CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS DE FUNCIONES RACIONALES

Beatriz Alejandra Veloz Díaz y Rosa María Farfán Márquez
Cinvestav. México
betty.vdiaz@gmail.com

Resumen. En este trabajo, el lector encontrará una manera rápida y sencilla de obtener la gráfica de una función racional con la ayuda de elementos básicos y característicos de los polinomios. El método propuesto permite bosquejar gráficas a partir de un análisis visual, utilizando herramientas analíticas, numéricas y sus relaciones; se basa en operaciones básicas entre gráficas a través de tres consideraciones fundamentales: La identificación de las raíces de la función, el análisis de regiones y la multiplicidad de las raíces

Palabras clave: Graficación, visualización, funciones racionales

Abstract. In this paper, the reader will find a quick and simple way to get the graph of a rational function with the help of basic elements and characteristic of the polynomials. The proposed method allows graphical sketch from a visual analysis using analytical tools, numerical and their relationships; it is based on basic operations between graphs through three fundamental considerations: Identifying the roots of the function, the analysis of regions and the multiplicity of the roots

Key words: Graphing, visualization, rational functions

Introducción

En este trabajo se presenta una manera rápida y sencilla de obtener la gráfica de una función racional con la ayuda de elementos básicos y característicos de los polinomios. Graficar funciones es una actividad muy útil para apreciar visualmente los cambios en un fenómeno descritos por dicha función, esta es una de las razones por las que se recurre al Método de las Operaciones propuesto por (Cantoral & Montiel, 2001) el cual permite bosquejar gráficas a partir de un análisis visual, utilizando herramientas analíticas, numéricas y sus relaciones.

Estas herramientas son necesarias para el dominio del Método, por tanto, los principales conocimientos para utilizarlo son: factorización de polinomios, conocer los distintos tipos de asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas), graficación de funciones pares e impares, identificación de raíces, entre otros.

El método se basa en operaciones básicas entre gráficas a través de tres consideraciones fundamentales:

1. La identificación de los cruces de la gráfica de la función con el eje X, es decir, la identificación de las raíces de la función.
2. La determinación de regiones clave y sus signos (el análisis de regiones).
3. La multiplicidad de las raíces.

La elaboración de las gráficas de las funciones racionales, requiere de algunas definiciones que ayudarán a desarrollar una indagación profunda y exhaustiva de la información representada en ella:

- Una *función racional* $y = f(x)$ es una función que tiene la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Donde P y Q son polinomios, cumpliendo la condición de que $Q(x) \neq 0$.

- En Matemáticas, la *gráfica de una función* $y = f(x)$ es la visualización de la correspondencia entre los elementos del conjunto dominio y los del conjunto imagen mediante su representación iconográfica.

Método

1. Analizar los grados de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$.
2. Partir de una función expresada como el producto de factores irreducibles, tanto en el numerador como en el denominador.
3. Identificación de los cruces y las indeterminaciones (asíntotas) de la gráfica de la función con el eje **X**.
    - Los valores que anulan el numerador, serán conocidos como raíces de la función.
    - Los valores que anulan el denominador, son las asíntotas verticales.
4. Determinación de regiones clave y sus signos dividiendo en intervalos y utilizando valores de prueba.
5. La multiplicidad de las raíces y las asíntotas verticales.
6. Determinar la existencia de asíntotas horizontales o de asíntotas oblicuas.
7. Establecer el comportamiento de la gráfica de la función cuando $x \to \pm\infty$.

Ahora veamos con detalle las características de cada uno de los puntos que se incluyen en el método de las operaciones para funciones racionales.

- Grados de los polinomios.

Identificar los grados de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ permitirá, en primer lugar, la clasificación de la función racional en tres casos, a través de los cuales será posible guiar la construcción de la gráfica. Dichos casos que se muestran a continuación, debieron ser vistos con anterioridad, sino divididos de esta manera, sí al menos se debe estar familiarizado con ellos para un entendimiento más fluido. En segundo lugar, se podrá comprender el comportamiento de la función para cuando *x* tiende a $\pm\infty$.

Caso 1

$$f(x) = \frac{k}{x} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Para graficar este tipo de funciones sólo basta con tener en cuenta el valor de *k*.

a. Si *k>0* entonces las ramas de la hipérbola estarán en el *primer* y *tercer* cuadrante, como en la figura 1:

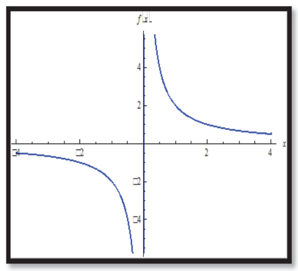

Figura 1.

b. Si k<0 entonces las ramas de la hipérbola estarán en el segundo y cuarto cuadrante, como en la figura 2:

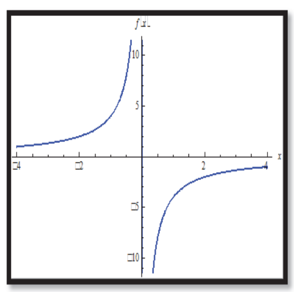

Figura 2.

Caso 2

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad a, c \neq 0$$

En este caso, se identifican una asíntota horizontal definida por las constantes *a* y *c*, de la forma $y = \frac{a}{c}$ y una asíntota vertical especificada por $y = \frac{-d}{c}$. Observa la figura 3:

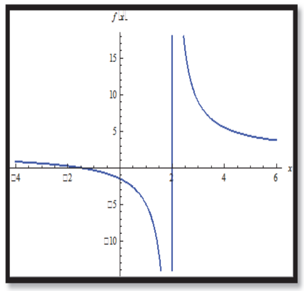

Figura 3.

Caso 3

$$f(x) = \frac{a_n(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n)}{b_n(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n)} a_n \cdot b_n \neq 0$$

Este tipo de función racional, requiere que se consideren los demás pasos del método de las operaciones. Para el grado de la función racional se tomarán en cuenta el grado del numerador y el grado del denominador:

las potencias menores de x
son irrelevantes cuando $x \to \pm\infty$

$$f(x) = \frac{a_n x^n \boxed{+ a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}}{b_m x^m \boxed{+ b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}}$$

Al observar el grado de la función, se podrá determinar su *comportamiento global*.

- Si *n* = *m* el grado de la función es 1, su comportamiento global será como el de una constante y tendrá asíntota horizontal en $\frac{a_n}{b_m}$; osea que la función tenderá a ese valor cuando $x \to \pm\infty$.

- Si *n* < *m* el comportamiento global de la función tendrá la forma de $\frac{1}{x}$, su asíntota horizontal será en cero, al igual que tenderá a cero cuando $x \to \pm\infty$.

- Si *n* > *m* el grado de la función será la resta del grado del numerador menos el grado del denominador, tenderá a infinito cuando $x \to \pm\infty$ pero si la diferencia de los grados es uno, entonces, se tiene una asíntota oblicua.

- Esto es, que si el grado de la función es par, el comportamiento global tendrá la forma de una parábola.
- Y si el grado de la función es impar, su comportamiento global tendrá la forma de una función lineal (recta, cúbica, etc.)

Determinación de regiones clave y sus signos dividiendo n intervalos y utilizando valores de prueba

El análisis de las regiones clave, se puede apoyar del uso de una tabla, en la cual se coloquen los intervalos en los que se secciona el eje X, considerando tanto los puntos donde se ubican las raíces como aquellos en los cuales se ubican las asíntotas verticales, un valor de prueba y el signo resultante de cada binomio. El objetivo es analizar el comportamiento de los signos en cada una de las regiones definidas por los intervalos y así determinar si la gráfica está por encima o por debajo del eje X, ejemplo:

Intervalo	Valor de prueba	Operaciones	Signo
(-∞ , -2)	-3	(-)(+)(-) =	+
(-2 , 0)	-1	(-)(+)(+)=	-
(0 , 3)	2	(+)(+)(+)=	+
(3 , +∞)	4	(+)(-)(+)=	-

Multiplicidad de las raíces

Sea $(x-c)^m$ un factor de *f*, donde $m \geq 1$ es natural, se dice que *x - c* tiene multiplicidad *m* y se caracteriza de la siguiente manera:

- Si *m* = *1*, *x – c* es de multiplicidad simple.
- Si *m* es par, *x – c* es una raíz doble/repetida.
- Si *m* es impar, *x – c* es una raíz de multiplicidad impar.

Y al graficarlas ocurre como en la figura 4:

Figura 4.

Para raíces y asíntotas se observa un comportamiento local.

Nótese que al hablar de raíces, la expresión “*x – c*” no es la raíz. La raíz es el valor *x* = *c*.

Asíntotas verticales

El comportamiento de la gráfica de f cuando existe una asíntota vertical, depende de si la multiplicidad del factor es par o impar, ya que:

- Si la multiplicidad de la asíntota es PAR, la gráfica es simétrica respecto a la asíntota (figura 5).
- Si la multiplicidad de la asíntota es IMPAR, la gráfica es asimétrica respecto de la asíntota (figura 6).

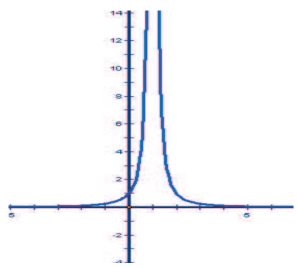

Figura 5.

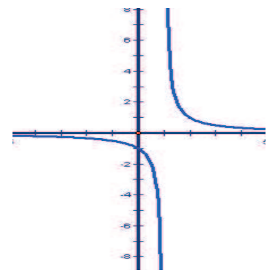

Figura 6.

Ejemplo $y = \frac{(x-5)^2(x+1)}{x-2}$

Se observan sus características:

El grado total de la función: 3-1=2.

Signo: positivo.

Comportamiento global: Parábola.

Sus raíces están en: -1 y 5.

Asíntota en: 2

- El comportamiento local alrededor del 5 es como el de una función cuadrática
- El comportamiento local alrededor de -1 es el de una recta.

Un primer bosquejo se observa en la figura 7:

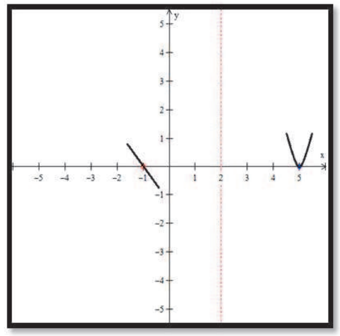

Figura 7.

Ahora, se hace un análisis en cada intervalo para encontrar el signo de la función.

Intervalo	Valor de prueba	Operaciones	Signo
(-∞ , - 1)	-2	$\frac{(+)(-)}{(-)} =$	+
(- 1 , 2)	0	$\frac{(+)(+)}{(-)} =$	-
(2 , 5)	3	$\frac{(+)(+)}{(+)} =$	+
(5 , ∞)	6	$\frac{(+)(+)}{(+)} =$	+

Nótese que alrededor del punto 2 el comportamiento local es de la forma de la gráfica de $\frac{1}{x}$.

Por lo que el bosquejo completo queda como en la figura 8; en la figura 9 se aprecia la gráfica exacta, utilizando software:

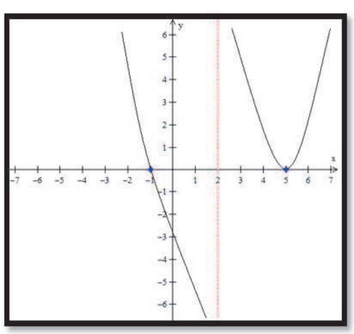

Figura 8.

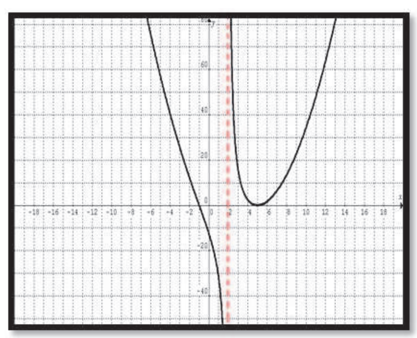

Figura 9.

Todos los elementos gráficos y conceptos matemáticos utilizados en este Método deben pertenecer al conjunto de conocimientos previos de los usuarios de éste, tanto alumnos como profesores; de esta manera el uso del Método tendrá una fluidez que se podrá agilizar con la práctica y realización de distintos ejercicios para dominarlo por completo. Y siempre se podrá utilizar algún software para hacer la comprobación, sin embargo, esto se recomienda sólo al principio cuando se esté aprendiendo, ya que el objetivo es prescindir de de dichas herramientas computacionales.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R.; Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*, México: Editorial Pearson Educación.

Farfán et al (2000)**.** Lenguaje algebraico y pensamiento funcional En Cantoral R. (coordinador) *Desarrollo del pensamiento matemático*, pp. 89-144. México: Trillas.