

Comparación de la Enseñanza de la Geometría en los Sistemas Escolares Chileno y Francés

Corine Castela e Ismenia Guzmán

Institut Universitaire de Formation des Maîtres de Rouen et Equipe Didirem Paris 7 y
Pontifical Universidad Católica de Valparaíso
Francia y Chile

Corine.Castela@rouen.iufm.fr, iguzmanr@vtr.net
Pensamiento Geométrico - Básico

Resumen

Este reporte trata de una investigación cooperativa cuyo tema es la comparación de la enseñanza de la geometría en Chile y en Francia (proyecto ECOS-CONYKIT). Después de definir nuestra metodología por zooms sucesivos, presentamos las mayores diferencias que encontramos entre los dos países. Estas diferencias conciernen a los ámbitos siguientes: la concepción de la geometría, los aspectos de la actividad matemática puestos en evidencia, la organización del aprendizaje, la extensión de los programas, la importancia dada a las aplicaciones de matemáticas y a la modelación. Los trabajos de C.Houdement y A.Kuzniak sobre los paradigmas geométricos nos permiten analizar las concepciones de la geometría.

Presentación de la investigación

Se trata de un proyecto¹ de cooperación franco-chileno² que reúne investigadores de la PUCV de Valparaíso y por el lado francés, investigadores que en la mayoría pertenecen al equipo Didirem de la Universidad Paris 7. Todos intervienen en la formación de docentes.

El tema general del estudio es la comparación de la enseñanza de las matemáticas en Chile y en Francia con la ambición de alcanzar una comparación de los sistemas de formación de docentes. Nuestra primera opción metodológica fue la siguiente: limitar el campo de investigación a la enseñanza de la geometría, un tema presente en todos los niveles de la enseñanza obligatoria en ambos países, es un ámbito fundamental tanto para el desarrollo de las matemáticas, como para el empleo de las matemáticas en la vida cotidiana y en otras ciencias. Planteamos la hipótesis que las opciones elegidas para la enseñanza de la geometría son representativas de la concepción de las matemáticas y también de la concepción del aprendizaje y de la enseñanza de esta disciplina, vigentes en cada país.

Metodología

Procedimos por zooms sucesivos, centrándonos sobre preguntas cada vez más concisas:

- Primer nivel de estudio de los textos oficiales: *comparación de los contenidos mínimos obligatorios para la totalidad de la escolaridad básica y media.*

¹ Nuestro trabajo empezó en Febrero de 2003; presentamos la primera parte de la investigación.

² Cf. el anexo al fin de la parte II de este reporte para unas noticias sobre los dos sistemas escolares.

Nos interesamos primero en los conceptos y teoremas enseñados, es decir en el Saber Matemático, luego en los procedimientos de trazado con instrumentos, en los elementos relativos al razonamiento matemático y al final en los saberes culturales e históricos.

- Segundo nivel de estudio de los textos oficiales: *análisis de la concepción de la geometría según los niveles escolares e investigación sobre las funciones atribuidas a la enseñanza de la geometría.*

¿Por qué enseñar geometría? Un estudio muy detallado de los textos franceses permitió identificar varias funciones que se pueden atribuir a la enseñanza de la geometría y que buscamos pues en los textos del Ministerio de Educación Chileno.

- Tercer nivel : *Estudio de los manuales escolares centrado sobre los capítulos que tratan de los triángulos semejantes y conocimientos vinculados (dibujo a escala, teorema de Tales, homotecia...).*

Examinando un manual chileno de 2Medio (A10³), nos dimos cuenta que el capítulo sobre los triángulos semejantes trata estos conocimientos de una manera muy diferente de la que encontramos en Francia. Un análisis más preciso de las opciones chilenas nos permitió determinar varios ejes de estudio de los manuales franceses. Por ejemplo: ¿Se puede emplear un dibujo para obtener datos utilizables en una demostración? ¿En qué organización matemática se encuentra en Francia la representación a escala? ¿Cómo se tratan los problemas de determinación de medidas inaccesibles?

Estas preguntas dieron origen a un estudio de los manuales franceses más empleados en todos los niveles de colegio y de liceo. Este estudio confirma los resultados recogidos en los dos niveles más globales de nuestro trabajo. Estos resultados los presentamos de una manera muy sintética a continuación.

- Cuarto nivel : *Estudio de la relación con la geometría de estudiantes futuros docentes, en Chile y en Francia, considerando esta relación como un indicador de los efectos del sistema de enseñanza.*

Desarrollamos este aspecto en la parte II de nuestro reporte.

Interpretación sintética de las informaciones recogidas a través del estudio de los textos oficiales y de los manuales.

Las intenciones generales expresadas en la introducción de los programas en Chile y en Francia son muy cercanas; ellas recomiendan:

- Desarrollar todos los aspectos de la actividad matemática: observar, experimentar, comparar, sistematizar y fundamentar conclusiones.
- Proporcionar diversos problemas, tanto desafíos de la matemática misma como situaciones de modelación y aplicación en varios ámbitos.
- Apoyar el aprendizaje sobre la resolución de problemas que permite la construcción del sentido de los conceptos.

³ A1 representa el primer año de escolaridad, A5 el quinto, A10 el decimo etc.

Nuestro estudio muestra que hay diferencias importantes en la realización de estas declaraciones de principios; estas diferencias a continuación.

Diferencia en cuanto a la concepción de la geometría

El marco teórico de nuestro análisis se refiere a los trabajos de Catherine Houdement y Alain Kuzniak acerca de la geometría. Estos investigadores, que son miembros del equipo, distinguen tres paradigmas: la geometría natural, la geometría axiomática natural, la geometría axiomática formal:

- **La geometría natural (Geometría I)**

Los *objetos* de esta geometría son objetos materiales, dibujos trazados con instrumentos para el plano y sólidos para el espacio; estos no son todos los objetos del mundo físico: por ejemplo, un balón de fútbol no es un objeto de la geometría I, sino se puede modelar por diferentes sólidos, por ejemplo, una esfera o uno poliedro.

Las actividades importantes en este paradigma son la observación, la manipulación y la experimentación apoyadas en instrumentos, también el dibujar con instrumentos y el armar cuerpos geométricos (maquetas). La *validación* de las proposiciones se funda sobre una interacción entre experimentación, verificación con instrumentos (se puede medir) y razonamientos no necesariamente formales.

Podemos referir este paradigma a la geometría de los matemáticos Arquímedes o Clairaut.

- **La geometría axiomática natural (Geometría II)**

En este caso, los *objetos* son abstracciones que modelan los objetos materiales de la geometría I en el mundo de las ideas. Estos objetos los llamamos figuras, las que distinguimos de los dibujos y sólidos: las figuras son clases determinadas por un conjunto de propiedades a partir de objetos básicos, puntos, rectas, segmentos etc. que son también abstracciones (por ejemplo, un punto de la geometría II no tiene ninguna dimensión).

En este paradigma, dibujos y sólidos son representaciones materiales de objetos abstractos, ellos constituyen un campo de trabajo, de exploración, fuente de conjeturas e intuiciones pero este campo no permite validación. Sólo las demostraciones pueden fundamentar conclusiones a partir de hipótesis y de teoremas ya conocidos. Por esta razón, establecer propiedades características y formular definiciones minimales es esencial en esta geometría. Ellas pueden llegar a constituir axiomáticas locales. Cabe señalar que este no es el caso de la geometría I.

Podemos referir este paradigma a la geometría de Euclides.

- **La geometría axiomática formal (Geometría III)**

Se trata de una geometría cuya axiomática se libera de todo proyecto de modelación del mundo material. No presentaremos más allá este paradigma porque no se encuentra en la enseñanza básica ni media de ambos países. Podemos referirlo a la geometría de Lobatchevski y Riemann.

Chile y Francia se distinguen claramente por su manera de ubicar la enseñanza de la geometría respecto a los paradigmas I y II.

En Francia, la geometría de la escuela (A1-A5) se sitúa en GI. A partir del segundo año del colegio (A7), es cierto que la geometría del plano está en GII con los primeros aprendizajes de la demostración; el caso del primer año del colegio no es tan claro, mostramos que, desde este nivel, medir y tomar informaciones de los dibujos es muy raro en la clase de matemática.

Los textos oficiales no proponen ninguna reflexión pedagógica para los docentes acerca de las diferencias entre los paradigmas. En estas condiciones, hay poco o nada de esfuerzo para legitimar este enorme cambio entre la escuela y el colegio, en consideración de los alumnos.

En Chile, GI se encuentra por lo menos hasta el 2Medio (A10), dando una gran importancia al dibujo con instrumentos así como a manipular y armar sólidos geométricos. Incursiones en GII empiezan en 8 Básico (A8) y se desarrollan luego en la enseñanza media que introduce el aprendizaje de la demostración. Nos parece que los dos paradigmas viven simultáneamente en una relación pragmática que encontramos en el extracto siguiente del programa de 8 Básico: « *Es importante destacar que cuando el razonamiento permite establecer claramente la relación entre ángulos no es necesario medir* ». Se pueden plantear problemas dentro de la geometría I. Si hay herramientas de la geometría II que son eficaces para resolver estos problemas con demostraciones, entonces ellas son elegidas. Si no, se puede recurrir a las herramientas de la geometría I, como la medida. Esto es exactamente lo que hacen los manuales de 2Medio (A10) para la determinación de medidas inaccesibles (cf nuestro taller).

En resumen, podemos decir que la enseñanza francesa desarrolla muy temprano una concepción axiomática de la geometría mientras que la enseñanza chilena instala progresivamente una geometría mixta que utiliza los recursos de ambos paradigmas.

Diferencia en cuanto a los aspectos de la actividad matemática puestos en evidencia / diferencia en cuanto a la organización del aprendizaje

El aprendizaje de la demostración es una dimensión fundamental de la formación matemática que busca la enseñanza francesa a partir del colegio. Esta es una característica bien conocida. A la inversa de los textos chilenos, los textos que acompañan los programas franceses no intentan ilustrar otros aspectos de la actividad matemática con ejemplos de situaciones. En este contexto, las instrucciones consideran claramente la geometría como el lugar principal del aprendizaje de la demostración. Cabe señalar que la mayoría de los trabajos propuestos a los alumnos esperan que empleen los conceptos y teoremas del programa como herramientas para demostrar propiedades ya enunciadas por el texto del problema.

En cuanto a Chile, dentro del marco de la geometría I y luego de la geometría mixta mencionada anteriormente, las instrucciones proponen una práctica mucho más equilibrada de la actividad matemática. Esto se muestra en los contenidos exigidos y todavía más en las actividades de aprendizaje sugeridas por los textos del Mineduc con tareas como observar, describir, establecer relaciones, registrar ordenadamente sus observaciones, fundamentar (lo que en GI no toma la estructura de una demostración). Como vemos en los ejemplos siguientes, se espera también que los alumnos tomen parte en establecer unos resultados del programa:

Experimentación de diversos procedimientos (gráficos y concretos) para medir el perímetro y el área de circunferencias (A8)

Demostrar el teorema relativo a la potencia de un punto si este está en el interior de una circunferencia. Lo *aplican* en la resolución de problemas. (A10)

En resumen, en colegio y liceo, el sistema francés insiste en el aspecto demostración de la actividad matemática y en la utilización de los conocimientos enseñados a través de problemas más o menos cerrados. El sistema chileno, a nivel de los textos oficiales, relativiza el aspecto demostración y desarrolla las dimensiones exploratorias de la resolución de problemas.

En las condiciones chilenas, incluso los conceptos y los teoremas enseñados pueden ser objetos de secuencias de trabajo que solicitan la actividad de los alumnos. En Francia, a pesar de las tentativas inspiradas por los trabajos de didáctica, parece que para los colegios y todavía más para los liceos, la enseñanza francesa de la geometría sigue funcionando como si bastare introducir un objeto por su definición, un teorema por su enunciado para crear las condiciones de su empleo. Entonces, lo que aparece como una diferencia en la concepción de la actividad matemática produce de hecho **una diferencia en la organización del aprendizaje**.

Podemos suponer que los docentes franceses de matemáticas, formados en primer lugar como matemáticos, tienden a identificar exposición del saber y aprendizaje y entonces que cambiar esto necesita un esfuerzo de formación más importante de lo que existe. Pero vamos a ver a continuación que el ritmo elegido por los programas franceses tampoco crean las condiciones temporales que necesita una enseñanza diferente.

¿Que pasa en Chile? La opción elegida por las instrucciones vigentes parece tomar en cuenta el proceso de construcción de los conocimientos. ¿En qué medida los docentes desarrollan estas orientaciones en sus cursos, en las condiciones materiales de las aulas chilenas? A esta pregunta, nuestro estudio no nos permite todavía contestar.

Diferencia en cuanto a la extensión de los programas

El estudio de los programas en términos de contenidos enseñados muestra que el conjunto de los conceptos y teoremas de geometría presentes en los programas chilenos de la Básica y Media equivale prácticamente al programa de la escolaridad obligatoria en Francia, que se termina a la edad de 16 años y va hasta el nivel de *Seconde* (A10). **Si consideramos los objetos del Saber Sabio, el tiempo didáctico transcurre mucho más deprisa en Francia que en Chile**. Se puede comprender que, en estas condiciones, el tiempo concedido al aprendizaje de cada noción y el tiempo concedido a la práctica matemática de los alumnos, sean reducidos en Francia respecto a las posibilidades disponibles con el ritmo chileno.

Por otro lado, encontramos que, en la lista de los contenidos exigidos, los procedimientos de dibujo geométrico son más numerosos en Chile que en Francia, eso es coherente con la importancia dada a la geometría I. Por último, elementos precisos relativos a la historia de las matemáticas y a su relación con artes se encuentran en el programa chileno de Media; en Francia, estos aspectos culturales aparecen sólo en las partes optativas de los programas o para los alumnos de *Première* y *Terminale* (A11-12) especializados en literatura o en artes.

El análisis de los contenidos enseñados en los dos últimos años del liceo francés en la especialización científica muestra la orientación universitaria de esta enseñanza. Los alumnos encuentran ejemplos de objetos que la enseñanza universitaria de matemáticas presenta en una forma general (por ejemplo, primer encuentro con espacio vectorial, con un producto escalar, con un espacio afín euclidiano y sus transformaciones, con un grupo no conmutativo. Además, los textos atribuyen explícitamente a la geometría funciones de ayuda a la comprensión y al desarrollo de los otros ámbitos matemáticos (comprensión de los sistemas lineales, desarrollo del análisis).

Es claro que las exigencias de la universidad dirigen los programas de la especialización científica; estos deben responsabilizarse de los conocimientos que los matemáticos de la universidad consideran como mínimo necesario.

Esta orientación hacia la universidad tiene como resultado reducir el tiempo atribuido a la enseñanza de lo que ambos países consideran como la cultura geométrica indispensable para cada persona. Se puede suponer que esta aceleración del ritmo didáctico en Francia contribuye a las diferencias señaladas anteriormente, a nivel de colegio y de liceo: elección de la estrategia de enseñanza más económica en tiempo, concentración sobre las matemáticas en detrimento de dimensiones culturales e históricas, en detrimento también de las aplicaciones de las matemáticas, concentración sobre el aspecto considerado como esencial en la práctica matemática, es decir, la demostración.

Diferencia en cuanto a la importancia dada a las aplicaciones de matemáticas y a la modelación

Por falta de espacio, no desarrollamos aquí este aspecto de nuestro trabajo. Diremos sólo que el estudio de las instrucciones y el análisis detallado de los manuales franceses, a cerca de las tareas de determinación de medidas inaccesibles muestran que, en Francia, las matemáticas escolares no se interesen en serio a la resolución de problemas concretos ni en la modelación. En las instrucciones y manuales chilenos, encontramos un esfuerzo para hacer devolución a los alumnos de situaciones realistas.

Conclusión

Para concluir, nos referiremos a los niveles de especificación didáctica de Yves Chevallard. El cuadro siguiente, con los aspectos caricaturales inherentes a toda esquematización, resume las diferencias puestas de manifiesto, interpretándolas como huellas, a nivel de la geometría y de las organizaciones matemáticas más locales, de opciones que competen a los niveles superiores de la clasificación de Chevallard:

- Nivel 1= La Disciplina, cuya influencia se percibe en los puntos 1, 2, 3 del cuadro que conciernen a la concepción de las matemáticas.
- Nivel -1 = La Escuela, en los puntos 3, 4 que refieren a las finalidades de la enseñanza de las matemáticas.
- Nivel 0 = La Pedagogía, que influencia la concepción del aprendizaje (5).

	Chile	Francia
1	Matemáticas mixtas	Matemáticas axiomáticas
2	Desarrollo de todos los aspectos de la práctica matemática, exploración y experimentación	Insistencia sobre la demostración.
3	Matemáticas vistas en sus relaciones al mundo y a la cultura	Matemáticas por si mismas
4	Enseñanza obligatoria dirigiendo sus esfuerzos a transmitir una cultura matemática común	Enseñanza secundaria de las matemáticas, incluso Enseñanza obligatoria, dirigido por la Enseñanza superior
5	Construcción y utilización de los conocimientos	Transmisión formal y utilización del saber matemático

Concluiremos insistiendo sobre el inmenso interés que encontramos en este trabajo de comparación: en ambos países, nos abrió los ojos sobre aspectos de nuestro propio sistema de enseñanza que no veíamos, lo que nos permite hacer varias nuevas preguntas de investigación.

Referencias Bibliográficas

- Bosch, M., Espinoza, L. y Gascon, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherche en didactiques des mathématiques* 23(1), 79-136.
- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 1. Structures et Fonctions. En J-L. Dorier & Al. (Eds.), *Actes de la 11ième Ecole d'été de didactique des mathématiques -Corps- 21-30 Août 2001*. (pp. 2 - 22). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Ecologie et régulation. En J-L. Dorier & Al. (Eds.), *Actes de la 11ième Ecole d'été de didactique des mathématiques -Corps- 21-30 Août 2001* (pp. 41 - 56). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.
- Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics* 40, 283-312.
- Houdement, C. y Kuzniak, A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherche en didactiques des mathématiques* 20(1), 89-116.
- Kuzniak, A. y Rauscher, J. C. (2003). Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école, in *Actes du XXIX ème colloque de COPIRELEM*. France: IREM des Pays de la Loire.