Geometría en Bachillerato

Gustavo Bermúdez
ANEP. Consejo de Educación Secundaria.
Uruguay
gbermudez@ipn.mx, gbermudez@adinet.com.uy

Factores afectivos, Pensamiento geométrico, Resolución de problemas – Nivel Medio y Superior

Resumen

La enseñanza de la geometría es materia de muchos estudios y aproximaciones. En trabajos considerados para este taller (Bermúdez,1996; Flores y Barrera,2002; Nolé, 2001; Siñeriz,2002; Gutiérrez y Jaime,1994), se percibe el interés de docentes e investigadores latinoamericanos en generar propuestas que permitan mejorar su enseñanza. En general, éstas parten del modelo Van Hiele[1], y se reportan propuestas a alumnos (Bermúdez, 1996) y profesores (Flores y Barrera, 2002) en los cuales se exploran dificultades de unos y otros para acceder a los distintos niveles de aprendizaje. Así, se propuso este taller donde el participante pudo experimentar el proceso de conjetura y demostración, para trabajar en el nivel 4 del modelo, del que se registran pocas propuestas.

Introducción

La propuesta de taller presentado en esta oportunidad, es la continuación de una línea de trabajo en el área de la enseñanza de la geometría que el autor ha presentado en varias reuniones anteriores: Puerto Rico 1996, República Dominicana 1999 y Argentina 2001, en búsqueda de estrategias que permitan a los estudiantes la participación activa en la construcción de su conocimiento y apropiarse verdaderamente de una poderosa herramienta de comprensión del mundo de la matemática como lo es la geometría métrica (o euclidiana). Desde la utilización de los instrumentos geométricos, que permiten construcciones más o menos elementales, se propusieron en este taller, la resolución de un conjunto de problemas sobre lugares geométricos. En ellos, los participantes, debieron analizar, conjeturar y demostrar, en un ambiente de trabajo en equipo.
El objetivo perseguido, es el de tener "a mano" una serie de problemas y ejercicios, que permitan trabajar con propuestas para el nivel 4 de Van Hiele. En general, las que se registran, se destinan al trabajo en los primeros dos o tres niveles.

---

[1] Según (Gutiérrez y Jaime, 1995) los cuatro niveles de Van Hiele, pueden esquematizarse de la siguiente forma: Primer nivel: la consideración de conceptos es global, no se consideran elementos ni propiedades. Segundo nivel: los conceptos se entienden y manejan a través de sus elementos. Tercer nivel: se establecen relaciones entre propiedades. Cuarto nivel: se caracteriza por la comprensión y el empleo del razonamiento formal. Esto significa que "*se comprende y utiliza el engranaje existente en el mundo matemático, por el cualexisten unas primeras propiedades –axiomas- a partir de las cuales se puede construir el edificio matemático, en el cual las reglas de juego consisten en la aplicación estricta y correcta, según las leyes de la lógica, de propiedades ya verificadas para obtener nuevas propiedades*". Quinto nivel: a partir de diferentes sistemas axiomaticos, es posible manejarse en diferentes geometrías. Los niveles no están asignados a una edad especial de los estudiantes.

Este cuarto nivel, es el que plantea la posibilidad del alumno de efectuar conjeturas y demostraciones. O sea, el alumno que llega a este nivel, es el que puede demostrar. Por ello, la demostración, como proceso, es central en el trabajo propuesto.

Así, se intentaron acercamientos para percibir el valor de la demostración en geometría (y, por extensión, a la matemática): un tema que ha sido analizado y estudiado ampliamente, pero que sigue planteando dificultades a alumnos, y resulta árido a los docentes.

En los últimos años, además, la propuesta de hacer demostraciones en la clase (aún en bachillerato) ha sido puesta en cuestión, en parte debido a algunas discusiones que se han generado en torno al papel de la demostración en el currículum, especialmente en Norteamérica en los últimos 30 años.

Es especialmente ilustrativo, lo que afirma (Hanna,1996), buscando causas de esta situación:

> " *en la investigación misma el uso de las demostraciones asistidas por la computadora, la creciente consideración en la cual se considera la experimentación en matemáticas y la invención de nuevos tipos de demostración que se separan de los criterios tradicionales, han llevado a plantear la hipótesis que los matemáticos aceptarán tales formas de validación en lugar de las demostraciones.*" (traducción libre del autor)

Todos vemos día a día propuestas, que más que demostraciones, consisten en verificaciones o experimentaciones, muchas veces visualizaciones mediante herramientas informáticas, pero que frecuentemente dejan de lado la rigurosa demostración. La creciente utilización de, por ejemplo, software para geometría dinámica, ha provocado una gran difusión de "demostraciones" que se reducen al registro de elementos visuales, de experimentaciones, pero que dejan totalmente relegada la misma justificación de tales situaciones o resultados.

Sin embargo, sostenemos que la demostración, la posibilidad de aprender a demostrar, de "armar" y escribir una demostración, es parte imprescindible de la formación básica matemática de cualquier individuo.

La propuesta consistió en una serie de problemas, tomados de diferentes ámbitos y cursos de geometría euclidiana o métrica de Uruguay, buscando acercamientos variados, en los que, además de trabajar en geometría, se buscaron formas para que cada participante pudiera, mientras trabajaba en geometría, experimentar el valor de la demostración.
Compartimos la preocupación de Gila Hanna:

> *" ..muchos de los que se ocupan de la didáctica de las matemáticas han llamado en cuestión el estatuto de la demostración llevando adelante la afirmación ,(.....) de que la demostración es un elemento clave para la imagen autoritaria de las matemáticas....*
>
> ....
>
> *De hecho es verdad lo opuesto. Una demostración es un razonamiento transparente, en el cual todas las afirmaciones usadas y todas las reglas de razonamiento son claramente expuestas y abiertas a las críticas. La misma naturaleza de la demostración impone que la validez de las conclusiones deriva de la demostración misma,*

> *no de una autoridad externa.. La demostración lleva a los estudiantes el mensaje de que pueden razonar por su propia cabeza, que no tienen necesidad de remitirse a una autoridad. Por lo tanto el uso de la demostración en la práctica didáctica es realmente anti-autoritario* (traducción libre del autor)

Se consideraron problemas de "determinación de lugares geométricos", como objetos que permiten "hacer demostraciones". Un *lugar geométrico* es un conjunto de elementos geométricos caracterizados por una propiedad (en general, pues, un conjunto de puntos definido por comprensión).

El análisis del problema de "determinar el lugar geométrico" de un punto, implica demostrar dos proposiciones que llamamos directa y recíproca.
Es decir, diremos que si el punto cumple la propiedad, entonces pertenece a una figura *F*; y recíprocamente, si el punto pertenece a la figura F, entonces cumple la propiedad .

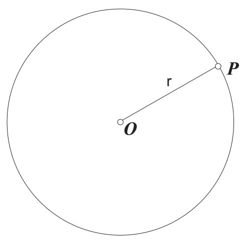
Bajo estos supuestos, en el trabajo realizado, se debieron demostrar condiciones necesarias y suficientes. Podríamos abundar en los detalles "formales" de este tipo de proposiciones, pero nos limitaremos a establecer, al menos, que la lista de problemas constituyen un ejercicio de demostración, en las cuales, además, es posible distinguir proposiciones directas y recíprocas. Y todos los docentes, somos concientes de la gran dificultad que experimentamos en nuestras clases cuando intentamos demostrar o, incluso, hacer comprender la diferencia entre proposiciones directas y recíprocas.

Por ello, comenzamos por recordar algunas definiciones con las que trabajaríamos, caracterizando a estos entes geométricos, básicamente, por sus características como lugares geométricos.

Lugares geométricos básicos:

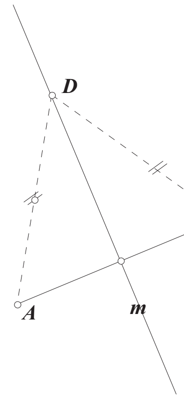
Circunferencia: Es el conjunto de los puntos del plano que distan una longitud r (radio) de un punto fijo *O* (centro)

En símbolos: $P \in C \Leftrightarrow \mathbf{d}(P, O) = r$



Mediatriz de un segmento: Es el conjunto de los puntos de un plano que equidistan de los extremos del segmento.

En símbolos: $D \in m \Leftrightarrow \mathbf{d}\,(D, A) = \mathbf{d}\,(D, B)$

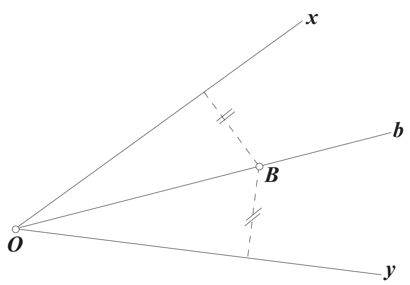


Unión de paralelas: Es el conjunto de los puntos de un plano que distan una longitud l de una recta r.

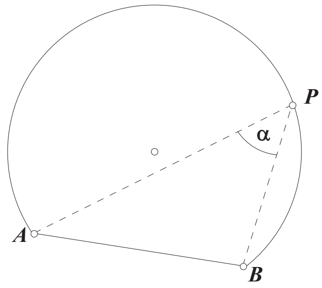
En símbolos:$E \in n \Leftrightarrow \mathbf{d}\,(D, r) = l$

Bisectriz de un ángulo: Es el conjunto de los puntos interiores del plano que equidistan de las rectas que contienen los lados del ángulo.

En símbolos: $B \in b \Leftrightarrow \mathbf{d}\,(B, Ox) = \mathbf{d}\,(B, Oy)$



Arco capaz: Es el conjunto de los puntos del plano que son vértices de un ángulo dado, cuyos lados pasan por dos puntos fijos.



Los problemas:

1.- Dadas dos semirrectas perpendiculares, Ox y Oy, fijas. Se considera en cada una de ellas puntos A y B (variables) tales que la distancia AB sea constante. Sea M el punto medio del segmento AB.

a. Determine el lugar geométrico del punto M
b. Por A y B se trazan dos rectas perpendiculares a las semirrectas Ox y Oy que se cortan en P. Determine el lugar geométrico del punto P.

2.- Se considera una recta m y un punto $A \in m$ fijos. Se construyen los triángulos equiláteros ABC (de sentido horario), con $B \in m$.

a. Determine el lugar geométrico del punto C al variar B.
b. Sea I el incentro del triángulo ABC, determine el lugar geométrico de I al variar B

3.- Sea AMN un triángulo equilátero (en sentido antihorario) fijo. Una recta r variable, pasa por M, y en ella se consideran dos puntos B y C, tales que el triángulo ABC es equilátero (antihorario).

a. Determine el lugar geométrico de B cuando r no corta al segmento AN
b. Determine el lugar geométrico de B cuando r corta al segmento AN.

4.- Sean una circunferencia, de centro O, y un punto P exterior a ella (fijos) Por P se traza una recta n (variable), que corta a la circunferencia en dos puntos A y B. M es el punto medio del segmento AB. Determine el lugar geométrico de M.

5.- Sea una semi-circunferencia fija de diámetro AB. En ella se consideran dos puntos M y N tales que la distancia entre ellos es igual al radio (A, M, N y B horario). Las rectas AM y BN se cortan en L. Determine el lugar geométrico de L.

6.- Sea AB una cuerda fija (no diametral), de una circunferencia C fija. En el mayor de los arcos que determinan A y B, se considera un punto P variable. En la semirrecta opuesta a PA se elige un punto D, de forma que $\overline{PD} = \overline{BD}$ Determine el lugar geométrico del punto D.

7.- Sea BC una cuerda fija, no diametral, de una circunferencia C. En el mayor arco de los determinados, se elige un punto A, variable. Determine el lugar geométrico del *incentro* del triángulo ABC.

8.- Sea BC una cuerda fija, no diametral, de una circunferencia C. En el mayor arco de los determinados, se elige un punto A, variable. Determine el lugar geométrico del *ortocentro* del triángulo *ABC* (recuerde analizar dos casos, según sea acutángulo u obtusángulo el triángulo *ABC*).

Evaluación del trabajo:

Se propuso a los participantes la serie de problemas (dos en cada sesión) y se manejaron los elementos necesarios para establecer las conjeturas que permitiesen elaborar una proposición a demostrar. La tarea resultó bastante compleja, pues la mayoría de los profesores asistentes, además de desconocer a los conjuntos de puntos descritos anteriormente como lugares geométricos (en especial el arco capaz), experimentaron numerosas dificultades para poder validar o refutar sus conjeturas.

Esto, nos hace pensar que los docentes participantes del taller, muchos de los cuales se presentaron como profesores que dictan geometría en sus cursos, no manejan como posibilidad del trabajo geométrico la conjetura y/o la demostración. De acuerdo a lo que el autor percibió y de lo que se conversó, se establece que la mayor parte de la labor que a diario realizan en el aula se limita a la identificación de propiedades (de triángulos, de cuadriláteros, etc.) y a su tratamiento a través de algunas construcciones bastante sencillas (niveles 1 a tres del modelo)

Así, podemos suponer, que nuestros cursos de geometría, en general, renuncian a la posibilidad del acceso a niveles los superiores del modelo planteado por el matrimonio Van Hiele, en el sentido que limitan su trabajo y propuestas a los dos primeros niveles y en pocas excepciones, el tercero. Esto confirma las conclusiones de Flores, H y Barrera, S (2002), quienes ya lo habían percibido y reportado.

En el mismo sentido, se constató la inexistencia de propuestas, ya sea a nivel de textos como de investigaciones, que permitan el acercamiento buscado, ya que la mayoría de ellas están planteadas para los primeros niveles.

Lamentablemente, el trabajo en el taller, no permitió detectar si la serie de problemas elegida es adecuada para el objetivo buscado. Sin embargo, la percepción de los participantes es que sí lo es. Para el autor de la propuesta, no deja de ser una percepción y reafirma la necesidad de la búsqueda de propuestas que sean validadas en la práctica y examinada mediante la investigación.

No fue considerada con la necesaria importancia (por falta de tiempo) la aplicabilidad de los asistentes informáticos de geometría dinámica que existen y como pueden auxiliar la labor docente en este aspecto.

Referencias Bibliográficas

Bermúdez, G. (1996). Taller: Geometría para alumnos de 15 años. En Cruz, Torres, Rodríguez y Planchart (Eds.), *Memorias de la Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp 472- 480). Puerto Rico: Universidad de Puerto Rico

Coxeter, H. y Greitzer, S. (1993). *Retorno a la geometría*. Madrid, España: DLS-Euler

Flores, H y Barrera, S. (2002). La geometría del círculo: Un camino hacia la demostración. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 15, Tomo 1, (pp.263-365). México.

Gutierrez, A. y Jaime, A. (1995). ¿Por qué los estudiantes no comprenden geometría?. *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática,* (pp 23-43) México: Iberoamérica.

Hanna, G. (1996). *The ongoing value of proof.* Obtenido en julio de 2004 del sitio web: http://www.oise.utoronto.ca/~ghanna/pme96pfr.html.

Nole, J. (2001). Evaluación del pensamiento lógico formal en estudiantes de un curso de geometría métrica. En G. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 14, pp. 560-564). México.

Puig, A. (1972). *Curso de geometría métrica.* (Tomos I y II). (10a ed.). Madrid, España: Biblioteca Matemática

Siñeriz, L. (2002). Los problemas de regla y compás: una mirada heurística. En C. Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 15, Tomo 2, (pp. 932-937). México.