Acerca de la validez de la fórmula para calcular el área de un polígono regular

Gustavo Yanes Yanes
Profesor U.E. Boris Bosio Vivas
Ministerio de Educación Cultura y Deportes
Venezuela
gustavo_yanes@hotmail.com

Lo que expondré a continuación forma parte de un estudio que inicié con miras a proponer mejoras en la enseñanza de la Geometría en los niveles de Educación Básica. A pesar de haberlo iniciado como un estudio enfocado hacia la didáctica de la materia, me vi obligado a dar un viraje y cambiar de rumbo para resolver asuntos propios de la Matemática. Ese viraje estuvo motivado por la necesidad de establecer una fórmula que permitiera la deducción de las fórmulas particulares de los polígonos más conocidos, de manera sencilla y directa; por cuanto lo usual es valerse de una serie de artificios y de una mezcla de secuencias que confunden la inducción con la deducción y, en consecuencia, al alumno y muchas veces al docente.

En el rol de diseñador solamente tenía que tomar la bibliografía, seleccionar los mejores puntos de vista en referencia a los asuntos a tratar, ordenar los temas en secuencia lógica, analizarlos, reordenar los temas en secuencia pedagógica y establecer las correlaciones necesarias para lograr la fluidez requerida por la Didáctica. Cumpliría así con la función del más común de los docentes: agente transmisor de los conocimientos generados por otros.

Al desempeñar la actividad de generador de conocimientos, me he dado cuenta de que en la Geometría Elemental todavía quedan aspectos por estudiar. Algunos de ellos los he tocado en parte y otros con mayor profundidad; no obstante que la profundidad haya llegado hasta donde lo permite la orientación natural del docente que no es otra que la conducción del proceso de enseñanza-aprendizaje en una forma expedita, rápida, concisa y precisa.

Siguiendo ese orden de ideas me referiré a los dos productos iniciales del estudio, que aún sigue en curso. Considero prudente presentar ambos porque el primero es el impulsor del que constituye el título de esta ponencia. Omitir el primer producto es como dejar sin antecedentes al segundo y es perder la oportunidad exponerlo ante especialistas en matemática y en enseñanza de la matemática, reunidos en este IX ENCUENTRO SOBRE GEOMETRÍA Y SUS APLICACIONES Y II DE ARITMÉTICA.

Los productos quedan a la orden de ustedes; para utilizarlos; para mejorarlos; para criticarlos o para rechazarlos razonadamente.

Primera Parte

1. Fórmula General para Área del Polígono

En la enseñanza del cálculo de áreas, tradicionalmente se parte de un cuadrado unitario y, a partir de allí, se inicia una serie de procedimientos inductivos y deductivos que conducen al aprendizaje de cada una de las fórmulas particulares de los polígonos de tres y de cuatro lados, como también la de los polígonos regulares, finalizando en un método general para cualquier polígono, aunque se aplica sólo a los irregulares, que consiste dividir la figura en otras menores con fórmula conocida y sumar las áreas de éstas últimas (normalmente se le da el nombre de triangulación, a pesar de que no todas las figuras menores sean triángulos). Sin embargo, la triangulación no termina en una fórmula general, por lo que el método se queda corto.

Tomar el cuadrado unitario como punto de partida, a mi entender, es un mal comienzo; ya que para llegar a las fórmulas conocidas de otras figuras nos valemos de artificios gráficos como: introducir cuadraditos en un rectángulo, seccionar y comparar figuras, trasladar porciones, realizar sucesivos tratamientos a la fórmula del triángulo, etc...; lo que conduce a que sea el docente quien ofrezca todas las explicaciones necesarias para su comprensión y que el estudiante se aprenda de memoria cada fórmula a la vez de que sea incapaz de llegar a alguna desde otra conocida, en caso de olvido. Por otra parte, se procede con una mezcla de inducción, deducción, análisis y síntesis que resulta engorrosa en su manejo.

Esta forma de introducir el cálculo de áreas es propia del tratamiento que los autores dan en la bibliografía específica del tema. Los docentes sólo nos hemos ocupado de transmitir los conocimientos y procedimientos que tienen aceptación universal. De aquí que la culpa no sea nuestra, sino de los matemáticos porque no han propuesto algo diferente.

Un punto de partida mejor que el anterior sería el área del trapecio, sin ser unitario y por definición; desde su fórmula podemos deducir, realmente, las de todos los polígonos de cuatro lados que tengan dos de ellos paralelos (si los tiene paralelos dos a dos, es claro tiene dos lados paralelos) y la del triángulo, para lo cual bastaría considerar que es un trapecio cuya base menor es nula. Esta última consideración es posible debido a la carencia de una taxonomía, de los polígonos, que la contradiga. Con ello nos evitaríamos los artificios arriba mencionados, se deducirían directamente las áreas de las figuras citadas por procedimientos algebraicos y bastaría el dominio de la fórmula del trapecio para recordar las fórmulas particulares.

Sin embargo, partir del trapecio deja fuera a los polígonos de más de cuatro lados y a los de cuatro que no tengan lados paralelos, por lo que tendríamos que recurrir, nuevamente, a los artificios. Si contáramos con una fórmula general para el cálculo de área de cualquier polígono, tendríamos un punto de partida mucho mejor.

El contenido de este documento se refiere a esa fórmula general. Se inicia a partir del método de triangulación; simplificado y complementado a través de un basamento teórico que permite calcular el área de cualquier figura sin intervención aparente de figuras menores. También permite: la deducción directa de las fórmulas conocidas para triángulos y cuadriláteros; la deducción de otras fórmulas hasta ahora no utilizadas y, en forma indirecta, la de los polígonos regulares, incluyendo la del círculo.

Antes de pasar al desarrollo, es preciso realizar algunas observaciones que se derivan de la triangulación de polígonos; por lo que tomaremos como base cualquier polígono, por lo tanto: irregular.

En la ilustración que sigue, se puede observar una forma característica de dividir el polígono irregular en triángulos

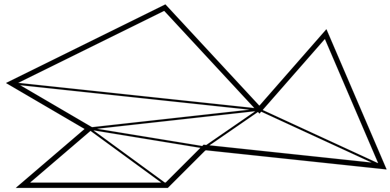

Figura: 1

Esta forma de dividir la figura es muy común, aunque no es la más recomendable.

Otra forma de dividir la figura en otras menores es la que se muestra a continuación:

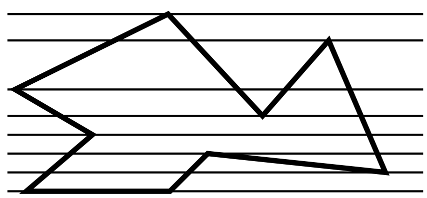

Figura: 2

Se trazan rectas paralelas entre si, por cada uno de los vértices de la figura. De esta manera quedará dividida en figuras menores de tres y/o cuatro lados; estas últimas tendrán dos lados paralelos situados en dos rectas consecutivas, uno en cada recta.

Los triángulos tendrán una base en una recta y el vértice opuesto a la base en otra recta consecutiva con la primera.

Esta división de la figura en partes menores nos permite calcular el área total de las que se encuentran entre dos rectas paralelas consecutivas, que como sabemos son triángulos y/o cuadriláteros con lados ubicados en esas rectas, sin necesidad de calcular las áreas por separado.

Observemos que si tenemos un conjunto de figuras de tres y/o de cuatro lados con la misma altura (h), entonces pueden ser ubicadas entre dos rectas paralelas entre si, como se observa en la ilustración:

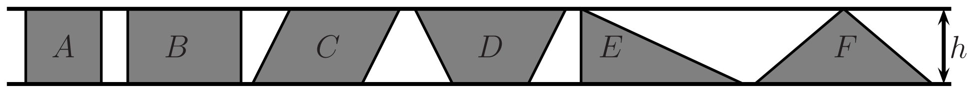

Figura: 3

Veamos ahora que el cálculo del área total puede ser reducido a unos cuantos pasos sencillos:

Para cada figura denotaremos los lados paralelos entre si con la letra correspondiente en minúscula así: $a, a', b, b', c, c', d, d', e, e'$, f y f'. En los triángulos uno de los lados paralelos tendrá longitud nula.

El área total, partiendo del área del trapecio, será:

$$
\begin{aligned}
At &= A + B + C + D + E + F, && \text{luego} \\
At &= (a + a')h/2 + (b + b')h/2 + (c + c')h/2 + (d + d')h/2 \\
&\qquad + (e + e')h/2 + (f + f')h/2 && \text{y} \\
At &= (a + a' + b + b' + c + c' + d + d' + e + e' + f + f')h/2 && \text{o bien} \\
At &= (a + b + c + d + e + f + a' + b' + c' + d' + e' + f')h/2
\end{aligned}
$$

Es decir: sumamos las longitudes de todos los lados que descansan sobre las dos rectas paralelas, multiplicamos por la distancia entre tales rectas y dividimos por dos.

Este último criterio puede ser aplicado reiteradamente a un polígono que se haya dividido en figuras menores mediante rectas paralelas que pasen por sus vértices, tal como se mostró en la última ilustración; ya que queda dividida en conjuntos de figuras menores de tres lados y/o de cuatro lados, con dos de ellos paralelos ubicados en dos rectas consecutivas y paralelas entre sí.

Esta particularidad nos llevará a una fórmula general para el cálculo de las áreas de los polígonos sin la intervención, aparente, de las áreas de las figuras menores. Para llegar a dicha fórmula, es necesaria la base teórica que desarrolla más adelante, la cual parte de conocimientos universalmente aceptados e incluye otros, que llamaré nuevos, necesarios para soportar la fórmula mencionada.

En términos generales, lo que se expone es un enfoque para el cálculo de áreas de polígonos; que parte de una fórmula general, dada por definición, para deducir las fórmulas particulares de los polígonos de tres y de cuatro lados en forma directa; así como, indirectamente la de los polígonos regulares. No debe verse como una proposición metodológica para la enseñanza; puesto que sólo se trata de justificar la veracidad de la fórmula y de demostrar su utilidad desde el punto de vista de la Matemática. Es una propuesta, susceptible de mejorar o de ser razonablemente rechazada. Si el enfoque tuviera aceptación, los expertos en Didáctica se encargarían de distribuir los contenidos en los diferentes niveles y grados de la Educación Básica; igualmente, acordarían la forma de introducirlos para que sean comprendidos sin dificultad.

Como se da un vuelco a lo tradicional, comenzando el tratamiento del área de los polígonos por lo que hoy es el final, conviene desprenderse de lo aprendido para retomarlo después de la lectura y llegar a las conclusiones que mucho sabré agradecer me sean comunicadas.

2. Haz de Rectas Paralelas

Definición. *Un conjunto de rectas el plano que pasan por un mismo punto se denomina **haz central** y el punto común es el centro del haz. Un conjunto de rectas paralelas pertenecientes a un plano se denomina de rectas paralelas, o **haz paralelo**. Un haz paralelo es finito si consta de un número finito de rectas; si k es el número de rectas del haz paralelo se denominará **k-haz**.*

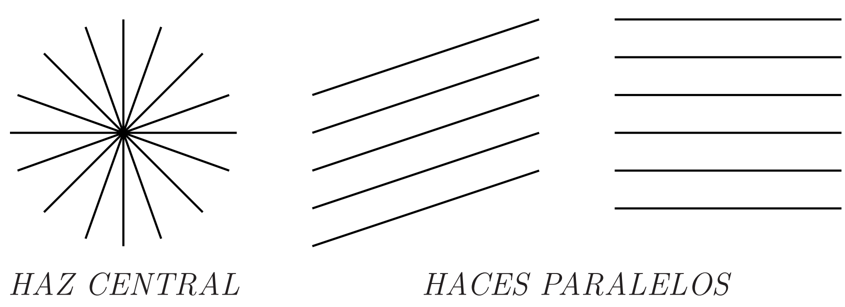

Figura: 4

Dos **rectas de un haz paralelo** son **consecutivas** si entre ellas no se encuentra ninguna otra perteneciente al haz dado. Un haz paralelo es regular si las rectas consecutivas se encuentran a una distancia constante, de lo contrario es irregular.

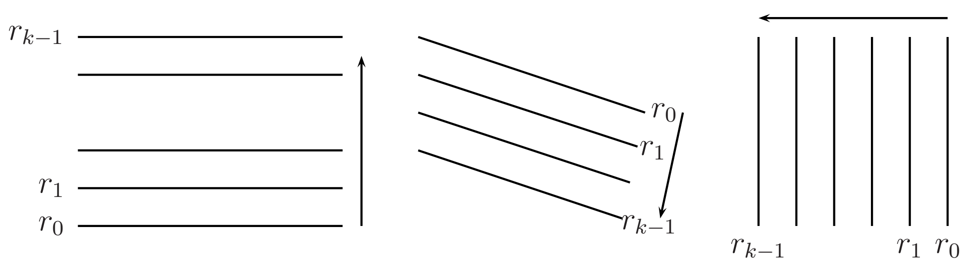

Figura: 5

Si definimos un sentido perpendicular al k-haz, en la ilustración anterior indicado con la flecha, tendremos un **haz paralelo ordenado**. Las rectas se enumeran: $r_0, r_1, r_2, \cdots, r_{k-1}$; en forma prelativa y en el sentido dado. Las rectas r_0 y r_{k-1} se denominan extremos del k-haz.

La distancia entre dos rectas consecutivas de un haz paralelo se denota: $d(r_i r_{i+1})$.

Se puede ordenar un haz paralelo infinito, tomando una recta como r_0 y a partir de ésta, en el sentido seleccionado las enumeraremos consecutivamente : $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$; en el sentido contrario las enumeraremos : $r_0, r_{-1}, r_{-2}, r_{-3}, \cdots$

Dados dos **haces paralelos**: son **paralelos, perpendiculares** u **oblicuos entre sí**, si tomado una recta de cada haz, éstas son paralelas, perpendiculares u oblicuas entre sí, respectivamente.

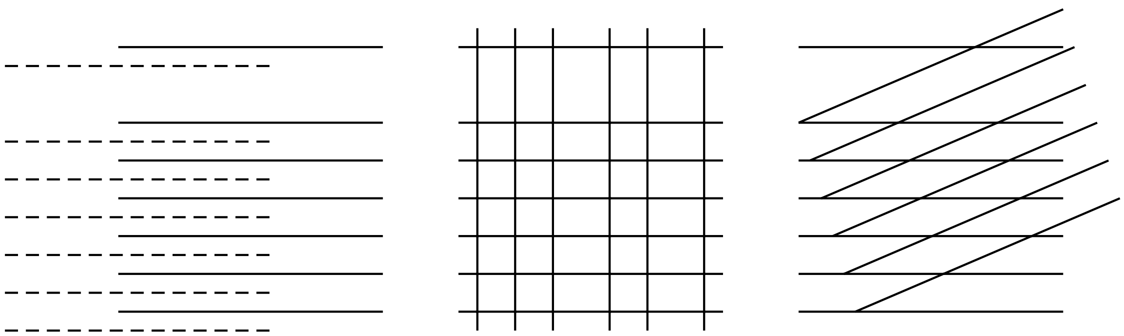

Figura: 6

En la ilustración de arriba observamos haces paralelos, perpendiculares y oblícuos.entre sí.

2.1. Haz Paralelo Respecto A un Polígono Dado

Todo haz paralelo finito, cuyas rectas pasen por vértices de un polígono dado se denomina: k-haz del polígono dado. Es evidente que podemos trazar infinitos haces paralelos de una figura; cuando nos refiramos al k-haz de un polígono dado, entenderemos que es cualquiera de los infinitos k-haces paralelos que se pueden trazar.

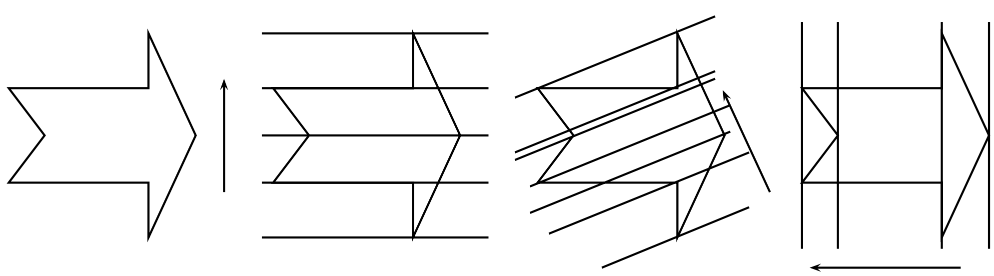

Figura: 7

En la ilustración podemos observar un octágono y algunos de sus k-haces.

Dado un polígono y k-haz respecto a él, ordenado, se define como ancho del polígono respecto al k-haz dado a la distancia entre las paralelas r_0 y r_{k-1}

Se define como ancho de un polígono respecto a un diagonal dado: al ancho del polígono respecto al k-haz que lo contiene.

Cada recta del k-haz respecto a un polígono dado, interseca a la figura en un conjunto no vacío de puntos interiores distribuidos en uno o más segmentos de recta. Estos segmentos se denominan segmentos interiores del k-haz respecto a la figura dada, o simplemente: segmentos interiores. Todo segmento interior tendrá una longitud mayor o igual a cero; ocurriendo este último caso cuando el segmento interior se reduce a un punto.

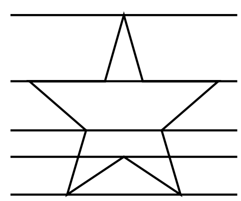

Figura: 8

En la Figura 8 pueden observarse los diferentes tipos de segmentos interiores respecto a un polígono de 10-lados denominada: estrella de cinco puntas.

2.2. Segmentos Delimitadores En Un k-Haz Paralelo

Entre cada par de rectas consecutivas, de un k-haz respecto a un polígono dado, existirá un conjunto de puntos interiores de la figura. Este conjunto de puntos puede ser continuo (una sola porción), o puede estar fragmentado en dos o más porciones. Cada una de estas porciones está delimitada por segmentos interiores que las definen en forma unívoca. A estos segmentos interiores los denominaremos: segmentos delimitadores de porciones de puntos interiores respecto a dos rectas consecutivas del k-haz paralelo del polígono dado; o simplemente, los llamaremos: **delimitadores**.

La notación: $S(r_i r_{i+1})$ indicará el conjunto de delimitadores respecto a las rectas r_i y r_{i+1} , igualmente, si no se presta a confusión, indicará la suma de las longitudes de los delimitadores respecto a las rectas indicadas.

Si dos, o más, segmentos interiores consecutivos son delimitadores, su reunión será considerada como un solo segmento delimitador respecto a las rectas dadas y su longitud será la que resulte de medir la distancia entre los extremos más alejados.

Observemos que un segmento interior puede ser delimitador respecto a dos rectas consecutivas y no serlo respecto a otro par de rectas consecutivas, al que también pertenezca.

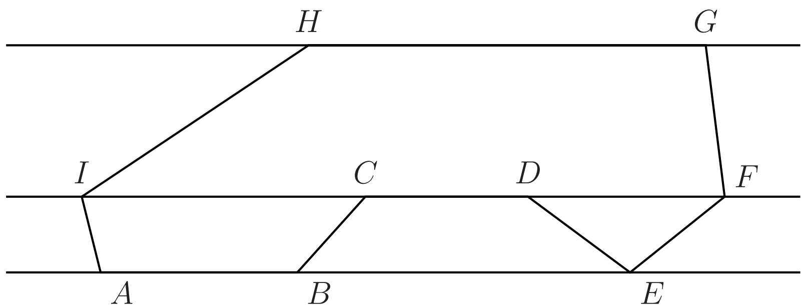

Figura: 9

En el polígono de nueve lados: $A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I$,se puede observar:

a) La recta r_0 define dos segmentos interiores: AB y EE, siendo nula longitud de este último. Ambos segmentos son delimitadores respecto a las rectas consecutivas r_0 y r_1.

b) La recta r_1 define tres segmentos interiores consecutivos: CD, DF e IC. De ellos CD no es delimitador respecto a las rectas consecutivas r_0 y r_1. Los tres segmentos son delimitadores respecto a las rectas consecutivas r_1 y r_2. Por ser delimitadores consecutivos, el segmento IF será la reunión de los tres, por lo que IF se considerará como delimitador respecto a las rectas r_1 y r_2.

c) La recta r_2 define un solo segmento interior GH, el cual es delimitador respecto a las rectas consecutivas r_1 y r_2.

Un delimitador se denomina **delimitador propio**, si es delimitador respecto a dos pares de rectas consecutivas del k-haz. Es decir: si el segmento MN es un delimitador tal que $MN \;\varepsilon\; S(r_i r_{i+1})$, MN será propio si $MN \;\varepsilon\; S(r_{i-1} r_i)$

o $MN \varepsilon S(r_{i+1}r_{i+2})$. En otras palabras: un delimitador es propio si lo es a ambos lados de su longitud.

Se denomina ancho de una figura respecto a un delimitador dado al ancho e la figura respecto al k-haz que contiene tal delimitador.

Dada una base de un polígono también dado, **el ancho del polígono respecto a la base dada** es equivalente al ancho de la figura respecto al k-haz que contiene a la base dada. Obsérvese que si una base de una figura está contenida en un k-haz dado, esa base es un delimitador. En algunas ocasiones, el ancho de la figura respecto a la base dada se suele denominar altura.

3. Formula General Propuesta

Para calcular el área de un polígono cualquiera utilizaremos el procedimiento descrito en la introducción; realizando el cálculo, en forma reiterativa, en cada par de rectas del k-haz , como sigue:

a) Se traza un haz paralelo respecto al polígono dado y se ordena

b) Para cada par de rectas consecutivas se aplica el procedimiento descrito:

  b.1 Se suman los segmentos delimitadores respecto a ellas. Es decir se calcula $S(r_ir_{i+1})$.

  b.2 Se mide la distancia entre las rectas, que denotaremos: $d(r_ir_{i+1})$.

  b.3 Se realiza el producto: $S(r_ir_{i+1})d(r_i, r_{i+1})$ y se divide por dos (2).

c) Se suman todos los productos anteriores y resultado es el área del polígono dado.

El procedimiento señalado nos lleva a una fórmula para calcular el área de cualquier polígono. Tomando en cuenta que el número 2 es un divisor común de todos los productos, lo anterior puede resumirse así:

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-2} S(r_i\, r_{i+1})\, d(r_i\, r_{i+1})$$

Es obvio que, para mayor sencillez, debe seleccionarse el haz paralelo que contenga menos rectas. Esto nos permite deducir fórmulas particulares para calcular las áreas de algunos polígonos sencillos, como veremos a continuación.

4. Área de los Polígonos más Conocidos:

4.1. Área Del Triángulo:

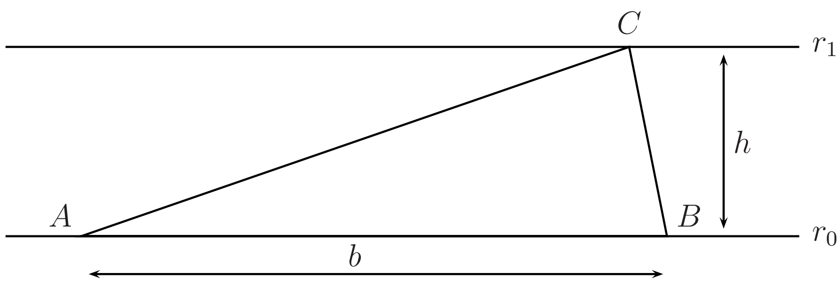

Figura: 10

En la polígono de 3-lados, triángulo, el haz paralelo con menor número de rectas es el que contiene una de las bases. Sea el triángulo ABC donde b es la longitud de la base y h la distancia entre las rectas r_0 y r_1. Obsérvese que h es el ancho del triángulo, respecto a la base AB, que coincide con la altura del triángulo respecto a la base AB.

Utilizando la fórmula general: (no se escribirán los límites en el símbolo de sumatoria $\sum$, por razones de comodidad; pero deberá entenderse que tales límites corresponden a los de la fórmula general)

$$A = \frac{1}{2} \sum S(r_0\, r_1)\, d(r_0\, r_2) = \frac{1}{2}(b+0)h = \frac{1}{2}bh \qquad \text{que es la fórmula conocida.}$$

4.2. Área Del Trapecio:

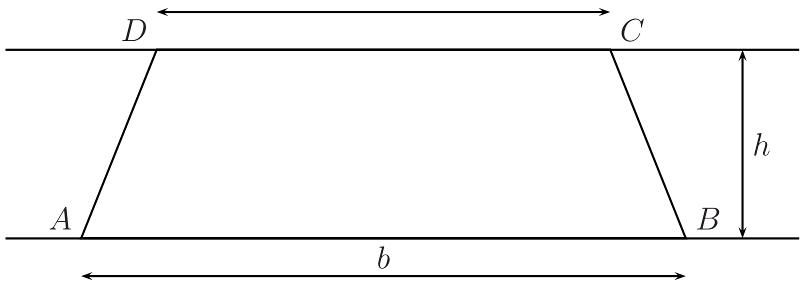

Figura: 11

Consideraremos al trapecio, en este caso, como el cuadrilátero (figura de 4-lados) que sólo tiene dos lados paralelos; el menor haz paralelo es el que contiene dichos lados. Sea el trapecio $ABCD$, donde el segmento AB es uno de sus lados paralelos, de longitud b, CD es el segundo lado paralelo, de longitud b' y h la distancia entre r_0 y r_1.

Utilizando la fórmula general:

$$A = \frac{1}{2}\sum S(r_0\, r_1)\, d(r_0\, r_2) = \frac{1}{2}(b+b')h, \qquad \text{que es la fórmula conocida.}$$

4.3. Área Del Paralelogramo:

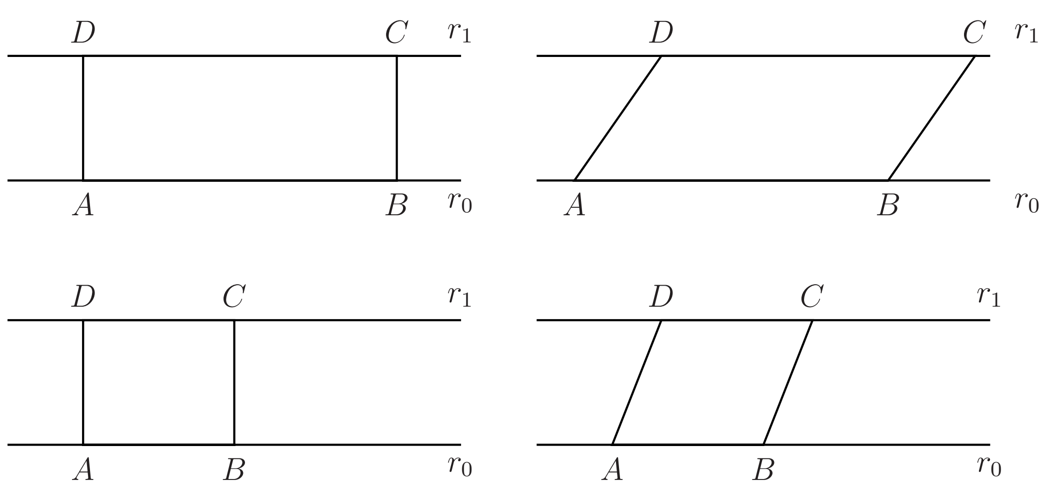

Figura: 12

En todos los casos haremos: $d(AB) = b$ y $d(r_0r_1) = h$.

Los paralelogramos se caracterizan por tener sus lados paralelos dos a dos. Por estar contenidos entre paralelas, las longitudes de los lados opuestos son iguales; en nuestro caso $d(CD) = d(AB) = b$. El menor haz paralelo respecto al paralelogramo es el que contiene dos lados. Tracemos el haz que contiene los lados AB y CD.

Utilizando la fórmula general y tomando en cuenta que $d(CD) = d(AB) = b$:

$$A = \frac{1}{2}\sum S(r_0\,r_1)\,d(r_0\,r_1) = \frac{1}{2}(b+b)h = \frac{1}{2}(2b)h = bh,$$

que es la fórmula para calcular áreas de paralelogramos.

En el cuadrado tenemos: $b = h$: por lo que el área será $bb = b^2$ (o l^2 si hacemos $d(AB) = l$

4.4. Área De Cuadriláteros Con Diagonales Que Se Corten En Angulo Recto.

En cualquier cuadrilátero con diagonales perpendiculares entre sí, podemos trazar un haz paralelo que contenga a un diagonal propio, con lo que el segmento delimitador propio será ese diagonal (d) y $d(r_0r_1) + d(r_1r_2) = d(r_0r_2)$ será el otro diagonal (d').

Sea d la longitud del diagonal contenido en el haz paralelo y d' la longitud del diagonal perpendicular al k-haz.

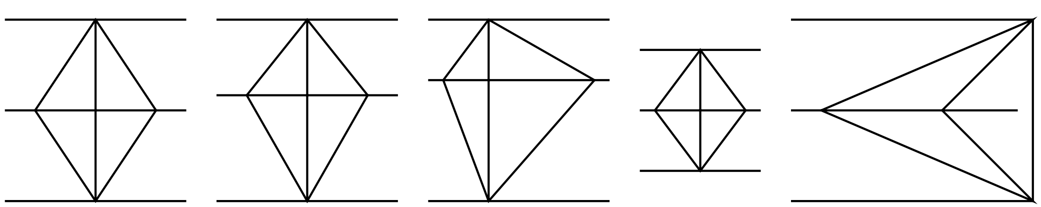

Figura: 13

Usando la fórmula general tenemos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\sum S(r_i\, r_{i+1})\, d(r_i\, r_{i+1}) \\ &= \frac{1}{2}[(0+\mathrm{d})d(r_0r_1) + (\mathrm{d}+0)d(r_1r_2)] \\ &= \frac{1}{2}[\mathrm{d}d(r_0r_1) + \mathrm{d}d(r_1r_2)] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{d}[d(r_0r_1) + d(r_1r_2)] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{d}d(r_0r_2) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{dd}' \end{aligned}$$

Que es la fórmula conocida por todos para rombos y cuadrados (semiproducto de los diagonales), con aplicación a otras figuras.

4.5. Área De Cuadriláteros Con Lado Opuesto no Paralelo A Una Base Dada.

En este caso, se consideran todos los trapezoides, ya que cualquier base que se tome cumplirá la condición. También se incluyen los trapecios, dada una base no paralela a su lado opuesto, como también algunas figuras con diagonales perpendiculares entre sí, que cumplen la condición de no-paralelismo enunciada.

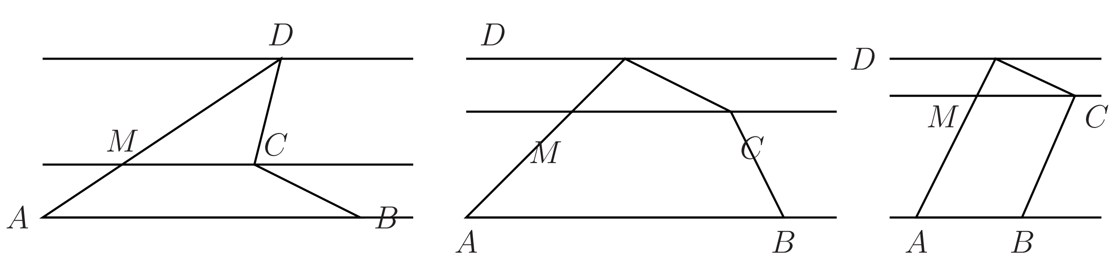

Figura: 14

Sea el cuadrilátero $ABCD$ con base dada AB tal que su lado opuesto CD no es paralelo a ella. El haz paralelo que contiene la base dada constará de tres rectas, una de las cuales (la intermedia) mantiene su orden fijo cualquiera sea el sentido de ordenación que se tome; esta recta será siempre r_1. A su vez, en r_1 se define el único delimitador propio del haz paralelo (MC), lo que nos permite referirnos al mismo en forma particular e inequívoca.

Llamaremos: **b** a la longitud de la base AB; **p** a la longitud del delimitador propio; r_0 a la recta del haz paralelo que contiene a la base dada; **h** al ancho (o altura en este caso) de la figura respecto a la base dada y h' a $d(r_0r_1)$.

Utilizando la fórmula general tenemos:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\sum S(r_i\, r_{i+1})\, d(r_i\, r_{i+1}) \\
&= \frac{1}{2}[(b+p)d(r_0r_1) + (p+0)d(r_1r_2)] \\
&= \frac{1}{2}[bd(r_0r_1) + pd(r_0r_1) + pd(r_1r_2)] \\
&= \frac{1}{2}\{bd(r_0r_1) + p[d(r_0r_1) + d(r_1r_2)] \\
&= \frac{1}{2}(bh' + ph)
\end{aligned}
$$

En palabras puede resumirse así **“semisuma de los productos de la base por su distancia al delimitador propio y de este último por la altura”**.

5. Formula Universal Para el Área del Cuadrilátero:

Con los antecedentes anteriores, podemos proceder a la deducción de esta fórmula. Sea el cuadrilátero $ABCDE$ y AC un diagonal propio. Construimos el haz paralelo que contiene a al diagonal propio y aplicamos la fórmula general para el cálculo de las áreas de los polígonos.

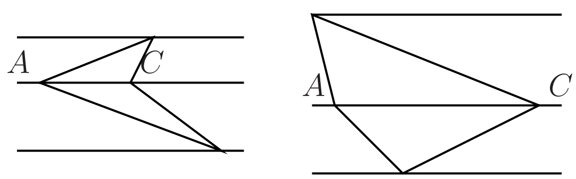

Figura: 15

Llamamos **d** al diagonal propio AC y h al ancho de la figura respecto a d.

Usando la fórmula general:

$$\begin{aligned} A =& \frac{1}{2}\sum S(r_ir_{i+1})d(r_ir_{i+1}) \\ =& \frac{1}{2}(0+\mathrm{d})d(r_0r_1)+(\mathrm{d}+0)d(r1r2) \\ =& \frac{1}{2}\mathrm{d}d(r_0r_1)+\mathrm{d}d(r_1r_2) \\ =& \frac{1}{2}\mathrm{d}d(r_0r_1)+d(r_1r_2) \\ =& \frac{1}{2}\ \mathrm{d}d(r_0r_2), \end{aligned}$$

de lo que se concluye $A = \mathrm{d}h/2$.

Esta fórmula se puede enunciar así:

El área de una figura de 4-lados es igual al semiproducto de cualquiera de sus diagonales propios por su ancho respecto al mismo diagonal.

6. Comentarios Recibidos en Referencia a La Primera Parte:

A manera de comentario se me han formulado algunas preguntas que paso a responder:

Me parece interesante, pero...

1. ¿Por qué no introduces algunos teoremas, propiedades etc..., para que el tratamiento del tema sea más riguroso?

   Respuesta: Lo presentado no es más que un enfoque para el tratamiento del área del polígono. Se ha llegado a la fórmula general por inducción, partiendo de conocimientos ciertos y sólo se han introducido algunos aspectos nuevos que, por su sencillez, no necesitan de mayores comentarios. No obstante, si el enfoque tuviera aceptación habrá quien se interese en mejorar el tratamiento dado.

2. ¿No te parece algo complicado para que el alumno de básica llegue a la fórmula general?

   Respuesta: No se trata de que el alumno llegue a la fórmula general. Se trata de darla por definición y deducir el resto de las fórmulas a partir de esta. Cuando el alumno haya dominado la deducción, podrá generalizar por inducción.

3. ¿Tu crees que ese símbolo de sumatoria y esas notaciones para los delimitadores y distancias están al alcance de los niños de básica?

   Respuesta: Si lo creo. Los niños poseen extraordinarias habilidades para el manejo de símbolos. Más difícil debe ser aprender a leer y escribir y, sin embargo, todos los niños lo aprenden.

4. ¿Entonces el alumno no sabrá calcular áreas hasta que conozca la fórmula general?

   Respuesta: Claro que sabrán calcular áreas antes de dominar la fórmula general. El orden pedagógico y el orden lógico no tienen por que ser iguales. Se pueden introducir las fórmulas de las figuras separadamente.

La fórmula general debe introducirse cuando se tenga la madurez suficiente para comprender que las particulares se pueden deducir de una, más amplia, aplicable a cualquier caso.

Segunda Parte

7. Formula para Calcular el Área del Polígono Regular:

Es evidente que la fórmula general del área del polígono, es válida para cualquier polígono regular. Ya la hemos aplicado para los triángulos, por lo que es válida para el triángulo equilátero, así como para el cuadrado. Si no se ha evidenciado lo que se afirma, solamente pruébese trazando un k-haz que contenga un lado de cualquier polígono regular de cinco lados o más y se observará que queda dividido en figuras menores de tres y/o cuatro lados, como se estableció en la introducción; por que la fórmula le es aplicable.

La deducción directa de la fórmula del polígono regular, a partir de la general del polígono resulta sumamente complicada y, a lo mejor, imposible. Por lo tanto, utilizaremos el procedimiento indirecto de triangulación para la deducción propuesta.

Nos apoyaremos en la secuencia usualmente utilizada por los docentes para la deducción de la fórmula y aseguramiento de su aprendizaje. Esta secuencia sigue los pasos que se mencionan a continuación:

1. Dividir el polígono en triángulos isósceles iguales, con vértices comunes con el centro de la figura;
2. Realizar una analogía entre las alturas de los triángulos con la apotema (ap) del polígono;
3. Calcular el área de uno de éstos triángulos, tomando como base el lado del polígono;

4. Multiplicar el área por el número de triángulos.
5. Operar convenientemente y concluir: $A = pap/2$, donde p es el perímetro del polígono y ap la apotema.
6. Realizar ejercicios (se dice de que polígono regular se trata -siempre a partir del pentágono-, se da una longitud cualquiera para el lado, otra cualquiera para la apotema y se aplica la fórmula conocida. Se repite tantas veces como sea necesario).

De acuerdo al último paso, podemos calcular el área de un hexágono regular cuyas longitudes de la base y de la apotema son $2u$ y u, respectivamente. Aplicando la fórmula, procedemos a nuestros cálculos y concluimos que el área del hexágono dado es $6u^2$

Ahora bien, construyamos seis triángulos de base $2u$ y altura u; si tratamos armar un hexágono regular con esos triángulos, veremos que es imposible. NO PODREMOS ARMAR HEXAGONO REGULAR ALGUNO.

Una manera sencilla de visualizar lo que ocurre, en general, es la siguiente:

Suponemos un hexágono regular de apotema ap y lado l, como el de la izquierda, donde se han destacado los triángulos equiláteros que lo componen y cuyas dimensiones son: l de base y ap de altura.

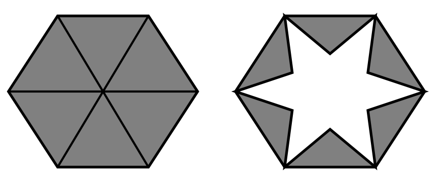

Figura: 16

Si construimos triángulos de base l y altura $ap/2$, por supuesto que no serán equiláteros y con seis de ellos no se armará hexágono alguno. A lo sumo se obtendrá una figura como la que se muestra a la derecha.

Luego, algo falla. Esta falla consiste en que - al igual que el triángulo equilátero y el cuadrado- en cualquier polígono regular: la apotema depende del lado ó el lado de la apotema, por lo que sus magnitudes, entre sí, no son independientes sino dependientes. De allí se desprende que no es correcto dar cualquier par de magnitudes para el lado y la apotema del polígono regular; cuestión que está permitida por la fórmula que presenta a estas dos variables como independientes.

Al enunciar la citada fórmula se ha obviado una condición importante que cumplen los triángulos isósceles cuyas bases son los lados de un polígono regular y sus alturas la apotema: sus ángulos son fijos en cada figura. Por supuesto, al mantener la base constante y variar la altura (apotema) variamos los ángulos; igual sucede si mantenemos constante la altura y variamos la base.

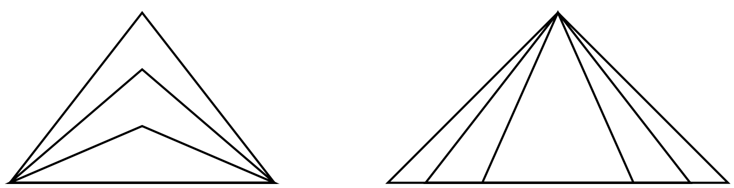

Figura: 17

Podemos obtener un polígono regular de cualquier número de lados, a partir de tres, para cualquier lado dado, o para cualquier apotema dada; pero no es posible obtener un polígono regular para cualquier ángulo al centro dado. Para una mejor comprensión trabajaremos con ángulos medidos en el sistema sexagesimal; observemos la tabla:

POLÍGONO REGULAR	LADOS	ANGULO AL CENTRO°
Triángulo equilátero	3	120
Cuadrado	4	90
Pentágono	5	72
Hexágono	6	60

Como puede observarse, no existen polígonos regulares cuyos ángulos al centro sean tales que $90° < \alpha < 120°$ o $72° < \alpha < 90°$, por ejemplo.

En general: si α y β son los ángulos al centro de dos polígonos regulares de n y $n+1$ lados, respectivamente, no existirá ningún polígono regular que tenga como ángulo al centro θ con $\beta < \theta < \alpha$. Esto nos dice que existe una ilimitada cantidad de ángulos para los que es imposible trazar un polígono regular, siendo estos ángulos al centro.

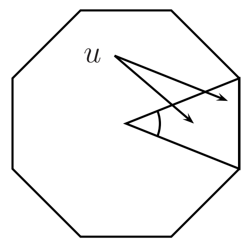

Figura: 18

Veamos, a partir de la tabla, que no es posible construir un hexágono de lado $2u$ y apotema u (véase la figura 18):

El ángulo al centro será $2\arctan\left(\frac{u}{u}\right) = 2\arctan 1 = 90°$; que, como se observa en la tabla, no corresponde al hexágono sino al cuadrado.

Como es fácil observar: en dos polígonos regulares de un mismo tipo (el tipo está determinado por el número de lados) sus triángulos isósceles, con vértice al centro del polígono, son semejantes y, además: en dos polígonos de diferentes tipos, dichos triángulos también son diferentes. Se puede establecer una correspondencia biunívoca entre cada tipo de polígono regular y el triángulo isósceles que lo genera, identificando este último mediante la medida del ángulo desigual (con la excepción obvia del triángulo equilátero). Luego: existe una relación entre el lado y la apotema del polígono regular, única para cada tipo, que se desprende de la unicidad de la relación entre el lado y la altura del triángulo isósceles que puede formar un polígono regular.

De la unicidad de los triángulos isósceles que pueden formar polígonos regulares se deduce que cualquier polígono regular se identifica, en forma inequívoca, si se dan: el número de lados y la longitud del lado ó el número de lados y la apotema. Con cualquier par de estos datos, se puede dibujar y calcular su área, sin equivocación.

Las características de los triángulos siempre se obvian al momento de la deducción de la fórmula del área del polígono regular, lo que ha traido como consecuencia que se de por cierta una conclusión incorrecta.

La fórmula $A = \frac{1}{2}(pap)$ sólo arroja resultados correctos en el caso de que se den el lado y la apotema que correspondan al n-polígono regular dado. Como cualquier fórmula se caracteriza porque los valores de las variables independientes pueden ser asignados a voluntad del experimentador: en casi todos los casos, por no decir en todos, proponemos el cálculo de áreas de "polígonos regulares", matemáticamente, inexistentes. Error que se deriva de la misma fórmula, por poseer un mal diseño en su estructura. Luego: la fórmula $A = \frac{1}{2}(pap)$ **para calcular el área de los polígonos regulares, no es válida; porque incluye en su expresión el producto de dos variables, interdependientes, como si fueran independientes.**

Atendiendo a que la fórmula cuestionada no es más que la expresión de una propiedad de los polígonos regulares, se requiere de una fórmula alternativa que satisfaga las exigencias derivadas de la crítica planteada. Como se sabe, existen otras fórmulas alternativas en la bibliografía sobre Matemática; ninguna de las conocidas es general, más bien se refieren a un tipo de polígono regular en particular y contienen expresiones trigonométricas, por lo que carecen de universalidad y de aplicabilidad en la Educación Básica; por otra parte, quienes utilizan fórmulas alternativas no han justificado los motivos por los cuales dejan a un lado la tradicional fórmula que, aparentemente, resulta ser universal y sumamente sencilla.

8. Formula Para Calcular Áreas de Polígonos Regulares.

Para la deducción de la fórmula utilizaremos el mismo procedimiento que llevó a la criticada; salvo que se introducirán los elementos no tomados en cuenta en esa oportunidad:

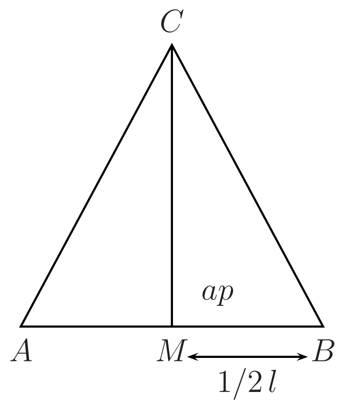

Figura: 19

En la figura a la izquierda puede observarse uno de los triángulos isósceles de un polígono regular cualquiera; donde se señala la apotema y la distancia a los vértices de la base. El ángulo en C es el vértice común de tales triángulos; es decir: el centro del polígono regular; por lo que lo denominaremos: ángulo al centro.

El ángulo BCA es igual a $\dfrac{2\pi}{n}$ (siendo n el número de lados de la figura), por lo que el ángulo BCM es igual a $\dfrac{\pi}{n}$. Calculamos la tangente del último ángulo en función del lado y de la apotema: $\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right) = \dfrac{l}{(2ap)}$de donde $l = 2ap\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

Como el lado está expresado en función de la apotema, podemos utilizar el procedimiento indirecto con confianza, por cuanto el lado y la apotema son correspondientes al polígono regular de n-lados.

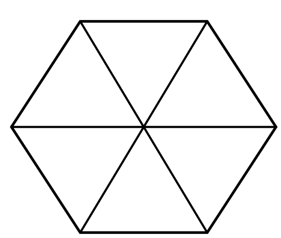

Figura: 20

Seccionamos el polígono regular en triángulos isósceles iguales, cuyas bases son los lados de la figura y los disponemos de tal forma que los lados del polígono se encuentren alineados; luego se traza un haz paralelo respecto a tales lados. De esta manera: la distancia entre las rectas del haz paralelo, $d(r_0 r_1)$, será la altura común de los triángulos (apotema del polígono) y la suma de los delimitadores, $S(r_0 r_1)$, será igual a n veces la longitud del lado del polígono.

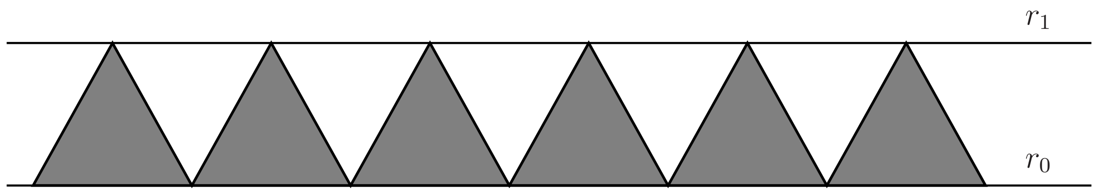

Figura: 21

Aplicando la fórmula general, siendo n el número de lados y expresando este último en función de la apotema, $l = 2ap\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$, tenemos:[1]

$A = \frac{1}{2}\sum S(r_i r_{i+1})d(r_i r_{i+1}) = \frac{1}{2}(nlap) = \frac{1}{2}(n2ap\tan\left(\frac{\pi}{n}\right))ap$ ap donde n es el es el número de lados, l la longitud del lado y ap la apotema del polígono. Cancelando los 2 y por ser $n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ una constante para cada polígono regular que depende sólo del número de lados (n) se tiene: $A_n = n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)ap^2$

Como para cada polígono regular $n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ es un número fijo (constante) que depende sólo de n, podemos denotarlo k_n; por lo que nuestra fórmula quedará:

$A_n = K_n ap^2$ donde k es la constante para el polígono regular de n-lados.

[1]Si no está convencido de la fórmula general del área del polígono, utilice la particular del triángulo y llegará a la misma conclusión.

Se nota que la fórmula es parecida a la del círculo. En esa figura la apotema se hace igual al radio (r) y como:

$$\lim_{n\to\infty} n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi$$

podemos concluir, para el círculo:

$$A_\infty = k_\infty ap^2 = \pi r^2$$

Veamos que podemos calcular el perímetro del polígono regular con la fórmula: $p_n = 2k_n ap$, que equivale a la de la circunferencia $2\pi r$.

Como $l = 2ap\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ se tendrá:

$p_n = nl = n(2ap\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)) = 2(n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right))ap = 2k_n ap$. Donde queríamos llegar.

Y como: $nl = p_n = 2k_n\, ap$ se tendrá: $l = \dfrac{p_n}{n} = 2k_n\,\dfrac{ap}{n}$.

Operando con las fórmulas e igualdades anteriores, podemos deducir las fórmulas a partir del lado: $pn = nl$

$$ap_n = nl/2k_n$$
$$A_n = k_n ap^2 = k_n(nl/2k_n)^2 = n^2l^2/4k_n$$

Con lo que quedan satisfechas las expectativas planteadas.

Ahora contamos con un conjunto de fórmulas válidas para los polígonos regulares; a saber:

En función de la apotema:

$$A_n = k_n ap^2 \qquad p_n = 2k_n ap \qquad l_n = 2k_n ap/n$$

En función del lado:

$A_n = n^2 l^2/4k_n \qquad p_n = nl \qquad ap_n = nl/2k_n$

Despejando convenientemente y sustituyendo,

En función del perímetro:

$$A_n = p^2/4k_n \qquad ap_n = p/2k_n \qquad l_n = p/n$$

En función del área:

$$p_n = 2(k_n A)^{1/2} \qquad ap_n = (A/k_n)^{1/2} \qquad l_n = (2/n)(Ak_n)^{1/2}$$

Donde n indica el número de lados del polígono regular y k_n es la constante específica que le corresponde.

Obsérvese que de $A_n = p_n^{2/4} k_n$ y de $p_n = 2\, k_n ap_n$ obtenemos :

$$A_n = p_n^{2/4} k_n = p_n p_n^{/4} k_n = p_n(2k_n ap_n)/4k_n = p_n ap_n/2$$

Es posible que se piense en la dificultad de definir la constante k_n, dado que hemos utilizado una función trigonométrica para hallarla y estos conocimientos no están al alcance de los estudiantes de Educación Básica. A este respecto se puede argumentar que la constante π se introduce, en el ámbito de Educación Básica, sin muchas explicaciones; simplemente se dice que en toda circunferencia (perímetro del círculo), si dividimos su longitud (perímetro) entre el diámetro (doble del radio), se obtiene un número fijo que denotamos π y cuyo valor es aproximadamente 3,1416. Podemos introducir la constante k_n con un razonamiento análogo:

Llamando L a la longitud de la circunferencia y D al diámetro se tiene:

$$\pi = L/D = L/2r = p_\infty/2ap_\infty$$

Si despejamos k_n en la fórmula $p_n = 2k_n ap_n$ nos resultará: $k_n = p_n/2ap_n$, que es análoga a la de la constante π; es más: π es uno de los casos particulares de constantes para los polígonos regulares.

En adelante tendríamos que decir que para cada tipo de polígono regular, si se divide el perímetro entre el duplo de la apotema se obtendrá un número constante denominado constante de semiproporcionalidad, el cual indica la relación que existe entre la longitud del semiperímetro (mitad del perímetro) y la apotema.

Seguidamente indicamos las constantes k_n para algunos polígonos regulares, con una apreciación de cuatro decimales:

POLÍGONO REGULAR	LADOS	SÍMBOLO	VALOR APROX.
Triángulo equilátero	3	K_3	5,1962
Cuadrado	4	K_4	4,0000
Pentágono	5	K_5	3,6327
Hexágono	6	K_6	3,4641
Heptágono	7	K_7	3,3710
Octágono	8	K_8	3,3137
Nonágono	9	K_9	3,2757
Decágono	10	K_{10}	3,2492
Endecágono	11	K_{11}	3,2299
Dodecágono	12	K_{12}	3,2154
....			
Círculo (*)	∞ (*)	K_∞ o π	3,1416

Tabla: 1

(*) Considerado como polígono regular de infinitos (?) lados.
Es obvio que una tabla como la anterior sólo sería de utilidad para quienes carezcan de conocimientos de trigonometría, como los cursantes de Educación Básica, ya que se obtendrían mejores aproximaciones sustituyendo la constante por la función trigonométrica correspondiente. Las fórmulas trigonométricas son las siguientes:

En función de la apotema:

$$\begin{aligned}
A_n =& k_n ap^2 = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) ap^2 \\
P_n =& 2k_n ap = 2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) ap \\
l_n =& 2k_n \frac{ap}{n} = 2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \frac{ap}{n} = 2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) ap
\end{aligned}$$

En función del lado:

$$\begin{aligned}
A_n =& \frac{n^2 l^2}{4} k_n = \frac{n^2 l^2}{4} n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{nl^2 \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)}{4} \\
P_n =& nl \\
ap_n =& \frac{nl}{2k_n} = \frac{nl}{2} n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{l \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}
\end{aligned}$$

Despejando convenientemente y sustituyendo,

En función del perímetro:

$$\begin{aligned}
A_n =& \frac{p^2}{4k_n} = p^{2/4} n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{p^2 \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)}{4n} \\
ap_n =& \frac{p}{2k_n} = \frac{p}{2} n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{p \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2n} \\
l_n =& \frac{p}{n}
\end{aligned}$$

En función del área:

$$
\begin{aligned}
p_n =& 2(k_nA)^{1/2} = 2\left(n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)A\right)^{1/2} = \\
=& (4n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right))A)^{1/2} \\
ap_n =& \left(\frac{A}{kn}\right)^{1/2} = \left(\frac{A}{n\tan(\pi/n)}\right)^{1/2} = \left(\frac{A\cot(\pi/n)}{n}\right)^{1/2} \\
l_n =& (2/n)(Ak_n)^{1/2} = (2/n)\left(nA\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{1/2} = \\
=& \left(\frac{4A\tan(\pi/n)}{n}\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Donde n indica el número de lados del polígono regular y k_n es la constante específica que le corresponde.

La escogencia de la fórmula $A_n = k_n ap^2$ (en vez de $A_n = n^2l^2/4k_n$ o $A_n = p^2/4k_n$), tiene la finalidad de presentar una fórmula cuya estructura sea la misma que la del área del círculo: $A = \pi r^2$. Esto nos permite considerar a todos los polígonos regulares como una familia que incluye desde el triángulo equilátero, pasando por el cuadrado y el resto de los polígonos regulares hasta llegar al círculo. Con la introducción de la constante k_n se facilita el establecimiento de relaciones entre polígonos de diferentes tipos; tema que no se trata en la enseñanza de la Geometría, actualmente.

Si se tiene en cuenta la existencia de la relación entre el lado y la apotema del polígono regular, y si se tiene en cuenta de que la fórmula criticada sólo expresa una propiedad de los polígonos regulares; se puede llegar a la fórmula propuesta mediante los siguientes pasos:

A. Expresando el perímetro en función del lado (l) y el número de lados (n), de la relación se obtiene $A = nlap/2$:

B. Expresando el lado en función de la apotema y la razón entre ellos se obtiene $A = n2\tan(180°/n)apap/2$;

C. Cancelando los 2 y por producto de potencias de igual base se obtiene: $A = n\tan(180°/n)ap^2$;

D. Por ser $n\tan(180°/n)$ un valor fijo en cada tipo de polígono regular; para eliminar la expresión trigonométrica lo llamamos k_n y obtenemos $A_n = k_n ap^2$.

Lo anterior no debe entenderse como "redefinición de la fórmula", ya que no se parte de una fórmula para llegar a otra. Tal como se dijo: se parte de una propiedad, evidentemente cierta, para llegar a una fórmula correctamente estructurada.

9. Dilema de las Infinitas Constantes Para el Calculo de las Áreas de los Polígonos Regulares.

La fórmula correcta para el cálculo de las áreas de los polígonos regulares nos plantea el siguiente dilema: ¿ Hasta dónde vale la pena tomar en cuenta la constante de semiproporcionalidad en el cálculo de áreas de los polígonos regulares?.

A esto podemos responder: Hasta donde la exactitud del cálculo lo requiera.

Si consideramos las constantes de semiproporcionalidad veremos la tabla de la página siguiente, con aproximación hasta la millonésima.

LADOS	SÍMBOLO	VALORA PROX.
311	K_{311}	3,1416995
....	......	....
425	K_{425}	3,1416498
772	K_{772}	3,1416099
....	....	....
1179	K_{1179}	3,1416000
....	.	....
1187	K_{1187}	3,141599
......	....	....
∞	K_∞ o π	3,1416 !!!

Tabla: 2

Si utilizamos la constante 3,1416 para calcular el área de un círculo, dado su radio, podemos decir que en realidad se está calculando el área de cualquier polígono regular de 1179 lados o más. O bien el de un polígono regular que tenga entre 311 y 1178 lados, con aproximación por defecto.

La constante de semiproporcionalidad para un polígono regular de ciento veinte lados es aproximadamente: 3,1423105; lo que nos induce a pensar que utilizar el valor aproximado de π (3,1416), para calcular su área sería contraproducente.

Observemos el polígono regular, en el interior de la imagen, de 120 lados (que ha sido construido con cuarenta triángulos equiláteros) :

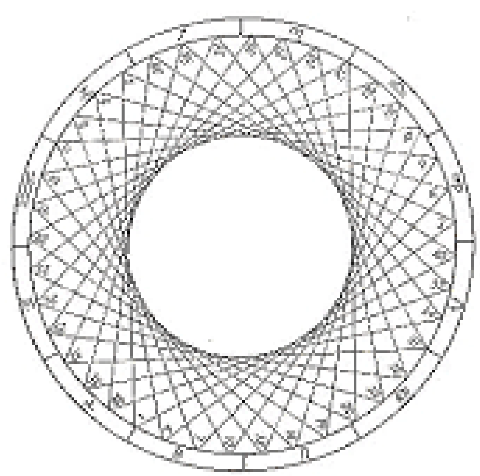

Figura: 22

¿Se puede diferenciar, a simple vista, si lo que está en el interior de la imagen es un polígono regular o un círculo?.

Cada persona tiene la posibilidad de elegir la aproximación más adecuada para sus cálculos. Desde el punto de vista del docente de Educación Básica, considero que la tabla dada satisface las necesidades más comunes, siempre que se esté claro que cada polígono regular tiene una constante de semiproporcionalidad propia.

10. Comentarios y Observaciones Referidas a la Segunda Parte:

Los tres comentarios que se indican más adelante fueron emitidos por tres especialistas a quienes se les consultó en referencia al aspecto tratado. Se enumera cada comentario y se responde cada uno.

1. "La fórmula criticada es correcta, el problema radica en el docente que no se asegura de proporcionar los datos adecuadamente."

   Respuesta: Si el docente da el lado de cierto polígono regular y debe calcular la apotema que le corresponde, o si da la apotema y debe calcular el lado correspondiente, para no errar... ¿No es sensato pensar que fórmula contenga sólo una de esas variables y un factor que permita expresar la otra en función de la dada, atendiendo a la relación entre ellas según el tipo de polígono regular?.

   Si el docente calculara y proporcionara los datos adecuadamente. ¿No estaría incurriendo en un error peor al no mencionar la existencia de la relación? y ¿No estaría negando un conocimiento a la vez de que estaría enseñando una falsedad cuando lo que debe enseñar es la verdad?.

   En toda fórmula matemática se debe tomar en cuenta que la única variable dependiente debe corresponder al elemento a calcular y que, además, la cantidad de elementos intervinientes sea la mínima necesaria que permita el cálculo de la variable dependiente, en la forma más sencilla, rápida y directa posible. Toda fórmula es función del (de los) elemento(s) interviniente(s).

Esas premisas no se cumplen en la fórmula criticada; pues, como he mencionado: las variables independientes no son tales Por otra parte, debido a que sería necesario calcular una de las variables "independientes"en función de la otra, para proporcionar el dato correcto, el cálculo deja de ser sencillo, rápido y directo. Estas son las razones que invalidan la fórmula, desde el punto de vista de su estructura.

2. "La fórmula criticada es correcta. El problema se evita midiendo bien el lado y la apotema."

   Respuesta: Esta insinuación supone que es necesaria la presencia del objeto real para realizar las mediciones; lo que es un absurdo, porque niega a la Matemática su condición de Ciencia Formal.

   En Matemática podemos trabajar con infinidad de objetos virtuales; tan grandes o tan pequeños como se quiera. Si suponemos necesaria la presencia del objeto real y deseamos calcular el área de un dodecágono regular de diez kilómetros de apotema: ¿sería necesario construirlo para medir su lado?.

3. "En cuanto a decir que la fórmula del área es incorrecta, preferiría interpretar la situación que usted plantea como un uso fuera de contexto de la fórmula. (Cosa que como usted señala es planteado hasta en ciertos textos). Para hacer claro el punto, le puedo dar el siguiente ejemplo. El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de los lados del polígono. Sea un triángulo cuyos lados son 2, 3 y 7. Halle el perímetro de este triángulo. Evidentemente la suma de esos tres números no representa el perímetro del triángulo de lados 2, 3 y 7 porque ese triángulo no existe. ¿Se puede concluir que la definición de perímetro es incorrecta? ¿O sería más apropiado concluir que se ha pedido su aplicación en una situación inapropiada? "

   Respuesta: Si una fórmula está bien estructurada; es posible dar cualquier dimensión para las variables independientes sin preocuparnos del contexto, salvo para unos pocos casos (si existieran) donde se mencionarían restricciones pertinentes. La fórmula será válida en la medida que se logre el objetivo propuesto para la generalidad de los casos aunque no sea aplicable para alguno(s) en particular; en cuyo(s) caso(s) se suele acompañar la fórmula con las restricciones apropiadas, o se estructura una fórmula particular. Tomo el ejemplo para dar mayor claridad a lo expuesto:

Partiendo de la definición de perímetro, al aplicarse al triángulo en general, en función de sus lados: a, b, c; la fórmula debe ser acompañada de una restricción:

$$p = a + b + c, \qquad |a - b| < c < a + b.$$

Si se trata de triángulos rectángulos la fórmula varía:

En función de los catetos a, b :

$$p = a + b + (a^2 + b^2)^{1/2}$$

En función del cateto a y la hipotenusa c:

$$p = a + c + (c^2 - a^2)^{1/2}, \qquad c > a.$$

Como observará: para los triángulos rectángulos, una de las fórmulas carece de restricciones y la otra las necesita. En cualquier caso las restricciones deben corresponder en forma exclusiva e inmediata a los elementos intervinientes en la fórmula; pues, siempre habrán restricciones que pertenecen al entorno general del asunto que se estudia y que, tácitamente, están dadas (por ejemplo: las longitudes deben ser números positivos).

La definición y la fórmula son dos cosas diferentes; aunque estrechamente relacionadas; la fórmula debe contener, o llevar, a la definición. En ocasiones la fórmula y la definición pueden coincidir con exactitud; pero en otras no, si se toman en cuenta las premisas mencionadas; como veremos a continuación:

Fórmulas para calcular el perímetro y el área de un cuadrado:

En función del lado (l):	$p = 4l$	$A = l^2$
En función del diagonal (d):	$p = 2\sqrt{2}d$	$A = d^2/2$
En función de la apotema (a):	$p = 8a$	$A = 4a^2$
En función del área (A):	$p = 4\sqrt{A}$	
En función del perímetro:		$A = p^2/16.$

Ninguna de esas fórmulas tiene restricciones; porque sus estructuras obligan a ubicarse en el contexto propio de la figura.

Cito otro ejemplo: el área de un rectángulo se calcula multiplicando el largo por el ancho, en términos generales; sin embargo, las fórmulas para calcular áreas de rectángulos aúreos son las siguientes:

En función del lado menor (a):	$A = a^2\varphi$
En función del lado mayor (l):	$A = l^2/\varphi$

Donde: $\varphi \approx 1,618034$

Según mi punto de vista: cualquier estructura que conduzca a un resultado cierto no puede considerarse una fórmula. Piénsese si, para el caso del cuadrado, la siguiente es una fórmula:

$$A = \frac{(\sqrt{2}ldpap)^{1/2}}{2}$$

De acuerdo a lo expuesto y en el supuesto de que la fórmula cuestionada sea aceptable, la misma debería ser presentada de esta forma:

Área del polígono regular en función del perímetro y la apotema:

$A = pap/2$ $p = 2n\tan(180°/n)ap$, donde n es el número de lados
y también:
$A = pap/2$ $ap = p/2n\tan(180°/n)$, donde n es el número de lados.

La fórmulas anteriores carecen de sencillez y no son nada directas; ya que en cada "fórmula"hay que aplicar dos fórmulas para calcular el área del polígono regular; siempre que al aplicar la segunda observemos que los datos no están fuera de contexto. Por otra parte, si aplicamos la primera “fórmula”: en realidad se calcula el área en función del número de lados y la apotema; si aplicamos la segunda, la verdad será que calculamos el área en función del perímetro y el número de lados. Entonces, nada es más sensato que fundir las dos fórmulas para obtener una sola.

Ahora bien, si el contexto es el conjunto de: normas; reglas; condiciones; valores; propiedades; sistemas; etc.. ; que rigen un asunto para lograr un objetivo determinado: ¿no es posible pensar que la fórmula cuestionada está fuera del contexto de lo que debe ser una fórmula correctamente estructurada?.

Bibliografía

[1] B.I. Argunov, y L.A. Skorniakov *teoremas de configuración*, Lecciones Populares de Matemáticas, MIR, Moscú, 1980.

[2] J.A. Baldor, *geometría plana y del espacio con introducción a la trigonometría*, Cultural Centroamericana S.A. Madrid 1981.

[3] N.M. Beskin, *división de un segmento en la razón dada*, Lecciones Populares de Matemáticas, MIR, Moscú, 1976.

[4] V.G Boltianski, y I. Gojberg *División de figuras en partes menores*, Lecciones Populares de Matemáticas, MIR, Moscú, 1978.

[5] G Doroferev, *y otros temas selectos de matematicas elementales*, MIR, Moscú 1973.

[6] Ch Edwards, y Penney David E. *cálculo con geometría analítica*, Prentice Hall Hispanoamericana S.A. México 1994.

[7] Yu. I. Kyubich Y L.A. Shor *método cinemático en problemas geométricos*, Lecciones Populares de Matemáticas, MIR, Moscú, 1978.

[8] P.R MASANI y otros *cálculo diferencial e integral*, Publicaciones Cultural S.A. México 1989.

[9] Edwin Moish, y Foyd Downs Jr. *Geometría*, Serie Matemática Moderna IV. NORMA. Cali 1972.

[10] James R Newman, *el mundo de las matemáticas*, Ediciones Grijalbo, Barcelona 1979.

[11] Enrique Navarro, *curso propedéutico de matemática E*, NAVARRO Caracas s/f.

[12] Eugene D. Nichols, y otros *geometría moderna*, Editorial Continental, México 1971.

[13] A.V. Poroglevov, *geometría elemental*, MIR, Moscú 1974.

[14] V.G. Shervàton, *funciones hiperbólicas*, Lecciones populares de matemáticas, MIR, Moscú, 1975.

[15] I Suvorov, *curso de matemáticas superiores*, MIR, Moscú 1973.

[16] A.G. Tsipkin, *manual de matemáticas para la enseñanza media*, MIR, Moscú 1985.

[17] N.B. Vasiliev y Gutenmájer V.L. *rectas y curvas*, MIR, Moscú 1980.

[18] Gustavo Yanes Y, *enfoque para la enseñanza del cálculo del área de las figuras planas en el séptimo año de educación básica*, Monografía presentada al IUMPM, 1984.