# El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico

**Rosa María Farfán y Mario A. García**
Cinvestav-IPN
México
rfarfan@mail.cinvestav.mx, mgarciag@mail.cinvestav.mx
Epistemología – Nivel Superior

**Resumen**

Puede decirse que uno de los componentes fundamentales en la matemática escolar o especializada de nuestros tiempos es aquel concerniente al concepto de función. Su fragua ha sido el tiempo, y los fraguadores, los actores temporales que lo han moldeado, desde ideas primitivas de relación, pasando por prácticas de modelización de fenómenos naturales, hasta llegar a formar un objeto matemático imprescindible, de belleza única, de mucha sustancia concentrada en definiciones estáticas, que ocultan en sí mismas un impetuoso dinamismo.

## Introducción:

Uno de los conceptos más importantes en matemáticas de cualquier nivel, es el de función ya que éste, *"tal y como se define actualmente en Matemáticas es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años"* (Ruiz, 1998). Es de esta manera como la función es un terreno sobre el cual se ha fincado toda la matemática moderna y "*una buena parte de las Matemáticas ha sido construida generalizando cada vez más la noción de función"* (Godemet, 1971, p.65).

El siguiente documento intenta proporcionar un bosquejo puntual del desarrollo *epistemológico-histórico* de este concepto a través de momentos claves y analizando personajes contundentes, con el objetivo de entender las diversas concepciones históricas sobre las cuáles ha transitado tan importante objeto matemático.

Y así mismo mencionar algunos de los *obstáculos epistemológicos* a los que se ha enfrentado la humanidad para poder llegar a generalizar y hacer uso de éste, tal y como lo conocemos hoy en día.

Todo lo anterior tiene cabida al intentar proveer más elementos de análisis a la problemática en la cual se centran la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en nuestros días.

## Desarrollo Epistemológico-Histórico.

Dos culturas que sobresalen en la antigüedad debido a sus impresionantes logros filosóficos y matemáticos que han legado a la humanidad, entre otros tantos, son la Griega y la Babilónica.
Tales culturas logran hacer uso de una intuición primitiva del concepto de función, de manera que los babilonios buscan regularidad en las tabulaciones de fenómenos naturales como el movimiento de los astros, para después intentar aritmetizar y lograr generalizar tales observaciones, ya que "s*i no hubiera una regla general subyacente sería difícil explicar la analogía entre los distintos problemas del mismo tipo"* (Boyer, 1986). Así también se propone la existencia de un

instinto de funcionalidad, "*función no sólo es fórmula, es también una relación que asocia elementos de dos conjuntos"* (Pedersen, 1974).

Por otra parte, los filósofos griegos consideran el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas, lo cual lleva a hablar en términos de *incógnitas e indeterminadas* más que en términos de variables. "*Esto conduce a las proporciones y ecuaciones, y no a las funciones"* (Ruiz, 1998). Y es aquí, con fundamento en lo anterior, donde se puede afirmar que las nociones más negativas en la evolución del concepto de función fueron "*la proporcionalidad, la inconmensurabilidad y la gran disociación en el pensamiento entre número y magnitud"* (René de Cotret, 1985).

La Edad Media es un periodo durante el cual se provoca una clara separación entre el álgebra y la trigonometría como dos disciplinas con objetivos particulares, pero sin percibirse aportaciones importantes.

Sin embargo, una característica esencial de este periodo se observa en los intentos por dar una explicación cuantitativa racional a los fenómenos naturales a través de procesos de abstracción los cuales se verán fuertemente negados debido a la *disociación entre número y magnitud.*

La consecuencia de tal confrontación llevará a dar sustento poco después a la *modelización matemática* de estos fenómenos a partir de resultados experimentales, de tal manera que "*la historia nos va a mostrar que es unificando, fundiendo las dos concepciones, como se van a poner las bases de la noción de función"* (René de Cotret, 1985. p.58).

Es de esta manera como se miran los primeros indicios de la concepción de función y esto se hallará concentrado en dos corrientes; por un lado, Heytesbury y Swineshead en Inglaterra a través de la *teoría de la intensidad de formas*, expresada mediante un álgebra de palabras; por otro, Oresme en Francia con un foco en la geometría de gráficas*, "representando por una figura las intensidades de una cualidad de una magnitud continua que dependen de otra magnitud análoga"* (Ruiz, 1998), y desde aquí es posible percibir los principios de la noción de función, en el que, "*Oresme ha tallado el árbol del bosque que permitiría más tarde a Descartes y a Galileo confeccionar la rueda"* (René de Cotret, 1985. p.38).

Otro periodo interesante es aquel correspondiente a los siglos XV y XVI, siglos conocidos por los historiadores como "periodos auxiliares" ya que no se logra aportación sobresaliente al desarrollo del concepto de función, sin embargo, se sientan las bases de la simbología algebraica que permite una manipulación práctica y eficiente, esencialmente al diferenciar entre "variable" de una función e "incógnita" de una ecuación, (Ruiz, 1998) lo cual marcará el sendero simbólico que llevará a la estructuración plena de la noción de función.

Así también comienza a tomar forma la estructura de la trigonometría como una ciencia encargada de situaciones propias, se escribirán libros y el matemático Müller, (s.XVIII), obtendrá por vez primera las tablas de tangente y cotangente, sirviendo todo lo anterior para nutrir a las matemáticas de una nueva clase de función: la función trigonométrica.

En otro sentido, inmersos en matices de movimiento se observa una relación muy estrecha entre número y magnitud lo cual trae a consecuencia el surgimiento de la noción de logaritmo a través de los trabajos de Chuquet, Stiefel y Neper.

Galileo prosigue lo iniciado en el periodo anterior, sin embargo ahora no solamente es la abstracción, si no que definitivamente se llega a la modelización matemática de los fenómenos a través de resultados experimentales, mecanismo que ayuda a evolucionar notablemente el concepto debido a que "*Galileo tuvo el deseo de relacionar de forma funcional las causas y los efectos, y esta necesidad fue un factor esencial en la concepción de la variable dependiente*" (René de Cotret, 1985. p.13). Sin embargo, la notación en la que se expresan los resultados sigue estando fuertemente basada en un gran obstáculo epistemológico: la idea de proporción.

El siglo XVII, es protagonista de toda una revolución en matemáticas. Nace la geometría analítica como consecuencia de los trabajos de Fermat y principalmente de Descartes al renunciar a las concepciones griegas de número y magnitud y lograr fusionarlas, y que según Youschevitch (1976), es aquí donde por primera vez, y de una forma completamente clara, se sostiene la idea de que una ecuación en x e y es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades, de manera que permite el cálculo de los valores de una de ellas correspondiente a los valores dados de la otra (Ruiz, 1998).

A consecuencia de lo anterior, se inicia el estudio de las curvas y las expresiones algebraicas que las describen, lo cual da pie al desarrollo de la teoría de funciones, "*el cual se basa fundamentalmente en tres pilares: el crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos, la creación del álgebra simbólico-literal y la extensión del concepto de número*" (Youschevitch, 1976).

Así también, se ponen los cimientos de la estructura de la noción formal de función y del análisis, columna vertebral del estudio del movimiento, el cual se desarrolla por un lado en Inglaterra por Newton bajo dos formas: la primera mediante el método que él llama de las primeras y últimas razones, de las cantidades que nacen y se desvanecen y la segunda a través del método de las fluxiones. Simultáneamente, en Alemania por Leibnitz a través del cálculo de los diferenciales, quien por vez primera habla en términos de *función,* ya que según Youschevitch (1976), a falta de un término general entre él y Bernoulli, para representar las cantidades arbitrarias que dependen de una variable, va a conducir bien pronto al uso de la palabra función en el sentido de una expresión analítica, (Ruiz, 1998).

Siguiendo la línea histórica concebida anteriormente, llegamos al siglo XVIII, un periodo que definitivamente marca a la matemática, ya que es aquí en donde se analizan los fenómenos físicos a través de un objeto matemático de naturaleza eminentemente analítica que deja de ser la curva para llegar a ser la función, impregnada aún de las ideas infinitesimalistas de Leibnitz, la poderosa herramienta que este último ha legado.

Bernoulli y Euler, serán las figuras del siglo XVIII, con quienes la noción de función es considerada una expresión analítica, proponiendo el primero de ellos, la letra griega f para designar la característica de una función, escribiendo entonces: <<*fx*>>, lo que evolucionará con Euler, para escribirse como *f(x).*

Lo anterior es observable cuando el concepto de función es fundamental en la nueva disciplina que Euler estructura a través de conjuntar al Cálculo Diferencial de Leibnitz con el Método de fluxiones de Newton, de donde emerge el Análisis Matemático, disciplina que estudia los procesos infinitos.

Leibnitz da a conocer su trabajo sobre diferenciales en el *Acta Eruditorum* (1684 y 1686), y es hasta cinco años después cuando, Jakob y Johann Bernoulli, estudian el cálculo leibniziano e intentan dar a conocer el poder de esta nueva herramienta en la solución de problemas físicos en comparación con otros métodos de la época.

Es con el problema de la cuerda vibrante; problema que según Euler, "*queda totalmente determinado si se dan para un instante cualquiera, la forma de la cuerda y la velocidad en cada punto"* (Farfán, 1997), como se hace uso de funciones diferentes a las que se manejan en la época, llegando a incluirse a las funciones trascendentales *e, ln, z y las funciones trigonométricas*, y terminado con proporcionar una clasificación coherente con su *noción analítica de función* hasta este momento.

Precisamente aquí, Euler se verá en la necesidad de generalizar la definición de función, tomando en cuenta *funciones arbitrarias*, especiales, no derivables, con picos, a las que él llama *discontinuas o mixtas,* escribiendo a D´Alambert:*...considerando tales funciones que no se sujetan a la ley de continuidad se abre ante nosotros una nueva ruta de análisis...*(Farfán, 1997).

Por lo tanto, es posible afirmar que, "*quien reestructuró el cálculo leibniziano y lo convirtió en un cuerpo organizado fue Leonhard Euler, figura central de la matemática del siglo XVIII"* (Farfán, 1997), dándolo a conocer en su libro *introduction a l´analyse infinitesimale* en 1748, donde inicia definiendo sus objetos de estudio, las funciones: *una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, como quiera que lo sea, de dicha cantidad y de números o cantidades constantes..., y las cantidades sobre las que opera: ...Una cantidad variable es una cantidad indeterminada o, si se quiere, una cantidad universal que comprende todos los valores determinados...,*

*Un valor determinado cualquiera puede expresarse por un número, y de aquí se sigue que una cantidad variable comprende todos los números, cualquiera que sea su naturaleza. Sucede con la cantidad variable como con el género y la especie en relación a los individuos; puede concebírsele como abarcando todas las cantidades determinadas.*

*Así, una tal cantidad (variable) abarca todos los números, tanto positivos como negativos, los números enteros y los fraccionarios, los racionales, los irracionales, y los trascendente; incluso no debe excluirse el cero ni a los números imaginarios (Euler, 1748a, p.2).*

Es así como Euler será conducido a continuar el desarrollo posterior del concepto, explorando nuevos caminos que el análisis matemático recién descubierto ha proporcionado y lo cual será la punta de flecha en el estudio que más tarde Cauchy, Riemann y Weierstrass realizarán acerca de la continuidad de curvas.

Producto de lo anterior, será el impresionante desarrollo del análisis, "*pasando de una herramienta para la resolución de problemas en mecánica como quizás Newton lo contempló, a una disciplina con sus propios problemas, cada vez más inmersa en ella misma y en sus propios principios*" (Ruiz, 1998).

El siglo XIX se encuentra caracterizado por diversas generalizaciones observadas en los trabajos de Cauchy, (1827), Lobachevsky, (1834), Dirichlet, (1837), Riemann, (1858), al emplear al objeto matemático función como la médula del Análisis recién creado por Euler. Ellos describían a la función con la particularidad de ser una correspondencia de tipo muy general (Ruiz, 1998).

Esto producirá una gran formalidad al concepto por parte de Cauchy, quien intentará contener toda "la sustancia" de éste en definiciones abstractas, las que después perderán de vista las relaciones geométricas y las nociones de curva que guarda en sí mismo este objeto y que en el pasado fueron las que le dieron vida.

El siglo XX, es el que corresponde al uso pleno y a la exploración minuciosa del concepto basado formalmente en la noción general de función introducida por Dirichlet, y basta observar lo que Spivak (1978), escribe a este respecto: "*El concepto más importante de las matemáticas es el concepto de función. En casi todas las ramas de la matemática actual, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función haya llegado a definirse con una gran generalidad*".

En libros clásicos de matemáticas de nuestros tiempos, es observable cómo se intenta favorecer más la relación que guarda este concepto con el intento por describir fenómenos naturales, de tal manera que "*en la actualidad se prefiere considerar el concepto de función como aplicación*" (Dieudonné, 1989, p.187).

*Es evidente que la noción primitiva de función era mucho más intuitiva; la actual tiene un alto grado de formalización que la hace mucho más abstracta.*

O como Freudenthal (1983, p.497) diría; "*aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo, se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático*".

## Consideraciones Finales

Acabamos de presentar una línea histórica con intencionalidad que nos permite admirar y analizar muy de cerca el desarrollo epistemológico de un concepto fundamental en matemáticas. Hemos podido presenciar las concepciones temporales de los actores y los mecanismos que permitieron la modificación de estas ideas a través del tiempo y del contexto social en el cual vivieron.

Y es así como el *recorrido epistemológico* anterior nos provee de un hilo conductor mediante el cual pretendemos entender diversos fenómenos didácticos que se presentan al seno de las instituciones, todo, sin perder de vista el foco de atención tan evidente como Rugarcía (2000), afirma "*es el momento de cuestionar en serio nuestros paradigmas educativos para concebir e intentar lograr un hombre nuevo, una nueva sociedad, otra cultura*".

## Referencias Bibliográficas

Boyer, C. (1986). *Historia de las matemáticas*. Madrid; Alianza Universidad.

Chevallard, Y. (1989). *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Etapes d´une recherche*. Marsella, Francia: IREM d´Aix-Marseille.

Dieudonné, J. (1989). *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica, Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, Holland: Riedel.

Godement, R. (1978). *Álgebra.* Madrid: Tecnos.

Pedersen, O. (1974). Logistics and the theory of functions: An essay in the history of Greek mathematics. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences 24*(94), 29-50.

René de Cotret, S. (1985). *Etude historique de la notion de fonction: analyse épistémologique et expérimentation didactique.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad de Québec, Montreal, Canadá.

Rugarcía A. (2000). El culto al conocimiento y la formación de ingenieros. *Ingenierías 3*(7), 3-9.

Ruiz, H.L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Spivak, M. (1978). *Cálculo Infinitesimal*. Barcelona, España: Reverté.

Youschevitch, A.P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th Century, *Archive for history of exact sciences 16*, 36-85.