

## La Noción de Conservación en el Estudio del Área

**Ma. Guadalupe Cabañas**

Cinvestav-IPN

México

gcabanas52@hotmail.com

Socioepistemología – Nivel Superior

### Resumen

En este artículo se describe el desarrollo de un curso que trata de los conceptos de área, medida y conservación de área, el cual estuvo dirigido a profesores de matemáticas de nivel medio y superior. El trabajo se llevó a cabo en tres fases. En la primera se analizaron los conceptos de área, conservación y medida (de área). En la segunda se mostraron los resultados de algunas investigaciones asociadas con el tema de conservación y medida de área, entre los que destacan los estudios de Piaget y sus colaboradores, así como Kordaki y Potari. En la tercera se realizaron actividades que involucró el trabajo con estos conceptos en figuras geométricas planas y expresiones analíticas. En ese tenor, es que en este escrito se analizan estos conceptos, los resultados de investigaciones que se presentaron y analizaron en el curso, y las actividades realizadas.

### Los conceptos de área, conservación y medida (de área)

El concepto de área se asocia al de medida. Se presenta en situaciones diversas como: la extensión que ocupa un terreno o un lago, el territorio que ocupa un estado, una pared a construir o pintar, un campo a sembrar, en la elaboración de planos y mapas, etc. Así, identificamos que los contextos en que se presenta el área pueden representar la extensión de un cuerpo; expresar un espacio vacío o bien la marca que deja un móvil al desplazarse. Desde el punto de vista matemático el área se refiere a figuras geométricas, particularmente al estudio de superficies planas y no planas, que pueden ser expresadas o no mediante fórmulas.

El concepto de área está relacionado con la cuantificación de una superficie a la que se asocia una unidad de medida, expresada como unidad cuadrada. La noción de área a su vez está relacionada a las de conservación, comparación y medida, mismas que pueden ser representadas a través de formas diversas, como: gráfica, numérica y simbólica.

El área en particular, es parte de la cultura de todas las sociedades, una parte de la ciencia y la tecnología, y de la vida diaria de las personas (Kordaki y Potari, 1998). La conservación, significa que el valor de un área permanece intacto mientras su figura puede ser cualitativamente nueva (Piaget, et al, 1970; Kordaki y Potari, 2001). La conservación puede presentarse a partir del cambio de la posición de una figura sin modificar su forma, mediante los movimientos de traslación, rotación y reflexión. Puede darse además, modificando una figura partiéndola y reacomodando sus partes, y; mediante transformaciones analíticas y geométricas. El concepto de medida de área consta del concepto de unidad, del concepto de iteración de unidad, de la cantidad de unidades y el cálculo de fórmulas (Piaget et al, 1970; Kordaky y Potari, 1998).

Freudenthal (1983) indica formas de aproximarse al concepto de área como las siguientes:

- a) *Repartir equitativamente.* Se incluyen situaciones en las que dado un objeto hay que repartirlo, ya sea aprovechando regularidades, por estimación o por medición.
- b) *Comparar y reproducir.* Incluye situaciones en las que hay que comparar dos superficies y también aquellas en las que hay que obtener una reproducción de una superficie con diferente forma a la que se tiene. Estas reproducciones pueden llevarse a cabo mediante inclusión, por transformación, por estimación, por medición o por medio de funciones.
- c) *Medición.* Debido a que la superficie aparece vinculada a un proceso de medición, este proceso puede realizarse mediante exahusión con unidades, por acotación entre un valor superior e inferior, por transformaciones, y por medio de relaciones geométricas generales.

Estas aproximaciones son consideradas por Freudenthal como didácticamente aceptables pero con diferente peso, lo cual nos indica la complejidad del concepto de área.

### **Los conceptos de área, conservación y medida de área en la enseñanza de las Matemáticas**

En la enseñanza de las matemáticas el concepto de área es fundamental. Su estudio inicia en el nivel básico, vinculado a la medida de superficies planas y no planas. En los niveles medio y superior este concepto también se asocia al de integral. En la escuela básica, los niños son introducidos al concepto de medida de área usando cuadrícula y contando los cuadrados dentro de una figura geométrica. Cuando se introduce la fórmula del área del rectángulo por ejemplo, lo subdividen en un número entero de cuadrados unitarios (normalmente se empieza con el tratamiento de figuras que efectivamente lo permiten), y se indica a los estudiantes que la medida del área de dicha figura equivale al número de cuadritos en que se le ha subdividido al rectángulo, advirtiéndoles, siempre por iniciativa del profesor, que el número de filas y columnas son a la vez las medidas de las longitudes de los lados del rectángulo. Con este procedimiento, concluyen que el área de esta figura se obtiene entonces de multiplicar las medidas del largo y del ancho, para obtener así la medida del área que habrá de expresarse en unidades cuadradas. Pasan a la representación algebraica del resultado:  $A = b \times h$  y a las conocidas expresiones “base por altura” o “largo por ancho”. Por el contrario, para el cálculo del área del círculo se prescinde de este tipo de procedimientos, limitándose a utilizar la fórmula  $\pi r^2$  o la introducción de estrategias como la de seccionar el círculo en sectores cada vez más pequeños. Esta forma de presentar la medida del área en la enseñanza básica y de introducir prematuramente las fórmulas carece de sentido para los niños si no se cuenta con la comprensión de las propiedades de la medida de áreas, ya que no existen espontáneamente como condiciones lógicas en su pensamiento. Por ejemplo, para un niño el área de una figura no es desde siempre equivalente a la suma de áreas de las partes que lo componen (Domínguez, p. 31, 1984).

Piaget afirma que la ausencia de actividades para manipulaciones de área, principalmente aquellas con las cuales se inician las acciones sensorio-motoras de los niños, el salto del concepto de conservación de área y el uso prematuro de fórmulas de áreas matemáticas en la escuela causa dificultades en la mayoría de los estudiantes en este tema. Además, los niños no tienen la oportunidad para crear sus herramientas subjetivas para medir, por ejemplo unidades

o cuadrículas, debido a la introducción de una unidad propuesta por el profesor (Piaget et al, 1970).

Respecto del área, Piaget afirma (Piaget et al, 1970) que el concepto de conservación de área es un aspecto preliminar y fundamental en el entendimiento del concepto de medición de área entre los estudiantes, es decir, la conservación antecede a la medición.

En la enseñanza de las matemáticas del nivel medio y superior, el estudio del área también se vincula con el de integral definida. Este concepto suele introducirse mediante explicaciones relacionadas con la medición del área de regiones planas acotadas, mediante la expresión “área bajo la curva”. Dicho procedimiento de medición consiste en dividir la región en regiones más pequeñas, cuyas áreas tengan fórmulas de cálculo conocidas. Se suele dividir al intervalo de integración en subintervalos de igual longitud, sobre los cuales se construyen rectángulos con los que busca cubrir la región ya sea por defecto o por exceso. El valor aproximado del área se obtiene a partir de la suma de las áreas de los rectángulos así construidos. El cálculo del área de estos rectángulos utiliza la fórmula de “base por altura”, por lo que basta contar con los valores de las bases y de las alturas para conocer el valor de las áreas de los rectángulos. Si bien el procedimiento utilizado pudiera parecer simple, el recurso de subdividir la región en rectángulos es introducido artificialmente tanto en los textos escolares como en las explicaciones del profesor, además de que la particular forma de toma al límite plantea dificultades cognitivas. Esto suele hacerse con el propósito de justificar la presentación de la integral definida a través de la noción de área de donde se pasará al tratamiento algorítmico típico de la enseñanza de las integrales.

“Si bien, en geometría elemental se deducen fórmulas para las áreas de muchas figuras planas, un poco de reflexión hace ver que tampoco se da una definición aceptable de la noción de área. El área de una región se define a veces como el número de cuadrados de lado unidad que caben en la región. Pero esta definición es totalmente inadecuada para todas las regiones con excepción de las más simples. Por ejemplo, el círculo de radio 1 tiene por área el número irracional  $\pi$ , pero no está claro en absoluto cuál es el significado de « $\pi$  cuadrados». Incluso si

consideramos un círculo de radio  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$  cuya área es 1, resulta difícil explicar de qué manera un cuadrado unidad puede llenar este círculo, ya que no parece posible dividir el cuadrado unidad en pedazos que puedan ser yuxtapuestos de manera que formen un círculo” (Spivak. pp. 345-346, 1999).

Una particularidad relativa a la medición del área, es que las unidades convencionales (metro cuadrado, centímetro cuadrado, etc.) a diferencia de otras unidades no existen como instrumentos de medición en las tiendas, así como podemos encontrar reglas, cintas graduadas, escuadras en unidades de longitud; pesas para la masa, entre otras. El cálculo del área se determina indirectamente, a partir de medidas de longitud y con instrumentos correspondientes a esta magnitud.

## **Estudios sobre la conservación y medición de área**

Los estudios realizados por Piaget y colaboradores en los años 60's, han significado una contribución importante a la comprensión del desarrollo en el niño de conceptos relacionados con el área, pues ellos descubrieron qué clase de nociones destacan entre los niños de 8 a 11 años de edad cuando tratan con las nociones de conservación y medición de áreas. A partir de estudios como este en que se emplean materiales concretos, se afirma que el concepto de conservación de área es un aspecto preliminar y fundamental en el entendimiento del concepto de medición de área, es decir en términos llanos, señalan que la conservación antecede a la medición. Esta tesis se llevó adelante en Grecia con estudiantes de secundaria de 14 años de edad, Kordaki y Potari (2003) utilizaron un micromundo llamado C.AR.M.E. (Conservación de Área y su Medida) para que los estudiantes construyeran de forma dinámica sus propias aproximaciones a los conceptos de conservación y medida de área. Los antecedentes de este trabajo fueron las investigaciones realizadas por Piaget et al., (1970). Mediante el uso de este ambiente exploraron: las estrategias de los estudiantes en relación al concepto de conservación de área y su desarrollo mientras interactuaban con el micromundo; el pensamiento de los estudiantes sobre el concepto de conservación de área en triángulos equivalentes y paralelogramos de base común e igual altura, y; el papel de las herramientas ofrecidas por el micromundo en relación con las estrategias de los estudiantes. El estudio muestra que las herramientas proporcionadas por el ambiente experimental estimularon a los estudiantes a expresar sus propias aproximaciones al concepto de conservación de área.

## **Marco Teórico**

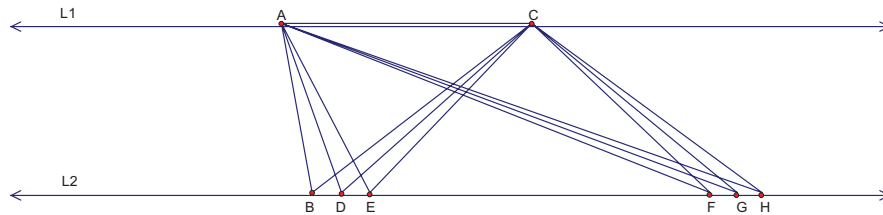
El marco teórico de referencia para el diseño de las actividades es la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa. Aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar a los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemológica del conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando en sobremanera el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana. La socioepistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento socialmente situado, considerándolo a la luz de sus circunstancias y escenarios sociales (Cantoral y Farfán, 2003, 2004).

## **Actividades que comprendieron el curso**

En el curso se trabajaron cuatro actividades. En la primera se pidió que determinaran la relación entre las áreas de triángulos con misma base y misma altura. En la segunda, que realizaran la transformación de polígonos convexos y no convexos, conservando sus áreas. En la tercera, que llevaran a cabo la transformación de gráficas de funciones lineales a no lineales conservando el área bajo la gráfica, y; en la última que interpretaran geoméricamente los resultados de integrales. El propósito del trabajo con estas actividades fue que los profesores identificaran conceptos como medida, conservación de área en el estudio de relaciones, la

realización de transformaciones geométricas y analíticas, y en la interpretación geométrica de resultados de una expresión analítica.

**Actividad 1.** Determina qué relación existe entre las áreas de los triángulos ABC, ACD, ACE, ACF, ACG y ACH. Ellos son construidos entre dos paralelas. Argumenta tu respuesta.



**Actividad 2.** Transforma cada uno de los siguientes polígonos en otro, con forma diferente, de modo que sus áreas sean iguales. Explica en cada caso, el método que utilizaste.



**Actividad 3.** Bosqueja la gráfica de una función no lineal cuya “área bajo la curva” sea igual al área de la región sombreada para cada una de las siguientes figuras:



**Actividad 4.** Interpreta geoméricamente los resultados de cada una de las siguientes integrales

a).  $\int_0^3 \frac{1}{2} \sqrt{x+1} \, dx$

b).  $\int_1^2 n^2 \, dn$

c).  $\int_1^4 \frac{1}{2} \sqrt{m} \, dm$

### **Referencias Bibliográficas**

- Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics* 53 (3), 255 - 270.
- Del Olmo, M.A., Moreno, F.M. y Gil, F. (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.
- Domínguez, R. (1984). *Conceptualizaciones y procedimientos de medición de áreas en la escuela primaria*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, México.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: Riedel.
- Kordaki, M. y Potari, D. (1998). A learning environment for the conservation of area and its measurement: a computer microworld. *Computers and Education* 31(4) 405 - 422.
- Kordaki, M. y Potari, D. (2002). The effect of area measurement tools on student strategies: The role of a computer microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(1), 65 - 100.
- Kordaki, M. y Potari, D. (2003). The effect of tools of a computer microworld on student's strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics* 52(2), 177 - 209.
- Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1970). *The child's conception of geometry*. New York; USA: Basic Books.