones trigonométricas inversas, que únicamente se presentan en Santillana (1977) y SM (1981). En COU existe más diversidad y, aunque los tres textos que presentan el cuadro resumen de derivadas consideran uno diferente al de los demás, todos enuncian las derivadas de las funciones elementales básicas más usuales (potenciales, logarítmicas, exponenciales y trigonométricas).

En el periodo LOGSE notamos que cada editorial adopta una posición diferente tanto en la presentación como en la justificación de estos elementos. Anaya presenta los mismos resultados en 1º y en 2º, pero únicamente los justifica en el último curso, aunque algunos enunciados en primero están acompañados por ejemplos en los que se muestra la aplicación. Los tipos de EP utilizados son generalmente axiomáticos, ya que parte de la suma de funciones, la composición y la derivación logarítmica y justifica el resto de resultados a partir de estas tres reglas, sobre todo de la última, pero su aplicación es incorrecta, ya que para ello la función a la que se aplica la función logarítmica debe ser positiva. Este error aparece también en otros textos.

Santillana sólo trabaja el cálculo de derivadas en el segundo curso, limitándose en el primero a la definición de derivada. Sí que justifica la mayoría de reglas enunciadas, aunque no suele acompañar de ejemplos, y los EP utilizados son principalmente axiomáticos.

SM presenta y justifica prácticamente los mismos resultados en el primer y segundo curso, en ambos utilizando principalmente EP de tipo axiomático, aunque en el texto de segundo considera, a mayores, las derivadas de las funciones trigonométricas inversas. No obstante, conviene señalar que ésta es la única editorial en la que los textos que poseemos de este nivel no pertenecen a la misma colección, por lo que esta "repetición" de enunciados y justificaciones en ambos cursos podría deberse a un cambio en la política de la editorial de una colección a otra.

Vicens-Vives presenta los mismos resultados en ambos cursos. Justifica la mayoría de los enunciados, aunque para algunos lo hace en ambos cursos y para el resto sólo en el curso superior. Sin embargo, cabe destacar que los EP utilizados en cada curso son diferentes ya que, en 1º, salvo la suma de funciones y el producto de una función por una contante, para los que utiliza un EP axiomático, el resto son, o bien EP inductivos o bien aplicación de la regla de la cadena. Por su parte, en 2º, la mayoría de EP utilizados es de tipo axiomático, lo que indica una mayor tendencia a la justificación en el curso más elevado.

En el periodo LOE, los LT analizados para cada editorial pertenecen a la misma colección en ambos cursos, por lo que cada LT de 2º curso es la continuación del LT de 1º.

En el caso de la editorial Anaya, los textos analizados, a pesar de pertenecer a periodos legislativos diferentes, son iguales a los del Bachillerato LOGSE y, por tanto, no se repiten aquí los comentarios realizados antes.

Santillana prácticamente presenta los mismos enunciados en primero y segundo, aunque en este último curso prescinde de la función constante y la identidad. En cuanto a las justificaciones, presenta algunas únicamente en primero, la regla de la cadena, únicamente en segundo, y otras (suma, producto y cociente), en ambos cursos, aunque muchas reglas no se justifican. Las reglas justificadas en ambos cursos se realizan con EP inductivos, y los pocos EP axiomáticos que aparecen lo hacen en el primer curso, lo que indica que consideran la justificación de estas reglas más apropiada en 1º que en 2º. Además, en segundo se presentan más ejemplos de las reglas presentadas que en primero. Esta política es totalmente opuesta a la que la editorial consideraba en la legislación anterior, que como ya comentamos, presentaba los resultados y los justificaba únicamente en el segundo curso.

SM enuncia y justifica prácticamente los mismos resultados, aunque algunas reglas sólo las demuestra en el primer curso. Además, sus EP coinciden en su mayoría en ambos cursos. No suelen acompañar de ejemplos de aplicación cada enunciado.

Vicens-Vives presenta los resultados más elementales en primero, y los amplía en segundo. La mayoría de los resultados que presenta en ambos cursos sólo los justifica en primero, y en segundo justifica, principalmente, aquellos que son enunciados por primera vez. Sí acompaña de ejemplos las reglas de derivación de la aritmética de funciones.

En cuanto a las técnicas de derivación, éstas aparecen, por norma general, al aplicar logaritmos y derivar funciones implícitas, en la derivada de la función recíproca y en la aplicación sucesiva de reglas de derivación de las funciones elementales básicas, aritmética y composición. Aparte de la derivada de la función recíproca, las técnicas de derivación aparecen en los ejemplos resueltos y en los ejercicios propuestos. Todos ellos responden a los siguientes enunciados: *Calcula la derivada de* (aparecen muchas funciones elementales); *calcula la derivada de las siguientes funciones* (aparecen muchas funciones elementales); *calcula derivadas de orden superior de* (aparecen algunas funciones elementales); *deriva* (algunas funciones). También aparecen errores de enunciados. Por ejemplo,

$$\text{En } y=\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3 \text{ considera } \ln(y)=ln\left[\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3\right]$$

El procedimiento es erróneo ya que para x<0 la función logarítmica no está definida en estos valores, pero la función sí, y es derivable. Por tanto, en estos casos no se puede aplicar la función logarítmica. Este error es frecuente, se aplica la derivación logarítmica a funciones del tipo $y=u\cdot v$; $y=u/v$; $y=x^n$, donde u y v son funciones cualesquiera, no necesariamente positivas en sus dominios.

En resumen, vemos varios cambios reseñables en el tratamiento de las reglas de derivación en los LT: por un lado, la presentación y tratamiento de las reglas de derivación se realiza en cursos anteriores en la LGE que en las leyes posteriores, incluyendo las justificaciones; por otro, se detecta una mayor justificación en 2º que en 1º en el caso de LOGSE, pero en LOE esta tendencia no está tan marcada. Además, se observa una menor justificación en los LT de esta última legislación. Por otro lado, si consideramos los tipos de justificaciones utilizados, hemos comprobado que no se utilizan en ningún caso pruebas preformales y en muy pocos casos, EP inductivos de uno o varios casos (y los que se incluyen, en LOGSE o LOE). Por editoriales, Anaya no presenta variabilidad a lo largo de las leyes, Santillana elimina los EP axiomáticos y prescinde de las justificaciones, SM aumenta los EP axiomáticos y transformacionales utilizados, aunque también, las reglas sin justificar, y Vicens-Vives tiende a un aumento de EP axiomáticos.

PRIMERAS REFLEXIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Como ya hemos apuntado anteriormente, si bien es conveniente para los alumnos mecanizar la aplicación de las reglas y técnicas de derivación, su justificación es necesaria tanto para una correcta sistematización de los resultados relacionados con el concepto de derivada como para una mejor comprensión de dicho concepto (Hanna, 1995).

El análisis realizado sí que nos permite extraer algunas reflexiones iniciales que nos guíen para subsiguientes trabajos. En primer lugar, el orden de presentación de las reglas atiende a tal diversidad, que requeriría de un estudio por sí solo. Pudiera parecer que este orden no tiene relevancia en la justificación que el libro considera para cada regla; sin embargo, exceptuando la definición de derivada, el orden en que se enuncian las reglas influye en la justificación que se realiza de cada una, ya que existen diversas formas de justificar un mismo resultado.

Cuando se justifica, el EP que más se utiliza es el axiomático o transformacional, antes que las pruebas preformales o los EP inductivos. Suponemos que los autores de los LT consideran el nivel de razonamiento necesario para estas justificaciones adecuado a los cursos considerados, aunque hay que matizar que en muchos casos, dichas justificaciones se realizan de forma incompleta, con simplificaciones y abusos en la notación. No se presentan pruebas preformales. Consideramos que sería interesante utilizarlas en aquellos casos en los que la se han utilizado EP incompletos, para no recurrir a la excesiva simplificación. Por otro lado, no todos los LT acompañen las reglas y técnicas de derivación de ejemplos de aplicación, si bien, se consideran en otros epígrafes de ejercicios resueltos y práctica.

No se observan patrones claros en el tratamiento de este tópico, ni asociados al periodo legislativo, ni a la línea editorial, lo que nos hace pensar que depende en cada caso del equipo de autores que ha realizado cada LT. Consideramos que esta diversidad puede conducir a errores para los alumnos de cara a estudios posteriores, ya que ni siquiera se plantea en los LT que el tratamiento que hacen no es el único posible, todo ello sin considerar los planteamientos erróneos, los cuales habría que evitar por completo.

No obstante, ya hemos señalado que en algunos casos, la sistematización de la reglas no es correcta porque se pasan por alto ciertas imprecisiones que llevan a error (derivación logarítmica). Estos textos parecen estar más preocupados por la mecanización y la algebrización de las reglas que por la fundamentación matemática.

Por último, señalar que el estudio que se pretende abordar es de tal complejidad, tanto por el tamaño de la muestra (24 libros de texto) como por la diversidad encontrada en el tratamiento del tópico seleccionado, que resultaría imposible abordar dicho estudio en una comunicación con la profundidad que merece. Por esta razón, en este trabajo únicamente presentamos una aproximación inicial a dicho estudio. No obstante, es una cuestión que pretendemos abordar en el futuro.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias,* 29(2), 191-206.

Chevallard, Y., Bosch, M. Y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona: ICE/Horsori.

Conejo, L. y Ortega, T. (2013). La demostración matemática en los libros de texto de 2º de B.U.P. y 1º de Bachillerato de LGE, LOGSE y LOE para el concepto de límite. Fase inicial. En A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XVI Simposio de la SEIEM* (pp.121-132). Baeza: SEIEM.

Conejo, L. y Ortega, T. (2014). Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto para alumnos de 17-18 años correspondientes a las tres últimas leyes educativas españolas. *NÚMEROS, Revista de didáctica de las Matemáticas.* Aceptado para su publicación.

Courant, R y Robbins, H. (1964). *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar, S.A.

Dos Santos, C. (2010). *A demostraçao matemática e o profesor. Formulaçao e ensino.* Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Fonseca, C. y Gascón, J. (2002). Organización matemática en torno a las técnicas de derivación en la enseñanza secundaria1. En J. Murillo, P. M. Arnal, R. Escolano, J. M. Gairín y L. Blanco (Eds.) *Actas del VI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en educación Matemática.* Logroño: SEIEM.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.) *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Córdoba: SEIEM.

Frank Ayres, JR. (1964). *Theory and problems of differential and integral calculus*. New York: Schaum Publishing, CO.

García-Rodeja, I. (1997) ¿Qué propuesta de actividades hacen los libros de primaria? *Alambique,* 11, 35-43.

González, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the learning of Mathematics,* 15(3), 42-49.

Hanna, G. and Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of Mathematical Knowledge. In G. Hanna et al. (Eds.), *Explanantion and proof in mathematics: philosophical and educational perspectives.* (85-100). New York: Springer.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies. En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), *Research on Collegiate Mathematics Education*, vol. III., 234-283. American Mathematical Society, Providence, USA.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO*, 28, 39-60.

Inglada, N y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental, *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Córdoba (Boletín nº 15), pp. 1-18. [URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/ siidm/boletin15.htm]

Jefatura del Estado (1970). Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. *Boletín Oficial del Estado*, 187, de 6 de agosto de 1970, 12525-12546

Jefatura del Estado (1990). Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre de 1990, de Ordenación General del Sistema Educativo. *Boletín Oficial del Estado,* 238, de 4 de octubre de 1990, 28927- 28942

Jefatura del Estado (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado,* 106, de 4 de mayo de 2006, 17158-17207

Larson, R.E, Hostetler, R.P., y Edwards, B.H. (1998).*CÁLCULO*. Madrid: MacGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.U.

López, M. C. (2011). *La formación inicial de maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto.* Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca.

Ortega, T. y Sierra, M. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado.* 32, 87-115.

Pino-Fan, L.R., Godino, J.D., Castro, W.F., Font, V. (2012). Conocimiento didáctico-matemático de profesores en formación: explorando el conocimiento especializado sobre la derivada. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 427 - 434). Jaén: SEIEM

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de Matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona: ICE Universitat de Barcelona-Horsori edit.

Robles, M.G., Del Castillo, A.G., Font, V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (523-532). Lleida: SEIEM.

Ruiz-Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la Educación. *Revista Española de Pedagogía,* 134, 449-475.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). El desarrollo de la competencia de estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria en identificar la comprensión de la derivada en estudiantes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (501-509). Bilbao: SEIEM

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de Investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(2): 267-296

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 41-51.

Spivak M. (1970). *Calculus. Cálculo infinitesimal*. Barcelona: Editorial Reverté, S.A.

van Ash, A.G. (1993). To prove, why and how? *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, 2, 301-313.