Perspectiva sociocultural del aprendizaje de la multiplicación

Rodolfo Vergel Causado
Profesor Corporación Universitaria Republicana
Bogotá D.C, Colombia
rodo30_2000@yahoo.es

Resumen

Este artículo hace parte del trabajo "*Criterios y Prácticas de Evaluación en torno a la Multiplicación*", tesis de maestría en proceso, la cual intenta contribuir al desarrollo del proyecto de investigación "Modelos y Prácticas Evaluativas de las Matemáticas en la Educación Básica. El caso del Campo Multiplicativo", proyecto financiado por Colciencias y la Universidad Pedagógica Nacional (Código1108-11-11328). Se realiza en este escrito un análisis del proceso de aprendizaje en torno al concepto de multiplicación desde la perspectiva sociocultural. Es pertinente señalar que la multiplicación es un concepto que se encuentra estrechamente relacionado con otros como: división, fracción, razón, proporción, función lineal,... y que conforman lo que Vergnaud (1994) ha denominado el Campo Conceptual Multiplicativo (CCM), por lo que su aprendizaje integra la necesidad de conectar estos conceptos con un campo de problemas y situaciones de tipo multiplicativo. En este sentido cobra importancia la cita de Sfard, en tanto, por ejemplo el aprendizaje de este concepto requiere un largo periodo de tiempo.

En la primera parte del artículo se plantean algunos presupuestos teóricos que se comparten y ayudan a fundamentarlo, posteriormente se explicita qué es lo que se entiende por aproximación sociocultural del aprendizaje de la multiplicación, integrando la noción de competencia multiplicativa y finalmente se presenta los análisis de dos ejemplos en los cuales se muestra la complejidad de la multiplicación, en tanto se videncia el desarrollo de competencias cada vez más complejas.

1. Presupuestos Teóricos

Se comparte a lo largo de este escrito los siguientes planteamientos como elementos constitutivos:

- *El conocimiento es operativo, lo que significa que todo concepto se conforma a través de las situaciones que vive el sujeto en la acción de búsqueda de soluciones a los problemas que se plantea (punto de vista pragmático).*
- *Los conceptos se forman (no se adquieren) a lo largo de un gran periodo de tiempo. Una sola situación no basta para instalar un concepto, son necesarias varias situaciones para que un concepto funcione en sus diversos aspectos y para que aparezca la multitud de relaciones que tiene con otros conceptos.*
- *El hecho didáctico no debe ser explicado por el estudio aislado de cada uno de sus componentes y entonces se sigue que es necesario el análisis del "sistema didáctico"(Chevallard, 1998), formado por la tríada profesor-alumno-saber (enseñado), considerando el contexto en el que el hecho didáctico se produce.*
- *Para que los saberes matemáticos ingresen a la escuela deben sufrir una re-elaboración didáctica, que los re-contextualiza, los re-personaliza y los re-temporaliza. Es en esta re-elaboración didáctica donde se debe centrar la actividad profesional del maestro de matemáticas, a fin de posibilitar en los estudiantes una verdadera actividad científica. Por tanto, enseñar, para un profesor, (Douady, 1996, p. 242) es crear las condiciones que producirán a la larga en los alumnos el saber. Debemos aprender los docentes a no transmitir conocimientos hechos sino a plantear las situaciones que harán que los niños elaboren sus propios conocimientos.*

Una aproximación sociocultural del aprendizaje de la multiplicación considera que los procesos mentales humanos poseen una relación esencial con los escenarios culturales, históricos e institucionales. Ello posibilita identificar las nociones y los teoremas matemáticos asociados con la multiplicación como parte de un cuerpo *dinámico* de conocimientos reconocidos socialmente. Luego el sujeto se convierte en un miembro de una cierta comunidad (el aula de clase de matemáticas). Esto impone en el sujeto la habilidad para comunicarse en el lenguaje de la comunidad y actuar de acuerdo a sus normas particulares, en este sentido, las normas se negocian en el proceso de consolidación de la comunidad.

En esta misma dirección se comparte con Godino y Batanero (1994) que los objetos matemáticos, en particular el de multiplicación, *deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo.* De este planteamiento se desprende el hecho que el significado del concepto multiplicación está íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, por lo que es imposible reducir dicho significado a su mera definición matemática.

Es posible afirmar, en consecuencia, que el significado del concepto multiplicación deriva del contexto en que está implicado, entendiendo por contexto en el sentido de Godino y Batanero (1998), *como el conjunto de factores del mundo extra e intralinguístico que soportan y determinan la actividad matemática, y por tanto, la forma, la adecuación y el significado de los objetos puestos en juego en la misma.*[1]

En otras palabras, las dimensiones culturales y sociales no son condiciones periféricas del aprendizaje matemático sino parte intrínseca del mismo, es decir, los procesos culturales y sociales son parte integrante de la actividad matemática. Bauersfeld (citado por Godino y Llinares, en prensa) postula que la interacción sociocultural puede esquematizarse en:

[1]El contexto puede describirse como el marco o escenario en que se desarrolla la actividad matemática, y que viene caracterizado por: sus elementos interpretativos (convenciones, reglas) e instrumentales (recursos tecnológicos); su organización interna, esto es, la naturaleza sistémica de las relaciones entre sus elementos; y su asociación a sistemas expresivos que requieren traducciones mutuas.

- *el profesor y los estudiantes constituyen interactivamente la cultura del aula.*

- *las convenciones y convenios tanto en lo relativo al contenido de la disciplina, como en las regularidades sociales, emergen interactivamente.*

- *el proceso de comunicación se apoya en la negociación y los significados compartidos.*

Por lo tanto el aprendizaje de la multiplicación no se concibe como el compromiso de la mente individual que intenta adaptarse a un entorno; por el contrario, lo que se quiere establecer aquí es que la construcción individual de significados en la clase de matemáticas tiene lugar en interacción con la cultura de la clase, y al mismo tiempo contribuye a la constitución de esta cultura. En dicha interacción es necesario, por supuesto, el lenguaje, pero no escindido del pensamiento, esto es, el habla es un práctica social, sirviendo en la comunicación para señalar experiencias compartidas y para la orientación en la misma cultura de la clase, más que un medio de transmisión cultural en el sentido de Vygotsky.

Las investigaciones realizadas sobre el pensamiento multiplicativo, específicamente la de Vergnaud (1981), reconocen también una posición sociocultural del aprendizaje. Desde esta perspectiva este autor señala

"No sólo es importante que las situaciones sean clara y exhaustivamente clasificadas desde el punto de vista de la estructura conceptual, sino que también los invariantes (conceptos y teoremas) sean verbalizados, simbolizados, diagramados o graficados, y así estos vienen a ser elementos de explicitación racional de las concepciones y no sólo elementos remanentes o sólo esquemas implícitos. Es probablemente una condición necesaria para la transferencia de conceptos y teoremas a cualquier clase de valores numéricos y cualquier dominio de experiencia."

Esta es la razón por la que estos trabajos consideran importante el lenguaje y los símbolos, pues la explicación y la simbolización se constituyen en una ruta importante a través de la cual se posibilita una ganancia en complejidad cognitiva. En palabras de Vergnaud (2001)

"Escribir con palabras, así como mediante símbolos, tiene entonces una función importante: de clarificación, de generalización de análisis de las condiciones y de los límites de validez del razonamiento, así como del laconismo de las formulaciones y de las fórmulas."

Los signos, pues, una vez más desempeñan un mecanismo de mediación, por lo que el lenguaje como medio de interacción social cobra vital importancia.

2. La Noción de Competencia Multiplicativa

Indudablemente esta postura frente al aprendizaje de conceptos matemáticos, por ejemplo el de la multiplicación, no puede soslayar el estudio del desarrollo de las competencias. En una primera aproximación, la competencia matemática se entiende como la capacidad para realizar adecuadamente tareas matemáticas específicas. Esta caracterización de la competencia matemática está asociada, o mejor, debe complementarse con la comprensión matemática de las técnicas necesarias para realizar las tareas y de las relaciones entre los diversos contenidos y procesos matemáticos puestos en juego. Son estas relaciones entre los contenidos matemáticos las que interesa en la teoría de Vergnaud de los campos conceptuales.

En términos de Godino (en prensa), la competencia matemática y la comprensión en matemáticas son nociones cognitivas complementarias cuyo logro implica un proceso de crecimiento progresivo que debe tener en cuenta las diversas facetas del conocimiento matemático y sus relaciones con el mundo empírico. Este crecimiento progresivo puede interpretarse como el desarrollo de competencias matemáticas cada vez más complejas, tal y como se establece en la teoría del CCM de Vergnaud, en la cual la noción de multiplicación se hace cada vez más compleja, por ejemplo, cuando se introducen otros universos numéricos distintos de los naturales; ello demanda, por supuesto, una complejidad para el logro de la comprensión matemática de la multiplicación. De este análisis, no es posible afirmar que se tiene o no la competencia, se comprende o no se comprende un contenido matemático, pues hay que concebir los procesos en progresivo crecimiento y en este sentido deberían ser valorados.

Por lo tanto es necesaria una dialéctica competencia-comprensión, teniendo en cuenta que es imprescindible tener disponible cierta práctica "instrumental"(por supuesto que adquirida en contextos significativos que involucra la "comprensión"de la misma) para avanzar hacia otras problemáticas de "comprensión"más complejas.

La competencia es resignificada por Vergnaud, y toma distancia de la caracterización realizada por Piaget para quien la competencia refiere a la dinámica universal de las estructuras lógicas que el sujeto ideal usa en su interacción con el mundo. Vergnaud (1981), por su parte, señala que las competencias complejas de los niños están ligadas a formas de conocer a fondo situaciones y problemas asociados a estructuras conceptuales y argumentativas. En un trabajo posterior, Vergnaud (2001) define la competencia con criterios (los cuales se comparten en este trabajo) relativamente diferentes:

- *es más competente el que sabe tratar las situaciones y resolver los problemas, que aquellos que no los saben tratar;*
- *es más competente el que los resuelve de una manera más económica, más fiable, más rápida, más general, o conceptualmente más elaborada;*
- *es más competente el que dispone de una variedad de medios alternativos para resolver los problemas de una misma categoría, y puede escoger el método mejor adaptado en función de los valores que toman ciertos parámetros de la situación.*

En relación con el segundo criterio establecido por Vergnaud, él mismo pone de presente el siguiente ejemplo: "¿cuánto dinero necesita una abuela para dar 15F a cada uno de sus 7 nietos?", a partir del cual manifiesta que ciertos alumnos pueden recurrir a la adición $15+15+15+15+15+15+15$ y otros a la multiplicación 15×7. En seguida dice que los dos procedimientos son buenos, pero el segundo es más potente y más económico que el primero.

Vergnaud distingue entre competencias funcionales y formales. Las primeras refieren al uso del conocimiento de manera espontánea e inconsciente por parte del sujeto, en acciones ordinarias, como las labores del hogar, de trabajo, en los juegos de los niños y adultos. La competencia formal, por su parte, hace referencia a un contenido que es analizado y reflexivo, por lo que hay necesidad de simbolizar y representar. En consecuencia, el desarrollo de las competencias complejas está permeado por contextos sociales y culturales. García et al (2003) señala que los procesos de mediación social y cultural, tales como la enseñanza, la variedad de situaciones, símbolos, diagramas, gráficas y el punto de vista situacional, identifican al sujeto de la competencia, como sujeto contextualizado, concreto y cambiante, es decir un sujeto social. Es entonces, gracias a la experiencia social y cultural que pueden desarrollarse las competencias matemáticas complejas, es decir, gracias a la interacción con el otro, a la adquisición de pautas sociales y al manejo de instrumentos culturales.

"Los conceptos y teoremas implícitos no pueden ser naturalmente debatibles. Entonces una enorme cantidad de la discusión que se espera de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas puede no tener lugar en la matemática que consta sólo de esquemas. Hay necesidad de simbolización y formalización, que hacen distintas matemáticas de una masa de esquemas dirigidos a una masa de situaciones. (Vergnaud, 1981)"

La representación es un aspecto capital vía la conceptualización, pues culturalmente juega un papel importante para la construcción de significado por parte del sujeto.

Para estudiar y comprender cómo los conceptos matemáticos se desarrollan en la mente de los niños y niñas a través de sus experiencias en la escuela y fuera de ella, Vergnaud plantea que uno necesita considerar un concepto C como una terna de tres conjuntos:

$$C = (S, I, R)$$

S: el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto.

I: el conjunto de las invariantes operacionales que pueden ser usadas por los sujetos para significar dichas situaciones.

R: el conjunto de representaciones simbólicas, lingüísticas, gráficas o gestuales que pueden ser usadas para representar invariantes, situaciones y procedimientos.

A partir de esta definición de concepto introducida por Vergnaud se vislumbra una complejidad para los conceptos inmersos en el CCM, en particular para el de multiplicación, hecho que toma mayor fuerza si se comparte la tesis según la cual los *conceptos se forman a lo largo de un gran periodo de tiempo. Una sola situación no basta para instalar un concepto, son necesarias varias situaciones para que un concepto funcione en sus diversos aspectos y para que aparezca la multitud de relaciones que tiene con otros conceptos.*

El nivel de complejidad de la multiplicación empieza a aumentar a partir del trabajo en distintos universos numéricos y por la experiencia de nuevos fenómenos. De esta manera, es preciso extender el significado de "número de veces"si se quiere dar sentido a la multiplicación de fracciones o de números decimales. En este mismo sentido, una conceptualización completa de una operación como la multiplicación implica la comprensión del efecto de la operación sobre varios números incluyendo naturales y racionales, ello acompañado de los nuevos significados del número que comporta la multiplicación, tal y como lo establece Lamon (en razonamiento multiplicativo año):

"...las estructuras multiplicativas combinan dos magnitudes con diferentes etiquetas, para producir una cantidad cuya etiqueta no es la misma como multiplicando o como multiplicador. Por ejemplo, 5 bolsas de dulces con 6 dulces por bolsa producen 30 dulces (no bolsas de dulces ni dulces por bolsa). En algún momento el resultado es una cantidad intensiva, una nueva unidad de medida, una relación especial entre dos cantidades extensivas. Esta nueva cantidad necesita ser conceptualizada como entidad en si misma, diferente de las medidas que la componen. Por ejemplo, si un carro viaja una distancia de 207 millas en 3 horas el promedio es más o menos de 69 millas por hora (no millas, ni horas). Así, las estructuras involucran muchas capas de complejidad cognoscitiva...."

En últimas, es posible considerar que el problema que plantea la multiplicación es un problema de cambio de unidades, como en el caso de encontrar el área de un rectángulo, en el sentido de que es difícil comprender cómo multiplicando la medida del largo cuya unidad se da en cm por la medida del ancho también en cm, se obtiene como "por arte de magia"una unidad dada en cm^2.

Con el propósito de ilustrar y analizar las actividades de tipo cognitivo y el desarrollo competencias, se presentan el análisis de los siguientes ejemplos.

Una libra de yuca cuesta \$600*, ¿cuánto cuestan* 5 *libras de yuca?,*

Este tipo de situación, generalmente su solución se ha abordado a partir de la siguiente relación ternaria:

$$600 \times 5 = 3000, \quad \text{o} \quad 5 \times 600 = 3000$$

a través de la cual se introduce la multiplicación como suma repetida. Cabe anotar que esta manera de abordar la solución del ejercicio, elude, en particular, el problema del análisis dimensional, es decir, saber por qué el resultado de la multiplicación da en pesos y no en libras de yuca.

Vergnaud (2000) señala que este tipo de situaciones corresponde a una relación cuaternaria:

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow 600 \\ 5 \longrightarrow \times \end{array}$$

en la cual dos de las cantidades son de un espacio de medida (1 y 5 son medidas de peso) mientras que las otras dos son de otro espacio de medida (600 y x son las medidas del valor en pesos).

Esta presentación permite analizar las diferencias entre la multiplicación 600×5 y 5×600, lo cual muestra que las dos se basan en teoremas diferentes, que en este caso corresponden a propiedades del isomorfismo que se da entre los dos espacios de medida (función lineal).

Así, la multiplicación 600×5, muestra la aplicación del operador escalar $\times 5$ (como se muestra en la siguiente figura), que corresponde a aplicar dentro del espacio de medida valor en pesos, el mismo operador que transforma 1 en 5 a 600, para obtener 3000, este operador vertical no tiene dimensión, que corresponde a la propiedad aditiva de isomorfismos:

$$f(1+1+1+1+1) = f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1)$$

de la cual se deriva conceptualmente la propiedad multiplicativa de isomorfismos, $f(n \cdot 1) = nf(1)$, que para nuestro ejemplo, es $f(5 \cdot 1) = 5f(1)$, donde $f(1) = 600$

$$\begin{tikzcd}
\text{N}^{\text{o}} \text{ libras de yuca} & \text{Valor en Pesos} \\
1 \arrow[d, bend right, "(\times 5)"'] & 600 \arrow[d, bend left, "(\times 5)"] \\
5 & 3000
\end{tikzcd}$$

Este teorema, como lo afirma Vergnaud (1985), se encuentra implícito en las actuaciones de los estudiantes (*teorema en acto*) cuando se enfrentan a situaciones de carácter multiplicativo. Puede apreciarse, en este caso, que 5 puede escribirse como una combinación lineal, o, lo que es equivalente a afirmar que entre 1 y 5 existe un operador escalar $\times 5$.

Por su parte, la multiplicación 5×600 permite ver la aplicación del operador funcional ($\times 600$ pesos/libras de yuca), como se muestra en la siguiente figura, el cual relaciona los dos espacios de medida y es el mismo que se aplica a 1 libra de yuca para obtener 600 pesos, como a 5 para obtener 3000 pesos. Este operador horizontal tiene dimensión (pesos/libras de yuca). En este caso se usa la propiedad del coeficiente constante $f(x) = ax$, lo que en el ejemplo, sería $f(5) = 600 \times 5$.

$$\begin{tikzcd}
\text{N}^{\text{o}} \text{ libras de yuca} & \text{Valor en Pesos} \\
1 \arrow[r, "(\times 600 \text{ pesos/lib de yuca})"] & 600 \\
5 \arrow[r, "(\times 600 \text{ pesos/lib de yuca})"'] & 3000
\end{tikzcd}$$

El análisis presentado permite ver una diferencia a nivel conceptual de las diferentes maneras para abordar el problema, lo cual muestra cada una un nivel de competencia diferente. Puede afirmarse, por ejemplo, que el operador funcional se constituye en un nivel más elaborado puesto que implica no sólo la noción de relación numérica sino igualmente la de cociente de dimensiones. En este mismo sentido, lo que define el desarrollo de *competencias multiplicativas* cada vez más complejas en el estudiante, al finalizar la educación básica, es el hecho que reconozca la función lineal y sus propiedades como una herramienta más potente en el tratamiento de situaciones de tipo multiplicativo; y que esté posibilitado para iniciar el estudio de ésta (la función lineal) como objeto.

De esta manera Vergnaud, al presentar la multiplicación como una relación cuaternaria, evidencia la potencia de la representación, en tanto permite explicitar la presencia de la función lineal, ya que aparece un operador funcional que cumple con las propiedades de linealidad.

Ahora bien, el problema anterior se complejiza cuando no es dado el precio de la unidad, así el siguiente problema:

Cuatro libras de yuca valen \$2400*, ¿cuánto cuestan* 9 *libras de yuca?.*

puede ser resuelto por los estudiantes haciendo uso de diferentes procedimientos, cada uno de los cuales muestra niveles de competencia en el tratamiento de esta situación. A continuación se muestra brevemente una aproximación al análisis del problema anterior, tomando como referencia el trabajo de Vergnaud (2000);

1. Búsqueda de la solución del problema pasando por la unidad y valor unitario.

$$\begin{array}{ccccc}
N^{o} \text{ libras de yuca} & & & & \begin{array}{c}\text{Pesos}\\ \text{valor unidad}\end{array} \\
1 & \uparrow & & \uparrow & 600 \\
4 & (:4) & & (:4) & 2400 \\
(\times 9)\ 9 & & & & \times\ (\times 9)
\end{array}$$

2. Aplicación sucesiva de dos operadores (división primero): (: 4) (×9)
3. Escritura del operador fraccionario $(\frac{\times 9}{4})$
4. Aplicación sucesiva de dos operadores, multiplicación primero (×9) (: 4)
5. Noción de razón y de razón-operador:

   La razón entre dos cantidades: 9 libras de yuca/ 4 libras de yuca

   La razón como operador $(\frac{\times 9}{4})$ o Multiplica por la razón
6. Proporción o igualdad de razones:

   $$9 \quad \text{libras de yuca}/4 \quad \text{libras de yuca} = \times\text{pesos}/2400 \quad \text{pesos}$$
7. Igualdad de razones operadores: $(\frac{\times 9}{4}) = (\frac{\times \times}{2400})$
8. Regla de tres:

   $$x = \frac{(9 \times 2400)}{4}$$

A manera de epílogo:

Estas aportaciones han contribuido de manera importante para rupturar la idea que la adquisición de conceptos puede continuar siendo considerada lineal, que es un asunto de presentarlos como listado de temas; al contrario, lo que está demandando la teoría de Vergnaud es la necesidad de crear entre conceptos nexos horizontales y verticales, y es lo que lleva a este autor a situar a la multiplicación dentro de un contexto más grande como el campo conceptual multiplicativo. Con esta propuesta Vergnaud integra la propuesta vygotskiana, para señalar que la comprensión de los niños se ve moldeada no sólo a través de la adaptación al medio físico, sino a través de interacciones entre personas en relación con el mundo, "un mundo no simplemente físico aprendido por los sentidos, sino cultural con sentido y significante", y es en este sentido que el campo conceptual emerge como un teoría que se aproxima mejor al desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Bibliografía

[1] Y. Chevallard, (1998), *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Madrid: Aique, Traducción al español por Claudia Gilman.

[2] R.Douady, (1996), *Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de Collège-Seconde*, En: La enseñanza de las matemáticas: Puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica. Paris: Topique, p. 241-256.

[3] G. García, et al. (2001), *Modelos y prácticas evaluativas de las matemáticas en la Educación Básica, El caso del campo multiplicativo*, Universidad Pedagógica Nacional Colciencias, Impreso.

[4] J.Godino, y C. Batanero, (1994), *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*, En: Recherches en Didactique des Mathèmatiques, Vol. 14, nº 3: 325-355.

[5] G. Vergnaud, (1981), *Multiplicative Conceptual Field: What and Why?, En: Multiplicative Reasoning*, Edit. G. Harel and J. Conferí, Pp. 41-59. State University of New York Press.

[6] G. Vergnaud, (2000). *El niño, las matemáticas y la realidad.* México: Trillas.