Socioepistemología de la Predicción

Ricardo Cantoral, Juan Gabriel Molina y Mario Sánchez
Cinvestav IPN, Cicata IPN
México
rcantor@cinvestav.mx, jmolinaz@ipn.mx, mosanchez@ipn.mx
Sociopistemología – Nivel Superior

Resumen

Este escrito resume los planteamientos del Taller "Socioepistemología de la Predicción" donde nos ocupamos de presentar, a través de reflexiones teóricas y de una variedad de ejemplos didácticos, el papel que juega la predicción en la construcción de conocimiento matemático. Las actividades trataron con la noción de variación en el estudio de fenómenos de cambio continuo usando recursos tecnológicos diversos y experimentaciones típicamente escolares. Adicionalmente ubicamos estas experimentaciones como parte de la sociopistemología.

Presentación

El término *sociopistemología* plantea un corrimiento al problema del saber, lo contextualiza, lo sitúa. De ahí que podamos decir que la sociopistemología es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemológica del conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente, las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, sobremanera, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La sociopistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión (Cantoral y Farfán, 2003)

Las actividades del Taller constaron de una serie de diseños secuenciados. La primera de estas actividades se describe enseguida:

Actividad 1

A continuación se presentan tres tablas numéricas.

a) Determina cuál de estas tablas corresponde a una ecuación lineal, cuál a una ecuación cuadrática y cuál a una ecuación cúbica.
b) Una vez que hayas determinado a qué tipo de ecuación corresponde cada una de las tablas numéricas, encuentra la expresión algebraica de cada una de estas ecuaciones.

x	y
-3	-78
-2	-57.75
-1	-40.5
0	-26.25
1	-15
2	-6.75
3	-1.5

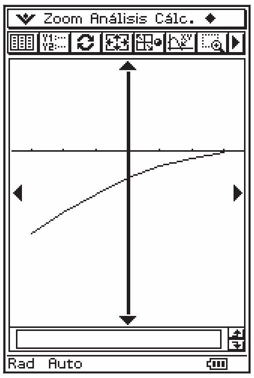
x	y
-3	624
-2	404.25
-1	243
0	131.25
1	60
2	20.25
3	3

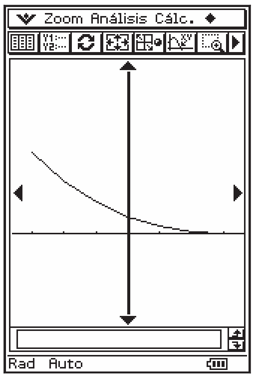
x	Y
-3	-29.25
-2	96
-1	221.25
0	346.5
1	471.75
2	597
3	722.25

Esta actividad, inspirada en el trabajo de Seymour y Shedd (1981) ha sido aplicada y discutida con varios profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos dentro y fuera de México, lo que nos ha permitido generar un cúmulo de conocimientos empíricos acerca de las estrategias utilizadas por los profesores al intentar resolver la actividad: La gran mayoría de los profesores (digamos un 80%) utilizan como estrategia inicial la graficación para determinar una respuesta al cuestionamiento a); en el caso del cuestionamiento b) una proporción considerable de los profesores formula sistemas de ecuaciones lineales como medio para llegar a la respuesta.

Si analizamos el diseño de la actividad, podremos apreciar cómo ésta inhibe el desarrollo de las estrategias gráficas, por ejemplo, en las figuras 1 y 2 se muestran las gráficas correspondientes a las dos primeras tablas de la actividad; nótese como es difícil discernir cuál de las dos gráficas corresponde a un polinomio de tercer grado y cuál a uno de segundo grado; sin embargo es relativamente fácil identificar cuál de las gráficas corresponde a una ecuación lineal lo cual favorece que los profesores centren sus esfuerzos en la determinación de la ecuación lineal correspondiente a la gráfica. Así, la inclusión de la función lineal en la actividad es de central importancia, debido a que se presenta como una de las vías más accesibles para involucrarse en la resolución de la tarea matemática planteada.

La importancia de esta función dentro de la actividad no sólo reside en el hecho de representar una vía de acceso a la actividad matemática planteada, sino que además el trabajo con la ecuación lineal en el contexto de la actividad facilita que emerjan de forma natural estrategias y argumentos de tipo variacional los cuales constituyen el componente matemático fundamental dentro de nuestro diseño.





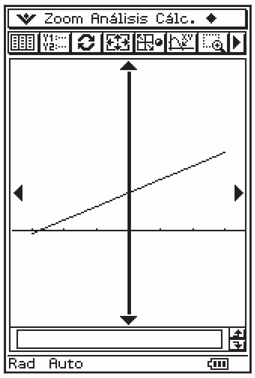


Figura 1. Figura 2. Figura 3.

Antes de intentar acotar el sentido del término 'variacional' debemos dejar clara la diferencia que percibimos entre cambio y variación: La noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto; mientras que la variación, la estamos entendiendo como una *cuantificación del cambio*, es decir, estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejercer nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado. Es en este sentido que nos referimos a los argumentos de tipo variacional. Decimos que una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias de tipo variacional cuando hace uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando.

En un sentido más amplio, la categoría del *pensamiento y lenguaje variacional*, constituye una línea de investigación insertada en la aproximación socioepistemológica, que estudia las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (véase Cantoral y Farfán, 1998).

Regresando al punto de la función lineal como generadora de argumentos y estrategias de tipo variacional en la Actividad 1, podemos decir ahora que las ideas y técnicas de resolución que más comúnmente surgen al trabajar con la tabla de valores asociada, se relacionan de alguna manera con las ideas de pendiente y variación, ya sea mediante el cálculo de la magnitud $y_{i+1} - y_i$ para cualesquiera par de ordenadas consecutivas como medio de identificación de una variación constante, o por medio de la aplicación de la fórmula $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right)$ para determinar la ecuación de la recta. En ambos casos la idea de variación está presente, pero…¿Por qué consideramos importante para el diseño que emerja la idea de variación entre las estrategias de los propios estudiantes? La idea de variación nos servirá, en un principio, para mostrar que el cálculo de las variaciones sucesivas en un contexto numérico permite identificar cuál es el grado del polinomio al que corresponde cada una de las tablas de la Actividad 1, por ejemplo, en el caso de la primera tabla, al calcular sus segundas diferencias (entendiendo como 'diferencia' la magnitud $y_{i+1} - y_i$ anteriormente mencionada) aparece un valor constante, lo cual nos indica que la tabla corresponde a un polinomio de segundo grado. (Figura 4)

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
-3	-78		
-2	-57.75	20.25	
-1	-40.5	17.25	-3
0	-26.25	14.25	-3
1	-15	11.25	-3
2	-6.75	8.25	-3
3	-1.5	5.25	-3

Figura 4.

En un segundo momento, la idea de variación manifestada mediante las diferencias sucesivas, nos servirá para crear un vínculo entre nuestra actividad inicial y el estudio del concepto de derivada. Esta relación puede percibirse desde la figura 4. Nótese como al aplicar la segunda diferencia a una representación numérica de un polinomio cuadrático nos da como resultado un valor constante; en el campo del cálculo diferencial, la segunda derivada de un polinomio de segundo grado es igual a una constante.

La ilustración de la figura 5 es una prueba de cómo la idea de la diferencia y variación ha sido utilizada desde tiempos antiguos para la determinación de lo que ahora conocemos como derivadas. Estas ideas, seguramente ausentes del Discurso Matemático Escolar por procesos de Transposición Didáctica, representan una vía de estudio del concepto de derivada que puede ayudarnos a reconocer e identificar códigos y patrones variacionales los cuales son necesarios para la construcción y formación del concepto mismo (Cantoral y Farfán, 1998).

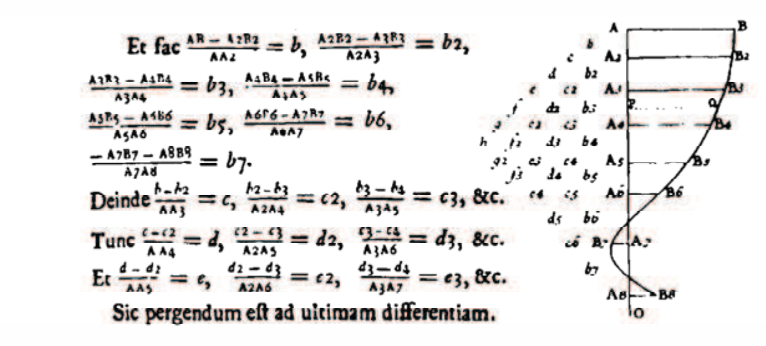


Figura 5. Escrito original de Isaac Newton 1676

La segunda actividad presentada en el taller retoma la idea de variación y diferencia que de alguna manera emergió en la Actividad 1 para calcular la aproximación a la derivada de una relación funcional tiempo – distancia asociada a un movimiento pendular generado por una botella balanceándose. Esta actividad consiste en registrar las mediciones de tiempo y distancia relacionadas con el movimiento de la botella utilizando un sensor de movimiento, un analizador de datos y una particular calculadora graficadora. Para ello recolectamos un total de 250 mediciones espaciadas en intervalos de 0.02 segundos. La representación gráfica de las mediciones tomadas se muestra en la figura 6, el eje de las abscisas representan al tiempo medido en segundos, mientras el de las ordenadas representa la distancia graduada en metros.

Además de utilizar la idea de diferencia para calcular una aproximación a la derivada de la forma $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ con base en las mediciones realizadas con el sensor, esta idea fue empleada para buscar e identificar los patrones gráficos asociados a las derivadas de orden mayor o igual a 1. Para realizar esta búsqueda de los patrones gráficos se utilizó la función $f(x)=\mathrm{sen}(x)$ debido a que es una función que posee la particularidad de que sus derivadas de orden superior se encuentran acotadas. En las figuras 7, 8, 9 y 10 se encuentran los comportamientos gráficos correspondientes a la parte de la gráfica de la función donde la primera, segunda, tercera y cuarta derivadas de la función $f(x)=\mathrm{sen}(x)$ son positivas.

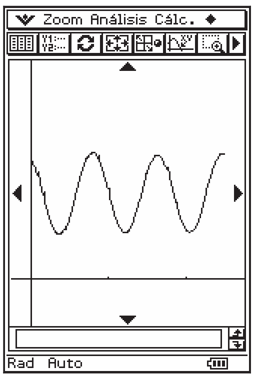


Figura 6.

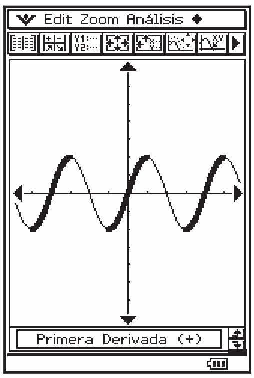


Figura 7.

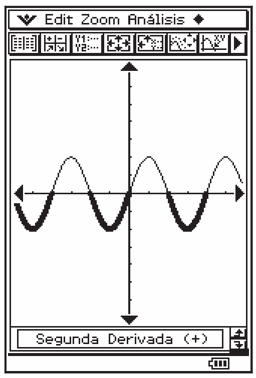


Figura 8.

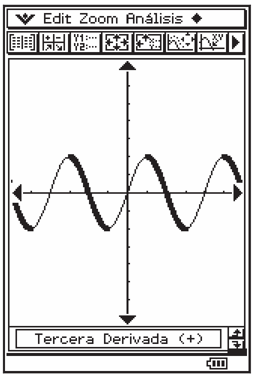


Figura 9.

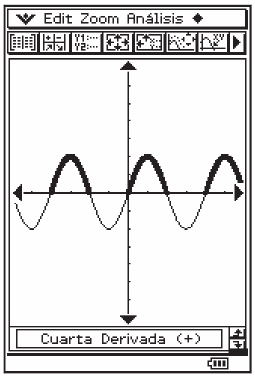


Figura 10.

Dos hechos interesantes alrededor de estos patrones gráficos es que se cumplen para funciones trigonométricas más complejas como $f(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ (por mencionar un ejemplo) y algunos polinomios; en este momento nos encontramos investigando las condiciones que permiten que estos patrones gráficos aparezcan en diferentes tipos de funciones continuas.

Consideraciones finales

La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa, centra su atención en el examen de las prácticas sociales que favorecen la construcción del conocimiento matemático, incluso antes que estudiar a los conocimientos mismos. En este sentido, hemos considerado a lo largo de diferentes investigaciones (Cantoral y Farfán, 1998) que una de tales prácticas es la *predicción*. La imposibilidad de controlar el tiempo a voluntad, obliga a los grupos sociales a predecir, a anticipar los eventos con cierta racionalidad. Este enfoque centrado en prácticas debe entenderse en el marco de las dimensiones sociales. Se aboca al estudio de la interacción y la convivencia en el ejercicio de las prácticas de referencia. Esta dimensión dota de autonomía al saber desligándolo de la escuela, del pensamiento y de su propia historia, para ubicarle al nivel de las instituciones en un sentido amplio. El saber se posiciona histórica, social y culturalmente en el campo de las instituciones.

En este sentido, en este Taller quisimos plantear, en el marco de prácticas predictivas preguntas matemáticas inusuales como las que han sido descritas anteriormente.

Es importante diferenciar entre los conceptos de adivinación y predicción. La adivinación es un pronóstico generado por señales o sucesos sin un fundamento científicamente aceptado, mientras que la predicción es una actividad racional que permite determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que produce.

Consideramos importante la predicción porque ha mostrado ser una idea motriz en el desarrollo de conceptos matemáticos, especialmente en el área del cálculo, además de que la predicción está íntimamente relacionada con la variación porque para predecir un estado futuro correspondiente a un sistema es necesario cuantificar y analizar los cambios de sus causas y efectos y con base en esto generar modelos matemáticos que nos permitan anticipar consecuencias. Así, la variación se convierte en una herramienta de análisis necesaria para el ejercicio de la predicción.

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Introducción al Análisis. *Epsilon 42*, 353 – 369.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Mathematics education: a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics 53*(3), 255 – 270.

Cantoral, R. y Ferrari, M. (2004). Uno studo socioepistemologico della previsione. *La matematica e la sua didattica 2*, 33 – 70.

Sánchez, M. y Molina, J.G. (2004). *ClassPad 300: Representación y Manipulación de objetos Matemáticos*. México: Casio Computer Co. Ltd.

Seymour, D. y Shedd, M. (1981). *Diferencias finitas: una técnica para resolver problemas*. México: CECSA