

## Geometría Dinámica en las Clases de Matemáticas

Claudia Flores y Betsabé Adalia Contreras

CECyT 5, CICATA-IPN<sup>1</sup>, CECyT 11

México

[cfloreses@ipn.mx](mailto:cfloreses@ipn.mx), [becontreras@ipn.mx](mailto:becontreras@ipn.mx)

Formación de Profesores - Nivel medio

### Resumen

En este trabajo se presenta una visión sobre el diseño de actividades de aprendizaje en este tema y sobre el papel del profesor. Esta visión está incluida en los Paquetes Didácticos de la Academia Institucional de Matemáticas y toma como referencia un marco para la elección de problemas y el conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo de matemáticas. El propósito de este escrito es describir los resultados de un taller para profesores en el marco de la XVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Las actividades realizadas permiten construir los conocimientos geométricos a través de la argumentación, y la demostración mediante la realización de construcciones, conjeturas y problemas. El producto de esta aplicación fue la realización de plan puntual para el desarrollo de clases con actividades de geometría dinámica en el aula de cómputo.

### Introducción

La Geometría Dinámica permite representar y manipular objetos matemáticos y sus relaciones. La manipulación de estos objetos, que se pueden ver en la pantalla, se realiza mediante la operación de arrastrar el ratón de tal forma que se pueden identificar las relaciones que permanecen invariantes cuando cambian las propiedades de los objetos. La forma de estudiar Geometría Dinámica se caracteriza por la formulación de conjeturas y la realización de exploraciones que representen los casos posibles. Hanna (2002), por ejemplo, nos menciona que una conjetura en Matemáticas está siempre considerada no más que una conjetura hasta que no sea demostrada. Las actividades en Geometría Dinámica son de tipo inductivo y pueden dar lugar a preguntas que exijan una demostración, como resultado de sus exploraciones. Villiers (1996) utiliza un modelo para las funciones de demostración donde: la verificación es referida a la “verdad” de un enunciado, la explicación proporciona un discernimiento de “por qué” es verdadero. En el estudio de las Matemáticas brinda a los profesores y a los estudiantes recursos que exigen una reflexión sobre las relaciones complejas entre el conocimiento geométrico, la argumentación y la demostración.

Particularmente ‘El Geometra’ (Geometer’s sketchpad 3) permite la modelación en geometría en dos enfoques los dibujos (drawings) y los guiones (scripts). En los dibujos se crean y se manipulan las construcciones geométricas, además se pueden guardar las construcciones realizadas. Los guiones son programas que pueden ejecutarse con un dispositivo de tipo grabadora, de tal manera que, dados los objetos iniciales, se puede hacer la construcción “grabada” paso a paso o, directamente, la construcción final; se realizan construcciones euclidianas con el uso de herramientas y comandos. El docente debe contar con una base en

---

<sup>1</sup> Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada

educación matemática, manejo de herramientas tecnológicas y ser capaz de crear los ambientes de aprendizajes y diseñar las estrategias para el mejoramiento de la educación. A continuación presentamos los proyectos que sirven de base para el diseño de materiales útiles para profesores y estudiantes que toma de referencia para el diseño de actividades de aprendizaje 'Un Marco para la elección de Problemas' (Alarcón, 1996) y el reconocimiento del conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo de matemáticas (Rico, 1998).

### **Proyectos de referencia para las actividades de aprendizaje y el papel del profesor**

La elaboración de materiales de calidad para profesores y estudiantes que les permitan trabajar conjuntamente para lograr los objetivos institucionales en el área de matemáticas en el nivel medio superior, conforma un proyecto desarrollado por la Academia Institucional de Matemáticas del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional (AIM-NMS-IPN). Este proyecto lleva por nombre 'Paquetes Didácticos' (AIM-NMS-IPN, 2001b) y forma del Plan de Trabajo de esta Academia (AIM-NMS\_IPN, 2001a).

Dentro de este Plan de Trabajo se considera que los profesores conformen y desarrollen Comunidades de Aprendizaje (CA) para preparar la comprensión y el uso auténtico en las aulas de los nuevos modelos educativos, en particular del Instituto Politécnico Nacional (IPN), en México. Algunas de las características de los profesores en estas CA son:

- Una actitud abierta para el análisis de su práctica docente y la de sus compañeros.
- Un interés continuo para el desarrollo de las actividades específicas del Taller.
- La lectura y el análisis de los materiales de estudio.
- La participación activa en las actividades y discusiones, y
- Una dialéctica de las perspectivas discente y docente.
- El uso de las TIC que constituye una valiosa herramienta para la creación de material didáctico nuevo.

Retomamos estas características para diseñar un taller en el marco de la XVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. En los siguientes apartados describimos este taller, los materiales usados, las actividades propuestas y los resultados obtenidos.

### **Taller de Geometría Dinámica en las clases de Matemáticas**

El diseño del Taller tomó como referencia los contenidos del programa de Geometría y Trigonometría del IPN, los libros del estudiante (AIM-IPN, 2003a) y del profesor (AIM-NMS-IPN, 2003b) y la documentación del Taller 'Uso del Paquete Didáctico del curso de Geometría y Trigonometría'.

Se brinda al profesor la oportunidad de planear sus actividades en el aula de cómputo. Estos planes permitirán trabajar sistemáticamente con los estudiantes los objetivos del programa y los objetivos institucionales del área de Matemáticas.

El programa propuesto para este breve taller (3 horas) es el siguiente:

Construcciones	Investigaciones guiadas
Problemas	Modelos geométricos
Conjeturas	Exploraciones abiertas
Lecturas	Exploraciones de final abierto

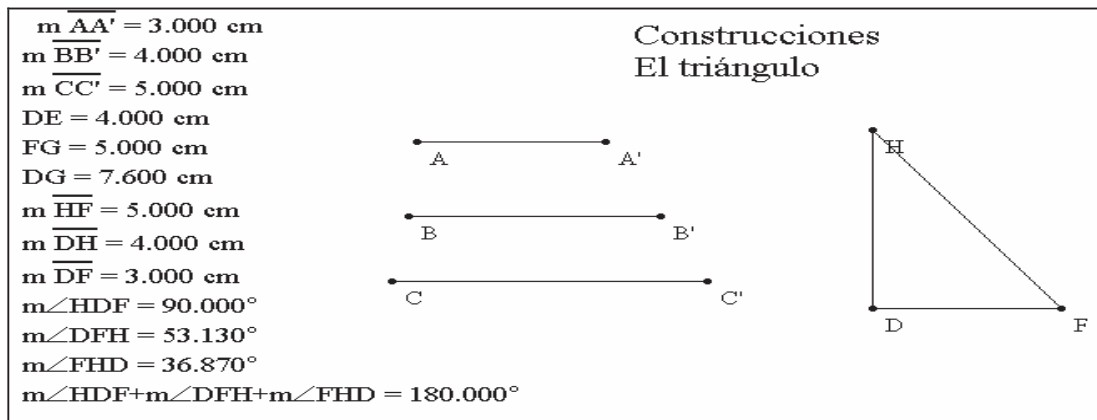
Se adjunta un disco compacto con los materiales que se utilizarán en el curso, cuyo contenido se enlista a continuación:

I. Documentos		
1. Documentación	1.1. Actividades curso GD Cuadros con instrucciones (MSWord y MSPP) 1.2. Descripción del curso GD (MSWord y MSPP) 1.3. Directorio formato (MSWord) 1.4. Productos (descripción)	
2. Sesiones	2.1.S01 Construcciones, segmentos, operaciones básicas y lectura	2.1.1 Triángulo 2.1.2 Construye segmento que tenga doble, triple y quintuple longitud 2.1.3 Napoleón 2.1.4 Cuadrados 2.1.4.1 Construye un cuadrado cuya área sea el doble de la del cuadrado dado. 2.1.4.2 Construye un cuadrado cuya área sea el triple de la del cuadrado dado. 2.1.5 Lectura: Enseñar la demostración en geometría
	2.2.S02 Problemas y Lectura	2.2.1 El Granjero 2.2.2 Las escaleras 2.2.3 Equilátero y resbaloso 2.2.4 Lectura: Problemas, Técnicas, Tecnologías y Teorías.
3. Lecturas	3.1 Enseñar la demostración en geometría. 3.2 El valor permanente de la demostración. 3.3 Técnicas, tecnologías y teorías matemáticas. 3.4 ¿Porqué demostrar la geometría dinámica	

En las actividades realizadas en las sesiones, los participantes trabajan en equipo y discuten grupalmente (véase Suárez, 2000), primero como discentes y, posteriormente, los profesores realizaron un análisis y una discusión del diseño de las actividades.

### Actividades de Familiarización

En la primera sesión del Taller se realizaron una serie de construcciones con el propósito al que los profesores se familiarizarán con las principales funciones del geómetra y con la modalidad de trabajo. Los Profesores realizaron algunas construcciones usando las funciones básicas del geómetra, las construcciones con regla y compás euclidianos y la comparación por razón de las medidas de los segmentos. A continuación se muestra el trabajo de un equipo.

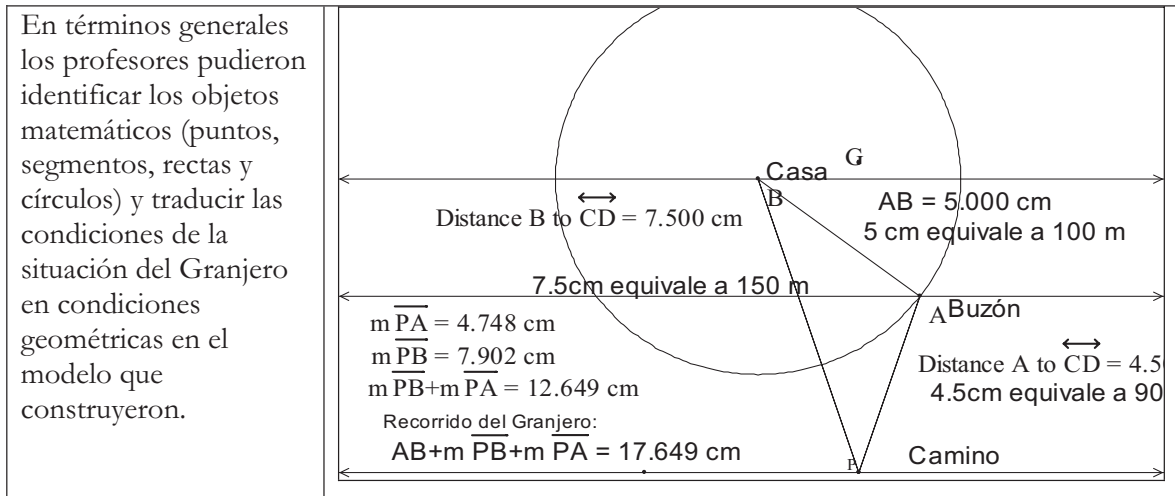


### La modelación de un problema

En los problemas elegidos para el taller se ponen en juego conocimientos y estrategias complejos sin embargo en este trabajo nos concentramos en el proceso de modelación, que va de las características de las situaciones descritas de los enunciados de los problemas a los objetos geométricos y sus relaciones. En la lectura “Problemas, Técnicas, Tecnologías y Teorías” (Véase en Chevillard, et al, 1998) se habla de la técnica de los lugares geométricos, considerando que una técnica puede ser utilizada de manera normalizada, comprensible, correcta y justificada.

El proceso de modelación de uno de los problemas ‘El Granjero’ se describe en la siguiente resolución de referencia.

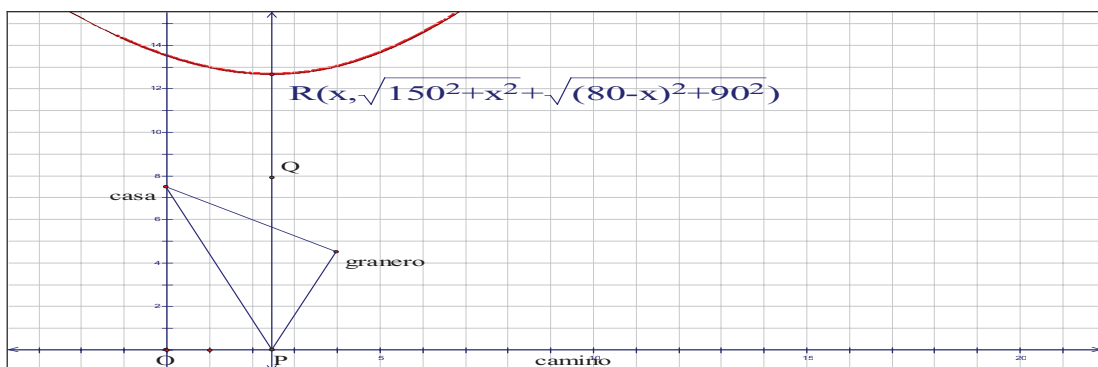
La casa de un granjero está a 150 m de un camino recto. Su buzón está sujeto al granero, a 100 m de la casa y a 90 m del camino. Cada lunes deja la basura a la orilla del camino y después pasa a recoger el correo. ¿Qué punto del camino hace que su recorrido sea el más corto?



En particular la técnica de los dos lugares geométricos sirvió para que los participantes identificaran o localizaran el granero (Buzón) como los puntos que satisfacían las dos condiciones estar a 90 m del camino (los puntos constituían el lugar geométrico de una recta paralela al camino) y estar a 100m de la casa (los puntos constituían el lugar geométrico de un círculo de radio 100 y centro en la casa).

El recorrido mínimo del granjero es de aproximadamente 252.98 m ( $12.649 \cdot 20$ ) cuando deja la basura. A éste recorrido de 252.98 m se le considera los 100 m que hay entre el granero y la casa por lo que el recorrido total mínimo es de 352.98 m ( $17.649 \cdot 20$ ).

Otra forma de obtener el recorrido total mínimo es a partir de la ecuación que incluye un sistema de referencia. El origen es el punto O, PQ y QR son las hipotenusas de dos triángulos rectángulos cuyos catetos, respectivamente, son 150 y x, y (80-x) y 90.



En la exposición de las actividades se eligieron dos equipos que presentaron sus soluciones y posteriormente los profesores discutieron la pertinencia del problema como medio de aprendizaje. Los profesores en general usaron la técnica de los dos lugares geométricos para identificar la posición del granero. Un aspecto destacable fue la discusión que se dio para ubicar en el camino en el punto que se depositaba la basura (un punto cualquiera del camino). En el modelo la posibilidad que ofrece la geometría dinámica de desplazar el punto sobre la

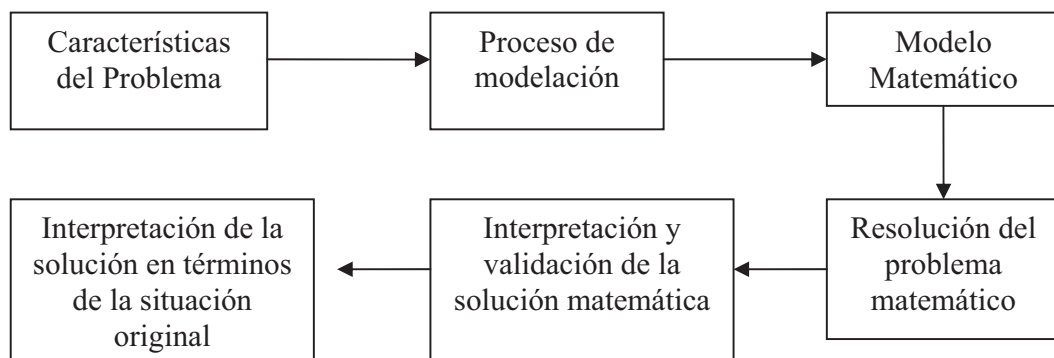
recta que presenta el camino permitió que la trayectoria variable del Granjero se pudiera explorar mediante la suma de las medidas de los segmentos que representaron esta trayectoria.

Los productos del taller que se obtuvieron fueron un plan puntual para el desarrollo de las clases en el aula de cómputo y un portafolio con las actividades realizadas en el taller.

El desarrollo de las actividades planeadas debe estar enfocado al hecho de que los estudiantes alcancen a desarrollar las competencias matemáticas necesarias para comprender, utilizar, aplicar y comunicar conceptos y procedimientos matemáticos y, así, descubran que las matemáticas están relacionadas con la vida y con las situaciones que los rodean, más allá de la escuela.

### Conclusión

En el proceso de modelación del Granjero pudimos identificar las etapas siguientes:



Una vez construido el modelo geométrico el potencial de las funciones de la geometría dinámica permitió obtener una solución aproximada en la solución posterior, ya desde la perspectiva docente, se esbozo en una solución analítica con la trayectoria considerada como la suma de las hipotenusas de triángulos rectángulos y otra usando reflexiones y semejanzas.

Una característica del taller que resulto particularmente provechosa, según los comentarios de los participantes, fue la alternancia de los puntos de vista o de las perspectivas discentes y docente ya que la experiencia de resolver los problemas y posteriormente discutir su potencial como medio de aprendizaje les permitió dar los primeros pasos en la elaboración de la historia de la actividad.

### Referencias Bibliográficas

AIM-NMS-IPN (2003a). *Geometría y Trigonometría*. Libro para el Estudiante. IPN.  
AIM-NMS-IPN (2003b). *Geometría y Trigonometría*. Libro para el Profesor. IPN.  
AIM-NMS-IPN (2001a). *Plan de trabajo de la Academia Institucional de Matemáticas del Nivel Medio Superior del IPN*. Documento interno de trabajo. México D.F., México:IPN

- AIM-NMS-IPN (2001b). *Proyecto Paquetes Didácticos para los Cursos de Matemáticas*. Documento interno de trabajo. D. F. México: IPN
- Alarcón, J. (1995). [Precálculo y Resolución de Problemas] Datos en bruto no publicados.
- Chevallard, Y., Bosch, M y Gascón, J. (1998). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. D. F. México: SEP.
- Hanna. (2002). El valor permanente de la demostración. *Revista virtual Xixim*, 2
- Rico L. (1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 1, (1), 22-39.
- Suárez, L. (2000). El trabajo en equipo y la elaboración de reportes en un ambiente de resolución de problemas. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN
- Villiers (1996). *Why Proof in Dynamic Geometry?* Forum in Mathematics in College, Instructional Resource Center, CUNY. 40-41.