La Resolución de Problemas como un Medio para la Formación del Concepto de Media Numérica. Primera Parte

Otilio Bienvenido Mederos y José Enrique Martínez
Universidad Central "Marta Abreu" de las Villas
Cuba
oma8111@yahoo.es, josee@uclv.edu.cu
Formación de Profesores, Resolución de Problemas – Nivel Superior

Resumen

Se realiza el estudio del concepto de media numérica con dos objetivos: Contribuir a la preparación de los profesores de matemática en la utilización de la resolución de problemas como un medio para facilitar la formación de conceptos matemáticos, y Profundizar en las características particulares de este proceso de formación. Se ha escogido el concepto de *media numérica* porque en muchos cursos, su estudio sólo se limita a dar la definición de pocos objetos de su extensión como las medias aritmética, geométrica y armónica. El trabajo consta de cinco secciones que complementan los objetivos propuestos.

La enseñanza y el aprendizaje de la matemática por medio de la resolución de problemas

La enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos por medio de la resolución de problemas están dirigidos a insistir en los procesos de pensamiento y de aprendizaje. Desde hace mucho tiempo en Psicología, se han estudiado profundamente los procesos de formación, desarrollo (Vygotski, 1998) y generalización (Davidov, 1981) de conceptos; no obstante, consideramos que hay mucho que hacer en esta dirección con relación a la utilización de la resolución de problemas con este fin en matemática.

En este sentido Miguel de Guzmán (1993) plantea: "Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida; otras, un tanto confusamente perfilada y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra". Siguiendo la idea de Guzmán, tenemos el criterio que algunas de las características que debe tener un problema son: ser accesible a los estudiantes; o sea, que estos conozcan recursos y contenidos matemáticos para su solución y de esta forma estén en condiciones de desarrollar diferentes estrategias para acceder y utilizar dichos recursos en la resolución del problema; que propicien que los estudiantes sientan una motivación intrínseca y que se diviertan con la actividad mental que requiere su solución; que faciliten el desarrollo de la intuición y la creatividad; que puedan generalizarse a otros contextos y de esta forma facilitar que los estudiantes planteen nuevos problemas, en particular de su entorno, etc.

Algunas de las acciones que hemos aplicado con buenos resultados al utilizar la resolución de problemas como un medio para la enseñanza-aprendizaje de la matemática han sido:

- Insistir en que la obtención de la solución de un problema no debe considerarse como su etapa final. Una vez que se haya obtenido su solución, se debe realizar un análisis de las ventajas, calidad de las estrategias o métodos utilizados en el proceso de resolución.

- Aconsejar varias formas de resolución de un problema teniendo en cuenta los diferentes estilos de aprendizajes de los estudiantes, mediante la orientación de su análisis desde el punto de vista de diferentes contextos matemáticos, por ejemplo, geométrico, algebraico, aritmético, funcional, etc. Por lo general, los estudiantes que llegan a la universidad han desarrollado pocas habilidades en el empleo de diferentes vías para resolver un problema, e incluso, muchos terminan su carrera sin esta habilidad.
- Utilizar cadenas del tipo (problema planteado–problema resuelto–nuevos problemas planteados) que motiven y faciliten diferentes generalizaciones de un concepto.
- Ofrecer impulsos y adecuados niveles de ayuda para que sientan la necesidad, una vez solucionado el problema, de plantear nuevos problemas dirigidos, por ejemplo, a eliminar alguna restricción bajo la cual fue resuelto, a un contexto más general intramatemático, o a resolver una situación práctica relacionada con el problema resuelto.
- Motivar el estudio de un nuevo tema mediante el planteamiento de un conjunto de problemas que le permitan a los estudiantes comprender la importancia de dicho tema. Estos problemas pueden estar relacionados con el desarrollo histórico del tema, con aplicaciones, con situaciones del contexto de los estudiantes, etc.
- Utilizar la resolución de problemas para que los estudiantes participen en la construcción de la matemática que aprenden y para que le encuentren un adecuado sentido a sus ideas, etc.

Ideas generales sobre el proceso de formación de conceptos

La formación de un pensamiento científico – teórico en los estudiantes es una exigencia con carácter científico en la educación. Para ello se requiere de un estudio amplio del sentido lógico y teórico – cognitivo de los procesos y formas de pensamiento, sobre todo de los procesos de abstracción, generalización y de formación de conceptos; los cuales, independientemente de sus singularidades, tienen una extraordinaria relación y unidad.

Algunas acciones útiles para que los estudiantes participen en estos procesos son:

- Se le presenta a los estudiantes cierto número de objetos, especialmente seleccionados, con el objetivo que los analicen y los comparen.
- Se ayude (de impulsos) a los estudiantes para que seleccionen propiedades de cada objeto, los comparen con los otros objetos y no consideren las propiedades no comunes.
- Determinar un conjunto de propiedades comunes a todos los objetos analizados.
- Del conjunto de propiedades comunes se debe seleccionar un conjunto mínimo de propiedades (esenciales), a partir de las cuales se puedan obtener todas las demás propiedades comunes.
- Utilizar una palabra para nombrar la clase de todos los objetos que cumplen las propiedades esenciales.

Problemas sencillos de geometría plana que conducen a diferentes medias de dos números reales positivos

El objetivo de estos problemas es mostrar a los profesores cómo es posible facilitar la presentación de un conjunto de objetos numéricos que constituyen su solución, y de esta forma comenzar a llamar la atención de los estudiantes sobre estos números. Si se presentan colecciones de problemas cuya solución numérica también nos llevaría a cada uno de estos números, los estudiantes comenzarán a tener interés por ellos y entonces pueden ser guiados para que sientan la necesidad de encontrar algunos rasgos comunes. El problema que a continuación se plantea ha sido tomado del artículo (Maor, 1977).

Problema 1

Dado un rectángulo de lados a y b, se quiere construir un cuadrado equivalente de lado l, que cumpla una de las propiedades siguientes:

1. ***El cuadrado tiene el mismo perímetro que el rectángulo.*** Esta propiedad se expresa matemáticamente por la igualdad $2(a + b)=4l$, de donde resulta que $l=½(a+b)$.

Una vez que se ha obtenido esta solución es muy importante que se plantee a los alumnos el ejercicio siguiente:

Ejercicio 1. Probar que si se representan en el eje real los números a, b y $½(a+b)$, el punto correspondiente a $½(a+b)$ ocupa el punto medio del segmento que tiene por extremos los puntos correspondientes a los números a y b.

Otra variante de solución apropiada para los estudiantes con un estilo de aprendizaje preferentemente visual o físico, que puede ilustrarse geométricamente, se basa en el razonamiento siguiente: el cuadrado se puede obtener reduciendo el lado mayor b en una cantidad r y aumentando el lado a del rectángulo en una misma cantidad r, hasta que $a+r=b-r$. En efecto, de la igualdad anterior se obtiene $r=½(b-a)$ y de $l=a+r$ resulta que $l=½(a+b)$.

Para que, dados dos números a y b, el número $½(a+b)$ adquiera un significado, es muy importante que se presenten varios problemas cuya solución conduzca a ese número, o en cuyo proceso de solución juegue un papel importante ese número. Sólo entones debemos darle el nombre de media aritmética y utilizar la notación MA, o sea, $MA = ½(a+b)$.

2. ***El cuadrado tiene la misma área que el rectángulo.*** Siguiendo la primera idea, ahora rutinaria, que condujo a la solución del caso anterior; los estudiantes pueden llegar a que $ab = l^2$, o sea, $l = \sqrt{ab}$.

Si se quiere favorecer a los alumnos visuales se puede utilizar e ilustrar geométricamente la idea siguiente: contraer el lado mayor b multiplicándolo por el número $1/r$ y dilatando el lado menor *a* del rectángulo multiplicándolo por el número *r* (*r*>1) de tal forma que $l = b/r = ar$ de donde resulta que $r = \sqrt{b/a}$ y $l = \sqrt{ab}$.

Un ejercicio muy útil para que los estudiantes puedan determinar algunos rasgos comunes de las medias que van obteniendo es el siguiente:

Ejercicio 2: Pruebe que los números *a, b y* $\sqrt{ab}$ satisfacen la cadena de desigualdades $a \leq \sqrt{ab} \leq b$ y determine cuando se cumple la igualdad.

Es recomendable plantear a los estudiantes varios problemas cuya solución conduzca al número $\sqrt{ab}$. Cuando este número haya adquirido importancia para los estudiantes se le puede llamar media geométrica de *a* y *b*, e indicarse por $MG = \sqrt{ab}$.

3. ***Las diagonales del cuadrado tienen la misma longitud que las del rectángulo.*** Siguiendo la primera idea con que se han resuelto los dos casos anteriores se llega a la igualdad $\sqrt{2}l = \sqrt{a^2 + b^2}$, y de aquí resulta que $l = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)}$.

Ejercicio 3. Pruebe que $a \leq \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)} \leq b$ y determine cuando se cumple la igualdad.

Después de plantear otros problemas cuya solución conduzca al número $\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)}$, se puede indicar este número por *MC* y denominarlo media cuadrática de *a* y *b*.

4. ***El cuadrado tiene igual relación área / perímetro que el rectángulo.*** Siguiendo la misma idea anterior se tiene que $\frac{l^2}{4l} = \frac{ab}{2(a+b)}$ de donde resulta $l = \frac{2ab}{a+b}$. A este número se le denomina media armónica de *a* y *b* y se denota por *MH*.

Ejercicio 4 Pruebe que $a \leq \frac{2ab}{a+b} \leq b$ y que las igualdades se tienen si y sólo si $a = b$.

5. ***El cuadrado tiene igual relación área / diagonal que el rectángulo.*** Siguiendo la idea rutinaria usual se llega a la igualdad $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{l^2}{\sqrt{2}l}$, de donde se obtiene que $l = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}}$ $\left(\frac{1}{l} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}\right)$. De la expresión entre paréntesis se concluye que el recíproco del lado del cuadrado debe ser igual a la media cuadrada de los recíprocos de los lados del rectángulo. Por esta razón, se denomina al número $\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}}$ media cuadrática armónica de los números *a* y *b*, y este número se indica por *MHC*.

Ejercicio 5. Pruebe que $a \leq MHC \leq b$ y que las igualdades se tienen si y sólo si, a = b.

Ejercicio 6. Pruebe que la media geométrica de dos números a y b es igual a la media geométrica de las medias cuadrática y armónica cuadrática de dichos números.

Conclusiones parciales

1. Se ha indicado cómo proceder para que dados dos números a y b se contribuya a que tengan un significado especial para los estudiantes los números:

$$\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}},\quad \frac{2ab}{a+b},\quad \sqrt{ab},\quad \frac{1}{2}(a+b),\quad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

2. Se han planteado cinco ejercicios que están dirigidos a destacar dos rasgos comunes a las cinco medias anteriores:
   2.1 Si M es uno cualquiera de esos cinco números, entonces $a \leq M \leq b$
   2.2 Se cumple que $M = a$ si, y sólo si, $a = b$.

Primeras abstracciones y primera generalización vinculadas al concepto de media numérica

En esta sección, trabajando sólo con la forma de las expresiones de cuatro de las cinco medias introducidas, se obtendrán expresiones que admiten, a partir de su comparación, una generalización; o sea, se realiza abstracción de todas las demás características y rasgos de estas cuatro medias y, analizando y trabajando con la forma de sus expresiones, se llega a nuevas expresiones que permiten una primera generalización.

Dados dos números a y b, se deben transformar las expresiones de *MHC, MH, MH, MC* hasta escribirlas en la forma

$$MHC = \left(\frac{a^{-2}+b^{-2}}{2}\right)^{\frac{1}{-2}},\quad MH = \left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{\frac{1}{-1}},\quad MA = \left(\frac{a^{1}+b^{1}}{2}\right)^{\frac{1}{1}},\quad MC = \left(\frac{a^{2}+b^{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

Estas expresiones sugieren sustituir las notaciones *MHC, MH, MH* y *MC* por M_{-2}, M_{-1}, M_{1}, y M_2, respectivamente, y utilizar una expresión general para las cuatro medias; i. e.

$$M_p = \left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},\quad p \in \{-2,-1,1,2\}$$

Si tenemos en cuenta que $\{-2,-1,1,2\} \subset N \subset Z \subset Q \subset R$; entonces no es difícil guiar a los estudiantes para que planteen una primera generalización del concepto de media numérica con una extensión de cuatro objetos a un concepto con una extensión con infinitos objetos.

Definición 1. Se denomina media p-ésima de dos números reales a y b, al número $\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in R \setminus \{0\}$, y se indica por M_p.

Ejercicio 7. Pruebe que $a \leq M_p \leq b$ y que las igualdades se tienen si, y sólo si, $a = b$.

Abstracciones más profundas conducentes a la determinación de rasgos esenciales

El ejercicio 7 de 4 nos permite asegurar que toda media p-ésima tiene esos dos rasgos comunes. A continuación, utilizando expresiones funcionales, enunciamos esos rasgos en forma de propiedades para las medias p-ésimas; con lo que se ejemplifica como es posible iniciar los procesos que conducen a una segunda generalización.

Dados dos números a y b cada media cumple:

(i) Es menor o igual que $max\{a, b\}$ y mayor o igual que $min\{a, b\}$; i. e.

$min\{a,b\} \leq M_p(a,b), G(a,b) \leq max\{a,b\}$

(ii) Es igual a $max\{a, b\}$ e igual a $min\{a, b\}$ si, y sólo si, $a = b$; o sea

$min\{a,b\} = M_p(a,b) = G(a,b) = max\{a,b\}$ *si, y sólo si,* $a = b$

A continuación exponemos una idea de cómo proceder para ayudar a los estudiantes a que comprendan que las medias introducidas satisfacen otra propiedad muy importante. Esto puede hacerse por medio del planteamiento del ejercicio siguiente:

Ejercicio 8. Encuentre los valores de M_{-2}, M_{-1}, G, M_1 y M_2 que corresponden a los valores de $a_k = \frac{1}{k}a$ y $b_k = \frac{1}{k}b$ para $a = 10$, $b = 100$ y $k = \overline{1{,}10}$; y para $a = 1$, $b = 2$ y $k = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{10}$.

Posteriormente se puede guiar a los alumnos para que planteen y prueben la hipótesis siguiente: si se sustituyen a y b por ta y tb; entonces el valor de M_p correspondiente a los valores ta y tb es igual al valor $tM_p(a,b)$.

Además, se pueden presentar ejercicios visuales y físicos que ayuden a concluir que la media geométrica y cada media p-ésima de dos números satisfacen la relación:

(iii) Es invariante por cambio de escala, o sea, $M_p(ta, tb) = t\,M_p(a,b)$, $G(ta, tb) = tG(a,b)$.

En el artículo (Nicolai, 1977) se presenta una definición del concepto de media que toma estas tres propiedades como el contenido de este concepto.

Definición 2. Dados dos números reales positivos a y b, todo número $M(a, b)$ que satisface las propiedades (i), (ii) y (iii) recibe el nombre de media numérica de a y b.

La definición 2 constituye una generalización de las cinco medias introducidas en 3.

Resulta muy importante que el profesor plantee la pregunta: ¿Existen medias numéricas para *a* y *b* que satisfacen la definición 2 y que no son medias p-ésimas?. Esta pregunta puede hacerse con diferentes objetivos: para que los estudiantes determinen si la segunda generalización es más amplia (si la respuesta es positiva) o de igual amplitud (si la respuesta es negativa), lo que favorece la comprensión del concepto: extensión conceptual.

Ejercicio 9. Dados los números reales *a, b,* p_1 y p_2; pruebe que $M_{p_1 p_2}(a,b) = \left(\dfrac{a^{p_1} b^{p_2} + a^{p_2} b^{p_1}}{2} \right)^{\frac{1}{p_1+p_2}}$, satisface la definición 2 si, y sólo si, $p_1 p_2 \geq 0 \quad y \quad p_1 + p_2 \neq 0.$

Del planteamiento de este ejercicio se concluye que la pregunta anterior tiene una respuesta afirmativa; y que por lo tanto, el concepto de media que corresponde a la definición 2 tiene una extensión más amplia que el de media p-ésima.

Conclusiones: Todo concepto posee dos características lógicas muy importantes, la extensión y el contenido. La extensión es la colección de todos los objetos que corresponden al concepto y el contenido es un conjunto de propiedades que constituyen condiciones necesarias y suficientes para que un objeto pertenezca a su extensión.

En este artículo se han utilizado cadenas de problemas y ejercicios para facilitar un primer proceso de formación, desarrollo y generalización del concepto de media, que ha estado encaminado fundamentalmente a la ampliación sucesiva de la extensión de este concepto. Estamos ahora en condiciones de realizar un estudio más amplio del contenido de dicho concepto; o sea, de determinar propiedades adicionales de las medias numéricas. Por ejemplo, la propiedad (i) del contenido de este concepto refiere que todas las medias de dos números *a* y *b* están entre *a* y *b*; luego, es natural preguntarse si las mismas satisfacen alguna relación de orden.

Referencias Bibliográficas

Davidov, V. (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza.* La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

De Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en educación matemática.* Obtenido en mayo 12, 2005, del sitio web de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura: http://www.oei.es/edumat.htm.

Lauber, M.R. (1977) Commenting on Skidell's. The Harmonic Mean. A Monograph and Some Problems. *Mathematics Teacher 70*, p.389.

Maor, E. (1977). A Mathematicians repertoire of means. *Mathematics Teacher 70*, 20-25.

Nicolai, M.B. (1977). Commenting on Maor's. A Mathematicians repertoire of means. *Mathematics Teacher 70,* p.486.

Vygotski L.S. (1998). *Pensamiento y Lenguaje* (2a. ed.). La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.