

## La Significación Física de la Integral a Partir de la Modelación de Fenómenos

**Gildardo Cortés**

Instituto Tecnológico de Acapulco, Conalep, Plantel Acapulco II, Guerrero  
México

[gildardo\\_59@hotmail.com](mailto:gildardo_59@hotmail.com)

Socioepistemología – Nivel Medio

### Resumen

Una pregunta que me plantean con mucha frecuencia los estudiantes es ¿qué significado tiene la integral?; con este trabajo pretendemos incursionar en la problemática referida a la formación de la significación física de la integral, para lograrlo partimos de la idea de que esa significación tiene que ver por un lado con las concepciones matemáticas “heredadas” por los profesores a sus alumnos y por otro con los procesos de matematización de fenómenos en diversos contextos. Hemos realizado un primer acercamiento exploratorio para recoger evidencias, que nos permita elaborar una secuencia basada en prácticas de modelación de fenómenos. Reportamos como es construida la significación física de la integral en el discurso. Un resultado consecuente, es una aproximación a la concepción de práctica social.

### Desarrollo del tema

El tratamiento de fenómenos en la ciencia observable, requiere de cierto dominio de la matemática, vista como herramienta para modelarlos. En el contexto educacional de la matemática, resulta casi imposible encontrar un significado único de los modelos matemáticos, un solo modelo sirve para referirse a varios fenómenos y son diferentes los usos para predecir su devenir. Planteamos que es en las actividades, en particular las de modelación, en donde las herramientas utilizadas otorgan significado físico a los conceptos matemáticos. Por eso nos hemos interesado en investigar la problemática relativa a la “significación física de la integral”, vista como un problema en el seno de la enseñanza de la matemática, tanto en ingeniería como en otras disciplinas.

Esta investigación se inscribe en la línea de investigación, que discurre sobre la relación de las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento y, la perspectiva teórica que asume es la socioepistemología. Cordero, (1998) menciona que hay epistemologías, que enfocan categorías que llevan a pensar a la matemática como una herramienta para modelar, en tanto, que no se asignan objetos matemáticos a una realidad separada, sino más bien se reconoce, que hacer distinciones y formar construcciones, es una parte esencial de la modelación. De ahí que en nuestro enfoque, es fundamental el papel de las herramientas utilizadas en el ejercicio de las prácticas sociales, en nuestro caso, las prácticas de modelación y éstas a su vez otorgan significado a los conceptos matemáticos. Así, consideramos que la significación física de la integral está ligada a las actividades de modelación. Para obtener evidencias de nuestras afirmaciones recurrimos a un primer acercamiento exploratorio que nos permita elaborar diseños de secuencias cimentados en las prácticas sociales de modelación de fenómenos. El diseño a utilizar está basado en la ingeniería didáctica como metodología y en el diagrama diseñado por Arrieta (2003) y Cortés (2003) donde se establece una relación de las prácticas de modelación con las herramientas empleadas. La hipótesis predictiva del diseño de la secuencia consiste en que los alumnos construyen diversos significados de la integral, al participar en un

diseño de modelación de fenómenos. Las actividades hacen énfasis en la interacción, se plantea como actividades de modelación la confrontación y argumentación en la interpretación y transformación de un fenómeno. Para lograr nuestro objetivo fundamental, hemos elegido dos fenómenos físicos, el primero se refiere a la circulación de un fluido, y el segundo a la caída libre de un objeto, los cuales pueden ser modelados utilizando como una de las herramientas a la integral, de donde los actores construyen significaciones físicas de la integral.

La secuencia diseñada para la construcción de la significación física de la integral, contempla una fase exploratoria, la segunda fase es la puesta en escena de la secuencia y la tercera fase es un análisis a posteriori. Se han puesto en escena las secuencias tanto en el Conalep Acapulco II, como en el Instituto Tecnológico de Acapulco,

Presentamos, como un resultado consecuente de la fase exploratoria, un primer acercamiento a la concepción de las prácticas sociales, derivada de su estructuración, esto es, debemos entender como práctica social al conjunto constituido por las acciones, en contextos escolares y no escolares, donde se utilizan, diseñan y elaboran herramientas, que a su vez, sirven de base a la formulación y construcción de nociones matemáticas. Es en el ejercicio de prácticas sociales, en los diversos contextos, donde toma el carácter de funcionalidad la matemática. Las prácticas sociales son ejercidas con una intencionalidad implícita, para la transformación del entorno social.

En la resignificación de las nociones matemática, caracterizamos, en un primer intento, a las prácticas sociales a través de cinco elementos:

1. *Actores sociales en interacción. Reconociendo el carácter discursivo en la construcción social del conocimiento*
2. *Una situación social (diversos fenómenos observables)*
3. *Una noción matemática y sus diversas versiones (tabla, gráfica, ecuación, lenguaje natural, etc.)*
4. *Un contexto social (diversas comunidades de profesionistas y oficios)*
5. *Una intencionalidad implícita en un contexto histórico social (la intervención de los actores en su entorno).*

Arrieta (2003) afirma “...Pero esta forma de entender el aprendizaje nos lleva a replantear nuestra noción de conocimiento: los conocimientos matemáticos son vistos como construcciones sociales surgidas de prácticas ejercidas por grupos sociales en contextos sociales específicos y reproducidos por comunidades...En este sentido para nosotros contexto social es una totalidad que da significado a las partes. Entonces estudiamos fenómenos de la construcción de conocimiento en contextos sociales donde las construcciones histórico - culturalmente constituidas, reconstruidas, adquieren particular significado...”

Como el propósito de la matematización de un fenómeno natural o social, es la construcción de un modelo, se hace imprescindible considerar como parte central en esta investigación, la epistemología de la integral; es decir; ahondar sobre la historicidad de los modos en que los individuos hacen constructos, sobre los conceptos matemáticos aplicados, a situaciones en escenarios naturales, en ese sentido los constructos realizados en el aula por los estudiantes tiene que ver con los modos heredados de sus profesores en cursos anteriores de cálculo integral, por ejemplo, cómo hemos recibido de sus creadores los diversos métodos de cálculo, para el área de una figura “curva cerrada” o el volumen de un “cuerpo redondo”. En ese sentido coincidimos con Douady (1995) “...Las nociones, al igual que los teoremas, se pueden trabajar y modificar según las situaciones donde se necesitan. De allí se pueden desembocar en nuevas nociones, que a su vez se convierten en materia de trabajo, interpretación, modificación, generalización,... El hecho de relacionarlas es a su vez una fuente de significado para quienes las realizan...”. De ahí, que los modos de transmisión de una noción matemática y la forma de cómo se aplica en la ciencia observable, dan origen a los significados físicos de estas nociones, de igual forma sucede con la noción de integral y su significación física. De esto, las prácticas sociales de modelación, que pretendemos ejercer se

apoyan en el uso de diversas nociones matemáticas, y estas, a su vez, producen diferentes modelos o versiones (numéricos, gráficos, algebraicos, etc.) para construir la significación física de la integral, haciendo predicciones sobre el comportamiento de los fenómenos abordados, para determinar su significación física. Así mismo la actuación del profesor como investigador, debe orientarse hacia el cuestionamiento de si los modelos o versiones existentes, resultan útiles para la descripción de los fenómenos, o modificar tales modelos, para crear versiones distintas, que describan lo más cercano posible a los fenómenos. Por eso en el diseño de la secuencia, hemos considerado las situaciones didácticas, que consiste en pedir al profesor, que provoque en los alumnos una serie de adaptaciones, mediante una elección prudente del problema a resolver, que en nuestro caso es la construcción de la significación física de la integral. En este proceso no se descarta la posibilidad de encontrar una serie de obstáculos, en virtud de que la modelación de un fenómeno natural o social, es bastante compleja, según Brousseau, (2001) [*...la construcción de los axiomas, apuntan hacia un aprendizaje férreo, en donde la cantidad de conocimientos debidamente bien estructurados, y que son utilizados y transferibles, son utilizados únicamente en la medida en que están relacionados a otros conocimientos, así esta relación establece sus significados, su etiqueta y modos de aplicación...*]. En nuestro caso, la experiencia nos dice, que una noción matemática cuando fue bien forjada, según lo planeado por el profesor, es cuando tiene un valor significativo en su aplicación, entonces para el estudiante, ese conocimiento matemático perdura, sobre todo, en las situaciones sociales, en que tiene que hacer uso de tal conocimiento matemático. Consideremos el caso de aquellos estudiantes, que no pudieron continuar sus estudios en niveles superiores, se incorporan para laborar en diversas comunidades de profesionales, por ejemplo en la construcción, como auxiliares, ayudantes o asistentes, etc., algunos de ellos hacen uso del “Teorema de Pitágoras” para realizar actividades de supervisión en la construcción de muros, que estén perfectamente a “escuadra”, es decir, que los muros formen ángulos de  $90^\circ$ , observamos, que dicho teorema es significativo por su aplicación; en otros casos como son las comunidades de albañiles, encontramos personas, que nunca asistieron a la escuela, de igual manera hacen uso del “Teorema de Pitágoras”. Los reportes de Arango, (2003) arrojan evidencias al respecto, aquí lo verdaderamente importante en este último caso, es la forma en que fue adquirido el conocimiento matemático, ya que no lo aprendieron en la escuela, sino que les fue heredado de una generación de albañiles a otra generación, o bien de las comunidades de arquitectos con los que están relacionados interactivamente en el contexto de la construcción, de esto podemos decir, que una noción matemática tiene éxito, si tiene consistencia y perdura lo suficiente, de ahí toman un gran valor significativo las nociones matemáticas, a través del tiempo y espacio.

Las preguntas planteadas en la fase exploratoria de la secuencia fueron:

1. ¿En qué consiste la integral?
2. ¿Qué características tiene la integral?
3. ¿Cuál es primero, la definida o la indefinida?
4. ¿Cuántos significados conoces para la integral?
5. ¿Cuál es el significado físico de la integral?
6. ¿Existen otros significados?; si tu respuesta es “sí” o “no”, explica detalladamente tu argumento.

En el presente reporte, solo presentamos el análisis exploratorio de la pregunta cinco, que consideramos la pregunta central del cuestionario previo a la puesta en escena del diseño de la secuencia, para indagar sobre la concepción del significado físico de la integral heredada de cuatro profesores a uno de sus estudiantes del Conalep Acapulco II, las respuestas son

mostradas en el cuadro comparativo 5.

### Cuadro comparativo 5

<i>¿Cuál es el significado físico de la integral?</i>		
<i>No</i>	<i>Respuesta del profesor</i>	<i>Respuesta del alumno</i>
<i>1</i>	<i>La aplicación y explicación de los fenómenos naturales existentes en el universo.</i>	<i>Encontrar con que velocidad cae un objeto al ser lanzado al aire y a que tiempo</i>
<i>2</i>	<i>El área</i>	<i>Es una herramienta para facilitar los cálculos matemáticos</i>
<i>3</i>	<i>I) Se comporta como la ecuación de la velocidad con respecto a la rapidez. II) Se comporta como la ecuación de la distancia con respecto a la velocidad, etc. III) Se comporta como el trabajo de la fuerza en función de <math>x</math> y la diferencia de <math>x</math>, etc. En general se comporta como un fenómeno físico primitivo a la derivada, o sea, en función del tiempo o la variable <math>x</math> independiente.</i>	<i>Es despejar a la derivada para llegar a la integral</i>
<i>4</i>	<i>El área y volúmenes, cantidad de un material a utilizar.</i>	<i>Es un método para la resolución de problemas reales en diferentes ciencias.</i>

### Conclusión

Un análisis de los argumentos que ofrecen los profesores para cada pregunta, nos dice que los diversos modos en que han de ser heredadas las nociones matemáticas a los estudiantes están por un lado en relación con las propias percepciones de los profesores sobre los conceptos, ofrecidas a sus estudiantes y por otro, con las lecturas de los diversos libros de cálculo, que los estudiantes por su cuenta realizan, por último entre otros múltiples factores un tercer elemento que deja una marcada influencia en el sentir de los estudiantes son las consultas a profesores inmersos en la investigación científica y de aquellos estudiantes de niveles avanzados, como es el caso de algunos estudiantes en el Instituto Tecnológico de Acapulco, que realizan esta práctica cuando sus inquietudes, producto de las dudas de un curso o una clase ordinaria no han sido satisfechas del todo. Al comparar los conceptos tanto del alumno como de su profesor referente a la cuestión número cinco encontramos lo siguiente:

- 1. El profesor número uno considera que el significado físico de la integral consiste en la aplicación y explicación de los fenómenos, en tanto que su alumno ha heredado la parte referente a la aplicación, él considera que el significado físico consiste en encontrar la velocidad de un objeto que cae, en este caso hay una cierta compatibilidad en los significados físicos asignados a la integral, es posible pensar, que ambos le asignan en cierto modo como significado físico a la integral, el desplazamiento de un cuerpo a lo largo de una curva.*
- 2. El profesor número dos tiene por significado físico de la integral el área, su alumno la considera una*

- herramienta en los cálculos matemáticos. En este caso parece ser que el profesor le asigna como significado físico, el significado geométrico de la derivada, tal vez lo hace pensando en que la integral en algunos casos se presenta al estudiante como la operación inversa de la derivada, en ese sentido probablemente podemos pensar en el movimiento como alternativa para la significación física.*
- 3. El profesor número tres le asigna comportamientos semejantes a la ecuación de la velocidad, respecto a la rapidez, a la ecuación de la distancia respecto a la velocidad, o bien al trabajo de la fuerza en función de una variable  $x$  y la diferencia de esa variable  $x$ , en tanto que su alumno el significado físico que le asigna es confuso, el considera que consiste en despejar a la derivada para llegar a la integral. En este caso se evidencia el hecho de ver a la integral como operación inversa de la derivada por parte del alumno, en tanto que el profesor le asigna significados muy semejantes al significado físico de la derivada.*
  - 4. Por último el profesor número cuatro le asigna el significado de área y volúmenes, y de manera implícita la considera como una herramienta para calcular la cantidad de un material a utilizar, en cuanto a su alumno, le asigna el significado de método para resolver problemas reales en las diversas ciencias. En este caso se manifiesta la forma en que heredó el significado físico al estudiante, hay una cierta compatibilidad, esto es, el profesor la concibe como herramienta para calcular cantidad de materiales, su estudiante la considera un método para resolver problemas reales en los diversos contextos de la ciencia.*

En el resto de las preguntas, las respuestas son muy semejantes, tanto en el Conalep como en el Instituto Tecnológico de Acapulco, persiste una cierta compatibilidad tanto en el profesor como en sus alumnos. Desde la perspectiva socioepistemológica, creemos que solo en la acción construimos los significados de los conceptos matemáticos, y por supuesto la significación física de la integral, es decir, solo en la acción humana podemos comprender los procesos matemáticos de modelación de un fenómeno, esto es, la estructura que presenta un concepto matemático no es clara cuando se le muestra a los estudiantes, por eso es común, que los profesores pidan a sus estudiantes, que resuelvan una serie de ejercicios específicos de un tipo particular de integración, puesto que con la repetición de un algoritmo el estudiante logra apropiarse del proceso y mediante un análisis del mismo llega a inferir los mecanismos comunes de las estructuras, que presentan los conceptos matemáticos, particularmente el de la integral. En ese sentido es razonable cuestionarnos sobre el nivel de adecuación del modelo conceptual que ofrece la matemática en relación a la estructura de los fenómenos naturales y sociales en los diversos escenarios para fines de interpretaciones físicas, esto significa, que la matemática actual funciona siguiendo ciertas reglas convencionales preestablecidas e inflexibles; sin embargo, no siempre es posible modelar con precisión a la naturaleza usando leyes de la matemática, dado que ésta es cambiante, particularmente los fenómenos sociales. Esta situación aumenta sorprendentemente en la medida en que nos involucramos en problemas de mayor complejidad. Cada problema específico exige una conceptualización desde la perspectiva de proceso en un tiempo y espacio, luego esto produce una nueva visión, que germina solo en la acción de las prácticas sociales, en los contextos en donde fueron concebidas. Por eso a los estudiantes se les debe instruir sobre la construcción de conocimiento matemático, con el solo propósito de intervenir en la modificación de su entorno, luego la importancia de los aspectos socioculturales en las prácticas sociales radica en el sentir de los estudiantes, en el deseo de comprender cómo se ubica la acción mental de ellos en los diferentes escenarios desde la perspectiva cultural e histórica, para desarrollar los significados de los conceptos matemáticos, particularmente la significación física de la integral.

### **Referencias Bibliográficas**

- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de una matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.
- Brousseau, G. (2001). *Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas* (L. Puig trad.) Université de Bordeaux, Francia.
- Cordero, F. (1998). Cognición y enseñanza. La distinción y formación de construcciones en la didáctica de la matemática. *Antologías*. (Vol. 3). México.
- Cortés, G. (2003). *Relaciones cuadráticas entre variables desde la perspectiva de matemáticas a partir de observaciones*. Tesis de maestría no publicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guadalajara, México.
- Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (ed). *Ingeniería didáctica en educación matemática*, (pp. 61-96). México.
- Arango, J. (2003). Las herramientas matemáticas en el ejercicio de las prácticas sociales en comunidades de albañiles. *VII Escuela de Invierno y VII Seminario Nacional en Didáctica de las Matemáticas*. Guerrero, México.